中国科学: 数学 2020 年 第 50 卷 第 4 期: 491 ~ 502
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates
论 文

Poisson 方程在边界附近的零延拓

蔡勇勇[1], 周蜀林[2*]

1. 北京计算科学研究中心, 北京 100193;
2. 北京大学数学学院, 北京 100871
E-mail: yongyong.cai@csrc.ac.cn, szhou@math.pku.edu.cn

收稿日期: 2018-10-25; 接受日期: 2019-02-19; 网络出版日期: 2019-06-03; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 91630204, U153040, 11571020 和 11671021) 资助项目

摘要 本文给出一个充分必要条件, 来保证 Poisson 方程的解在边界附近零延拓后得到的函数仍然是相对应的延拓问题的解. 本文分别在古典解、强解和弱解的框架下证明这个结果.

关键词 Poisson 方程 零延拓 边界

MSC (2010) 主题分类 35J05, 35J25

1 引言

当考虑椭圆型方程的边值问题, 尤其是解在边界附近的正则性时, 一种典型做法是将一般的边值问题约化为零边值问题. 为了研究一个边界附近的边值问题, 通常考虑解与一个截断函数的乘积, 将问题局部化. 这样, 一个边值问题就简化为一个带零边值的局部边值问题.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑区域, x_0 是其边界上的一个点. 不失一般性, 假设 x_0 是原点. 设 r 是一个很小的正数, B_r 表示球心为原点、半径为 r 的球. 记 $\Omega_r = \Omega \cap B_r$, 其边界 $\partial\Omega_r = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, 其中 $\Gamma_0 = \partial\Omega \cap \bar{B}_r$ 和 $\Gamma_1 = \partial B_r \cap \bar{\Omega}$. 记 $\Gamma_2 = \partial B_r \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, 则 $\partial B_r = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (参见图 1).

设 $\mathcal{L}$ 是一个二阶椭圆型偏微分方程算子. 当考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x), & x \in \Omega_r, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega_r \end{cases} \tag{1.1}$$

时, 一个很有诱惑性的想法是, 通过零延拓将解 u 和函数 f 从 Ω_r 延拓到 B_r, 将上面的问题约化成下列问题:

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = \tilde{f}(x), & x \in B_r, \\ v = 0, & x \in \partial B_r, \end{cases} \tag{1.2}$$

英文引用格式: Cai Y Y, Zhou S L. Zero extension for Poisson equation near the boundary (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 491–502, doi: 10.1360/SCM-2018-0753

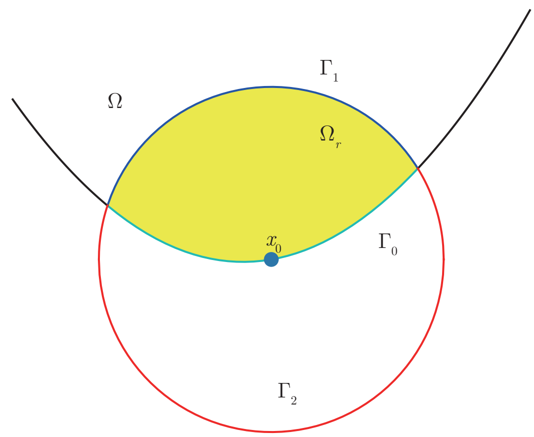

图 1　相关区域

其中

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\Omega_r,\\ 0, & x\in B_r\setminus\Omega_r.\end{cases}\tag{1.3}$$

由于球体是 $\mathbb{R}^N$ 上很好的几何区域, 求解问题 (1.2) 比求解问题 (1.1) 容易得多. 一些人想当然地认为零延拓后的函数

$$\tilde{u}(x)=\begin{cases}u(x), & x\in\bar{\Omega}_r,\\ 0, & x\in\bar{B}_r\setminus\bar{\Omega}_r\end{cases}\tag{1.4}$$

是问题 (1.2) 的解. 不幸的是, 即使对于最简单的椭圆算子 $-\Delta$, 同时假设 f 是光滑函数, 这个论断一般也不正确.

设 u 是 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f, & x\in\Omega_r,\\ u=0, & x\in\partial\Omega_r\end{cases}\tag{1.5}$$

的一个解, 零延拓函数 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{f}$ 分别由 (1.4) 和 (1.3) 定义.

一个自然而有趣的问题是, 当函数 $f(x)$ 满足什么条件时, $u(x)$ 的零延拓函数 $\tilde{u}(x)$ 仍然是 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta v=\tilde{f}, & x\in B_r,\\ v=0, & x\in\partial B_r\end{cases}\tag{1.6}$$

的解; 如果 $u(x)$ 的零延拓函数 $\tilde{u}(x)$ 是 Dirichlet 问题 (1.6) 的一个解, 函数 $f(x)$ 必须满足什么条件.

本文将对于此问题给出全面的解答. 对于函数 $f(x)$, 我们给出一个充分必要条件, 来保证 Poisson 方程的解在边界附近零延拓后得到的函数仍然是相对应的延拓问题的解. 本文处理的边界延拓问题可以看作是文献 [1] 中内部延拓问题的继续和深化.

为保证问题 (1.5) 存在古典解 $u(x)$ 和零延拓可行, 我们先假设函数 f 在 $\bar{\Omega}_r$ 上 Hölder 连续, 且在部分边界 Γ_0 上 $f=0$.

定理 1.1 假设 $f\in C^{\alpha}(\bar{\Omega}_r)$ $(0<\alpha<1)$ 且 $f|_{\Gamma_0}=0$. 设 $u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}_r)$ 是问题 (1.5) 的唯一的古典解, 零延拓函数 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{f}$ 分别由 (1.4) 和 (1.3) 定义, 则 $\tilde{u}$ 是问题 (1.6) 的古典解当且仅当 f 与任意一个满足 $g|_{\Gamma_1}=0$ 的调和函数 $g\in C^2(\Omega_r)\cap C(\bar{\Omega}_r)$ 正交, 即对于任意一个满足 $g|_{\Gamma_1}=0$ 的调和函数 $g\in C^2(\Omega_r)\cap C(\bar{\Omega}_r)$, 条件

$$\int_{\Omega_r} f(x)g(x)\,dx=0 \tag{1.7}$$

成立.

注 1.1 若 $f\in \Delta C_0^{\infty}(\Omega_r)$, 即存在 $w\in C_0^{\infty}(\Omega_r)$ 使得 $f=\Delta w$, 则 f 与任意调和函数 $g\in C^2(\Omega_r)\cap C(\bar{\Omega}_r)$ 正交.

接着假设 f 属于 Lebesgue 空间以保证问题 (1.5) 有强解.

定理 1.2 假设 $f\in L^p(\Omega_r)$ $(1<p<+\infty)$. 设 $u\in W^{2,p}(\Omega_r)\cap W_0^{1,p}(\Omega_r)$ 是问题 (1.5) 的唯一强解, 零延拓函数 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{f}$ 分别由 (1.4) 和 (1.3) 定义, 则 $\tilde{u}$ 是问题 (1.6) 的强解当且仅当 f 与任意一个满足 $g|_{\Gamma_1}=0$ 的调和函数 $g\in C^2(\Omega_r)\cap C(\bar{\Omega}_r)$ 正交.

注 1.2 如果 $f\in \Delta W_0^{2,p}(\Omega_r)$, 即存在 $w\in W_0^{2,p}(\Omega_r)$ 使得 $f=\Delta w$, 那么 f 与任意调和函数 $g\in C^2(\Omega_r)\cap C(\bar{\Omega}_r)$ 正交.

假设 $f\in H^{-1}(\Omega_r)$ 是一个 L^2 向量函数的散度. 在这种情形, 问题 (1.5) 存在唯一弱解 $u\in H_0^1(\Omega_r)$.

定理 1.3 假设 $f=-\operatorname{div}\boldsymbol{F}$, 其中 $\boldsymbol{F}=(f_1,\dots,f_n)\in L^2(\Omega_r;\mathbb{R}^n)$. 设 $u\in H_0^1(\Omega_r)$ 是问题 (1.5) 的唯一弱解. 零延拓函数 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{f}_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ 分别由 (1.4) 和 (1.3) 定义. 记 $\tilde{\boldsymbol{F}}=(\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_n)$, $\tilde{f}=-\operatorname{div}\tilde{\boldsymbol{F}}$, 则 $\tilde{u}$ 是问题 (1.6) 的弱解当且仅当对于任意一个满足 $\varphi|_{\Gamma_1}=0$ 的调和函数 $\varphi\in C^2(\Omega_r)\cap C^1(\bar{\Omega}_r)$, 条件

$$\int_{\Omega_r} \boldsymbol{F}(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx=0 \tag{1.8}$$

成立.

注 1.3 当 $\boldsymbol{F}\in L^p(\Omega_r;\mathbb{R}^n)$ $(1<p<+\infty)$ 时, 可以得到类似定理 1.3 的结论. 此情形下, 问题 (1.5) 的可解性可参见文献 [2].

本文余下内容安排如下. 第 2 节将在古典解、强解和弱解的框架下证明上述结论. 第 3 节将对于非线性的 p-Laplace 方程给出一个结果. 这个结果将说明线性问题与非线性问题有显著差别.

2 主要结果的证明

本节将分别证明定理 1.1–1.3.

记 Laplace 方程的基本解

$$\Gamma(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & n=2,\\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)}|x|^{2-n}, & n\geqslant 3,\end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\alpha(n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上单位球的体积 (参见文献 [3, 第 2.2 小节] 或 [4, 第 4 章]).

2.1 古典解

定理 1.1 的证明 **必要性** 由于 $f\in C^{\alpha}(\bar{\Omega}_r)$ 且 $f|_{\Gamma_0}=0$, 我们知 $\tilde{f}\in C^{\alpha}(\bar{B}_r)$. 于是, 问题 (1.6) 存在唯一的解 $v\in C^{2,\alpha}(\bar{B}_r)$ (参见文献 [5, 第 2 章] 或 [6, 第 6 章]).

如果 $\tilde{u}$ 是问题 (1.6) 的古典解, 则 $\tilde{u}=v\in C^2(\bar{B}_r)$. 这蕴含着 $u|_{\Gamma_0}=0$, $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}|_{\Gamma_0}=0$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 是 Γ_0 上的单位外法向量.

首先, 假设 $g\in C^2(\bar{\Omega}_r)$ 是 Ω_r 上的调和函数, 且满足 $g|_{\Gamma_1}=0$. 由 Green 第二等式, 有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_r}[u\Delta g-g\Delta u]\,dx&=\int_{\partial\Omega_r}\left(u\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}-g\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)dS(x)\\&=\int_{\Gamma_0}\left(u\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}-g\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)dS(x)+\int_{\Gamma_1}\left(u\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}-g\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)dS(x).\end{aligned}$$

这蕴含着

$$\int_{\Omega_r}f(x)g(x)\,dx=-\int_{\Gamma_1}g\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,dS(x)=0.$$

接下来, 如果 $g\in C^2(\Omega_r)\cap C(\bar{\Omega}_r)$ 是 Ω_r 上的调和函数, 且满足 $g|_{\Gamma_1}=0$, 我们用一列光滑函数 φ_n 逼近 $g|_{\partial\Omega_r}$ 使得

$$\max_{\partial\Omega_r}|g(x)-\varphi_n(x)|<\frac{1}{n},$$

并构造一列调和函数 $g_n\in C^2(\bar{\Omega}_r)$ 使得

$$\begin{cases}\Delta g_n=0, & x\in\Omega_r,\\ g_n=\varphi_n, & x\in\partial\Omega_r.\end{cases}$$

由极值原理, 得

$$\max_{\bar{\Omega}_r}|g(x)-g_n(x)|\leqslant\max_{\partial\Omega_r}|g(x)-\varphi_n(x)|<\frac{1}{n},$$

即 g_n 在 $\bar{\Omega}_r$ 上一致收敛到 g.

从前面的计算得

$$\left|\int_{\Omega_r}f(x)g_n(x)\,dx\right|=\left|-\int_{\Gamma_1}\varphi_n\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,dS(x)\right|\leqslant\frac{1}{n}\int_{\Gamma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|dS(x).$$

令 $n\to\infty$, 则

$$\int_{\Omega_r}f(x)g(x)\,dx=0.$$

于是, 条件 (1.7) 成立.

充分性 假设条件 (1.7) 成立, 即 f 正交与 Ω_r 上任意一个限制在 Γ_1 为 0 的调和函数.

记 $G_r(x,y)$ 和 $G(x,y)$ 分别是 $-\Delta$ 在 Ω_r 上和在 B_r 上的 Green 函数. 我们知

$$G_r(x,y)=\Gamma(y-x)-\phi_r^x(y),\quad G(x,y)=\Gamma(y-x)-\phi^x(y),\tag{2.2}$$

其中 $\Gamma(y-x)$ 是基本解, $\phi_r^x(y)$ 是在 $\partial\Omega_r$ 以 $\Gamma(y-x)$ 为边值的调和函数, $\phi^x(y)$ 在 ∂B_r 以 $\Gamma(y-x)$ 为边值的调和函数 (参见文献 [4, 第 4 章]、[7, 第 2.2 小节], 或 [3, 第 2.3 小节]). 于是有 $\phi_r^x(y)\in C^2(\Omega_r)\cap C(\bar{\Omega}_r)$, $\phi^x(y)\in C^2(\bar{B}_r)$. 对于问题 (1.5) 和 (1.6), 其解可表示为

$$u(x)=\int_{\Omega_r}G_r(x,y)f(y)\,dy=\int_{\Omega_r}[\Gamma(x-y)-\phi_r^x(y)]f(y)\,dy,\quad\forall\,x\in\Omega_r\tag{2.3}$$

和

$$v(x)=\int_{B_r}G(x,y)\tilde{f}(y)\,dy=\int_{\Omega_r}[\Gamma(x-y)-\phi^x(y)]f(y)\,dy,\quad \forall\, x\in B_r. \tag{2.4}$$

情形 1 $x\in\bar{\Omega}_r$.

当 $x\in\Omega_r$ 时,

$$\Delta(\phi_r^x(y)-\phi^x(y))=0,\quad y\in\Omega_r$$

且

$$[\phi_r^x(y)-\phi^x(y)]\,|_{\Gamma_1}=[\Gamma(x-y)-\Gamma(x-y)]\,|_{\Gamma_1}=0.$$

这蕴含着

$$\int_{\Omega_r}f(y)(\phi_r^x(y)-\phi^x(y))\,dy=0.$$

从 (2.3) 和 (2.4) 得

$$v(x)=u(x),\quad \forall\, x\in\Omega_r.$$

由于 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在 $\partial\Omega_r$ 上的连续性, 于是, 在 $\bar{\Omega}_r$ 上, $u(x)=v(x)$.

情形 2 $x\in\bar{B}_r\setminus\bar{\Omega}_r$.

当 $x\in B_r\setminus\bar{\Omega}_r$ 时, 我们知 $G(x,y)\in C^2(\bar{\Omega}_r)$ 是 Ω_r 上的调和函数, 且满足 $G(x,y)\,|_{\Gamma_1}=0$. 由表达式 (2.4) 和 (1.7) 得

$$v(x)=0,\quad \forall\, x\in B_r\setminus\bar{\Omega}_r.$$

又由于 $v(x)\in C(\bar{B}_r)$, 则 $v(x)=0,\forall\, x\in\bar{B}_r\setminus\Omega_r$. 综合上述两种情形, 我们得到

$$\tilde{u}(x)=v(x),\quad x\in\bar{B}_r,$$

即 $\tilde{u}(x)$ 是问题 (1.6) 的古典解.

从而完成定理 (1.1) 的证明. □

2.2　强解

接下来利用逼近方法证明定理 1.2.

定理 1.2 的证明　现在 $f\in L^p(\Omega_r)$. 于是, $\tilde{f}\in L^p(B_r)$. 由 Calderón-Zygmund 理论, 对于问题 (1.5) 和 (1.6), 存在唯一强解 $u\in W^{2,p}(\Omega_r)\cap W_0^{1,p}(\Omega_r)$ 和 $v\in W^{2,p}(B_r)\cap W_0^{1,p}(B_r)$ (参见文献 [5, 第 3 章] 和 [6, 第 9 章]).

必要性 假设 $\tilde{u}(x)$ 是问题 (1.6) 的强解, 则 $\tilde{u}(x)=v(x)\in W^{2,p}(B_r)\cap W_0^{1,p}(B_r)$.

设 $\{f_n\}\subset C_0^\infty(\Omega_r)$ 是一个序列满足

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^p(\Omega_r)}=0.$$

定义

$$\tilde{f}_n(x)=\begin{cases}f_n(x), & x\in\Omega_r,\\ 0, & x\in\bar{B}_r\setminus\Omega_r,\end{cases} \tag{2.5}$$

则有 $\tilde{f}_n(x) \in C_0^\infty(B_r)$ 且
$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_{L^p(B_r)} = 0.$$

设 $v_n \in C^\infty(\bar{B}_r)$ $(n = 1, \dots)$ 是 Dirichlet 问题
$$\begin{cases} -\Delta v_n = \tilde{f}_n(x), & x \in B_r, \\ v_n = 0, & x \in \partial B_r \end{cases} \tag{2.6}$$
的古典解. 显然, $v_n \in W^{2,p}(B_r) \cap W_0^{1,p}(B_r)$. 由 Calderón-Zygmund 理论得
$$\|v_n - \tilde{u}\|_{W^{2,p}(B_r)} \leqslant C\|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_{L^p(B_r)}, \quad n = 1, 2, \dots$$
这蕴含着 $\{v_n\}$ 是 $W^{2,p}(B_r) \cap W_0^{1,p}(B_r)$ 中的 Cauchy 列.

首先, 假设 $g \in C^2(\bar{\Omega}_r)$ 是 Ω_r 上的调和函数, 且满足 $g\,|_{\Gamma_1} = 0$. 由 Green 第二等式, 有
$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} [v_n \Delta g - g \Delta v_n]\, dx &= \int_{\partial\Omega_r} \left(v_n \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} - g \frac{\partial v_n}{\partial \boldsymbol{n}} \right) dS(x) \\ &= \int_{\Gamma_0} \left(v_n \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} - g \frac{\partial v_n}{\partial \boldsymbol{n}} \right) dS(x) + \int_{\Gamma_1} \left(v_n \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} - g \frac{\partial v_n}{\partial \boldsymbol{n}} \right) dS(x), \end{aligned}$$
从而,
$$\int_{\Omega_r} f_n(x) g(x)\, dx = \int_{\Gamma_0} \left(v_n \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} - g \frac{\partial v_n}{\partial \boldsymbol{n}} \right) dS(x) + \int_{\Gamma_1} v_n \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS(x). \tag{2.7}$$
利用迹定理 (参见文献 [8, 第 5.34–5.36 小节]), 得到
$$\|v_n - \tilde{u}\|_{L^p(\Gamma_1)} \leqslant C\|v_n - \tilde{u}\|_{W^{1,p}(\Omega_r)} \to 0$$
和
$$\|v_n - \tilde{u}\|_{L^p(\Gamma_0)} + \left\| \frac{\partial v_n}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \boldsymbol{n}} \right\|_{L^p(\Gamma_0)} \leqslant C\|v_n - \tilde{u}\|_{W^{2,p}(\Omega_r)} \to 0.$$
由于 $\tilde{u} = v \in W^{2,p}(B_r) \cap W_0^{1,p}(B_r)$, 则在 L^p 意义下, $\tilde{u}\,|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} = 0$, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \boldsymbol{n}}\,|_{\Gamma_0} = 0$. 因此,
$$\|v_n\|_{L^p(\Gamma_0)} + \|v_n\|_{L^p(\Gamma_1)} + \left\| \frac{\partial v_n}{\partial \boldsymbol{n}} \right\|_{L^p(\Gamma_0)} \to 0.$$
在 (2.7) 中, 令 $n \to \infty$, 得
$$\int_{\Omega_r} f(x) g(x)\, dx = 0.$$

接下来假设 $g \in C^2(\Omega_r) \cap C(\bar{\Omega}_r)$ 是 Ω_r 上的调和函数, 且满足 $g\,|_{\Gamma_1} = 0$. 我们用一列光滑函数 φ_n 逼近 $g\,|_{\partial\Omega_r}$ 使得
$$\max_{\Gamma_0} |g(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{n}, \quad \varphi_n\,|_{\Gamma_1} = 0,$$
并构造一列调和函数 $g_n \in C^2(\bar{\Omega}_r)$ 使得
$$\begin{cases} \Delta g_n = 0, & x \in \Omega_r, \\ g_n = \varphi_n, & x \in \partial\Omega_r. \end{cases}$$

由极值原理有

$$\max_{\bar{\Omega}_r}|g(x)-g_n(x)|\leqslant\max_{\partial\Omega_r}|g(x)-\varphi_n(x)|<\frac{1}{n},$$

即 g_n 在 $\bar{\Omega}_r$ 上一致收敛到 g. 注意到

$$\int_{\Omega_r}f(x)g_n(x)\,dx=0,$$

令 $n\to\infty$, 则

$$\int_{\Omega_r}f(x)g(x)\,dx=0.$$

于是, 条件 (1.7) 成立.

充分性　假设条件 (1.7) 成立, 即 $f\in L^p(\Omega_r)$ 正交于任意一个满足 $g|_{\Gamma_1}=0$ 的调和函数 $g\in C^2(\Omega_r)\cap C(\bar{\Omega}_r)$.

设 $\{f_n\}\subset C_0^\infty(\Omega_r)$ 是满足

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^p(\Omega_r)}=0$$

的一个函数列. $\tilde{f}_n(x)$ 由 (2.5) 定义. 显然, $\tilde{f}_n(x)\in C_0^\infty(B_r)$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\|\tilde{f}_n-\tilde{f}\|_{L^p(B_r)}=0.$$

记 u_n 和 v_n 是 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u_n=f_n(x), & x\in\Omega_r,\\ u_n=0, & x\in\partial\Omega_r,\end{cases}\quad\begin{cases}-\Delta v_n=\tilde{f}_n(x), & x\in B_r,\\ v_n=0, & x\in\partial B_r\end{cases}\tag{2.8}$$

的古典解. 显然, $u_n\in W^{2,p}(\Omega_r)\cap W_0^{1,p}(\Omega_r)$ 和 $v_n\in W^{2,p}(B_r)\cap W_0^{1,p}(B_r)$. 由 Calderón-Zygmund 理论, 对于 $n=1,2,\ldots$, 有

$$\|u_n-u\|_{W^{2,p}(\Omega_r)}\leqslant C\|f_n-f\|_{L^p(\Omega_r)},$$
$$\|v_n-v\|_{W^{2,p}(B_r)}\leqslant C\|\tilde{f}_n-\tilde{f}\|_{L^p(B_r)},$$

其中 $u\in W^{2,p}(\Omega_r)\cap W_0^{1,p}(\Omega_r)$ 是问题 (1.5) 的唯一强解, $v\in W^{2,p}(B_r)\cap W_0^{1,p}(B_r)$ 是问题 (1.6) 的唯一强解. 因此, 我们可抽一个子序列 $\{u_{n_k}\}\subset\{u_n\}$, 使得其在 Ω_r 上几乎处处收敛, 以及一个子序列 $\{v_{n_k}\}\subset\{v_n\}$ 使得其在 B_r 上几乎处处收敛, 即当 $k\to\infty$ 时,

$$u_{n_k}(x)\to u(x),\quad x\in\Omega_r\setminus E_1,$$
$$v_{n_k}(x)\to v(x),\quad x\in B_r\setminus E_2,$$

其中 $E_1\subset\Omega_r$ 满足 $\operatorname{meas}E_1=0$, $E_2\subset B_r$ 满足 $\operatorname{meas}E_2=0$.

由于 u_{n_k} 和 v_{n_k} 是问题 (2.6) 的古典解, 我们有表达式

$$u_{n_k}(x)=\int_{\Omega_r}G_r(x,y)f_{n_k}(y)\,dy,\quad\forall\,x\in\Omega_r$$

和

$$v_{n_k}(x)=\int_{B_r}G(x,y)\tilde{f}_{n_k}(y)\,dy=\int_{\Omega_r}G(x,y)f_{n_k}(y)\,dy,\quad\forall\,x\in B_r,$$

其中 $G_r(x,y)$ 和 $G(x,y)$ 分别为 $-\Delta$ 在 Ω_r 和 B_r 上的 Green 函数, 如 (2.2) 定义.

因此, 对于每一个点 $x\in\Omega_r$, 我们得到

$$\begin{aligned} v_{n_k}(x)-u_{n_k}(x) &= \int_{\Omega_r}[\phi_r^x(y)-\phi^x(y)]f_{n_k}(y)\,dy \\ &= \int_{\Omega_r}[\phi_r^x(y)-\phi^x(y)][f_{n_k}(y)-f(y)]\,dy, \end{aligned}$$

因为

$$\begin{cases} \Delta[\phi_r^x(y)-\phi^x(y)]=0, & y\in\Omega_r, \\ \phi_r^x(y)-\phi^x(y)=0, & y\in\Gamma_1. \end{cases}$$

从而, 对于每一个点 $x\in\Omega_r$, 不等式

$$|v_{n_k}(x)-u_{n_k}(x)|\leqslant M_x\int_{\Omega_r}|f_{n_k}(y)-f(y)|\,dy$$

成立, 其中 $M_x=\max_{y\in\Gamma_0}|\phi_r^x(y)-\phi^x(y)|$. 这是因为调和函数 $\phi_r^x(y)-\phi^x(y)$ 在 $\bar{\Omega}_r$ 上的最大值和最小值总是在边界 $\partial\Omega_r=\Gamma_0\cup\Gamma_1$ 达到.

固定点 $x\in\Omega_r\setminus(E_1\cup E_2)$, 则

$$\lim_{k\to\infty}|v_{n_k}(x)-u_{n_k}(x)|=0.$$

从而,

$$v(x)=u(x),\quad \forall\, x\in\Omega_r\setminus(E_1\cup E_2).$$

当 $x\in B_r\setminus\bar{\Omega}_r$ 时,

$$v_{n_k}(x)=\int_{\Omega_r}G(x,y)f_{n_k}(y)\,dy=\int_{\Omega_r}G(x,y)[f_{n_k}(y)-f(y)]\,dy,$$

因为

$$\begin{cases} \Delta G(x,y)=0, & y\in\Omega_r, \\ G(x,y)=0, & y\in\Gamma_1. \end{cases}$$

于是, 对于 $x\in B_r\setminus\bar{\Omega}_r$, 我们得到

$$|v_{n_k}(x)|\leqslant\tilde{M}_x\int_{\Omega_r}|f_{n_k}(y)-f(y)|\,dy,$$

其中 $\tilde{M}_x=\max_{y\in\Gamma_0}G(x,y)$.

固定 $x\in B_r\setminus(\bar{\Omega}_r\cup E_2)$, 令 $k\to\infty$ 得

$$v(x)=\lim_{k\to\infty}v_{n_k}(x)=0,$$

即

$$v(x)=0,\quad \forall\, x\in B_r\setminus(\bar{\Omega}_r\cup E_2).$$

综上, 我们发现

$$\tilde{u}(x)=v(x),\quad \text{a.e. } x\in B_r.$$

这表明 $\tilde{u}(x)$ 是问题 (1.6) 的唯一强解.

从而完成定理 (1.2) 的证明. □

2.3 弱解

定理 1.3 的证明 由于 $\boldsymbol{F} \in L^2(\Omega_r, \mathbb{R}^n)$, 则 $\tilde{\boldsymbol{F}} \in L^2(B_r, \mathbb{R}^n)$. 由 Lax-Milgram 定理, 问题

$$\begin{cases} \Delta u = \mathrm{div}\boldsymbol{F}, & x \in \Omega_r, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega_r \end{cases} \tag{2.9}$$

存在唯一弱解 $u \in H_0^1(\Omega_r)$; 问题

$$\begin{cases} \Delta v = \mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{F}}, & x \in B_r, \\ v = 0, & x \in \partial B_r \end{cases} \tag{2.10}$$

也存在唯一弱解 $v \in H_0^1(B_r)$ (参见文献 [5, 第 1 章]、[6, 第 8 章] 或 [7, 第 6 章]). 这意味着

$$\int_{\Omega_r} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega_r} \boldsymbol{F} \cdot \nabla \phi \, dx, \quad \forall \, \phi \in H_0^1(\Omega_r) \tag{2.11}$$

和

$$\int_{B_r} \nabla v \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{B_r} \tilde{\boldsymbol{F}} \cdot \nabla \psi \, dx, \quad \forall \, \psi \in H_0^1(B_r). \tag{2.12}$$

又因为 $u \in H_0^1(\Omega_r)$, 由 (1.4) 得 $\tilde{u} \in H_0^1(B_r)$.

必要性 假设 $\tilde{u}(x) \in H_0^1(B_r)$ 是问题 (1.6) 的弱解, 则 $\tilde{u}(x) = v(x) \in H_0^1(B_r)$ 是问题 (2.10) 的唯一弱解.

首先设 $\varphi \in C^2(\bar{\Omega}_r)$ 是 Ω_r 的调和函数, 且满足 $\varphi|_{\Gamma_1} = 0$. 由 Whitney 定理 [9, 10], 可将 φ 从 $\bar{\Omega}_r$ 延拓到 $\bar{B}_r$ 上, 得到 $\tilde{\varphi} \in C^2(\bar{B}_r)$ 且 $\tilde{\varphi}|_{\partial B_r} = 0$. 于是, $\tilde{\varphi}$ 是问题 (2.12) 的一个合格的实验函数. 因此, 我们推出

$$\int_{B_r} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{\varphi} \, dx = \int_{B_r} \tilde{\boldsymbol{F}} \cdot \nabla \tilde{\varphi} \, dx.$$

这蕴含着

$$\int_{\Omega_r} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega_r} \boldsymbol{F} \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

由于 $u \in H_0^1(\Omega_r)$, 我们知

$$\int_{\Omega_r} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = -\int_{\Omega_r} u \Delta \varphi \, dx = 0.$$

于是,

$$\int_{\Omega_r} \boldsymbol{F} \cdot \nabla \varphi \, dx = 0.$$

接下来假设 $\varphi \in C^2(\Omega_r) \cap C^1(\bar{\Omega}_r)$ 是 Ω_r 的调和函数, 且满足 $\varphi|_{\Gamma_1} = 0$. 我们利用一列满足 $\varphi_n|_{\Gamma_1} = 0$ 的光滑函数 $\varphi_n \in C^\infty(\bar{\Omega}_r)$ 逼近 φ 使得

$$\max_{\partial\Omega_r} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + \max_{\partial\Omega_r} |\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi_n(x)| < \frac{1}{n},$$

然后构造一列调和函数 $\phi_n \in C^3(\bar{\Omega}_r)$ 使得

$$\begin{cases} \Delta \phi_n = 0, & x \in \Omega_r, \\ \phi_n = \varphi_n, & x \in \partial\Omega_r. \end{cases}$$

我们知 $\frac{\partial\phi}{\partial x_k}$ $(k=1,\ldots,n)$ 在 Ω_r 是调和函数. 由极值原理有

$$\max_{\bar{\Omega}_r}|\nabla\varphi(x)-\nabla\phi_n(x)|\leqslant\max_{\partial\Omega_r}|\nabla\varphi(x)-\nabla\varphi_n(x)|<\frac{1}{n}.$$

这意味着 $\nabla\phi_n(x)$ 在 $\bar{\Omega}_r$ 上一致收敛到 $\nabla\varphi(x)$. 注意到

$$\int_{\Omega_r}\boldsymbol{F}\cdot\nabla\phi_n\,dx=0,$$

并令 $n\to\infty$, 我们得到

$$\int_{\Omega_r}\boldsymbol{F}\cdot\nabla\varphi\,dx=0,$$

即条件 (1.8).

充分性 现在假设条件 (1.8) 成立.

对于 $\psi\in C_0^\infty(B_r)$, 构造 Ω_r 上的一个调和函数 ϕ 使得其边值与 ψ 相同, 即

$$\begin{cases}\Delta\phi=0, & x\in\Omega_r,\\ \phi=\psi, & x\in\partial\Omega_r.\end{cases}$$

于是, $\phi\in C^2(\bar{\Omega}_r)$ 且 $\psi-\phi\in H_0^1(\Omega_r)$.

由 (2.11) 得

$$\int_{\Omega_r}\nabla u\cdot\nabla(\psi-\phi)\,dx=\int_{\Omega_r}\boldsymbol{F}\cdot\nabla(\psi-\phi)\,dx.$$

这意味着

$$\int_{\Omega_r}\nabla u\cdot\nabla\psi\,dx-\int_{\Omega_r}\nabla u\cdot\nabla\phi\,dx=\int_{\Omega_r}\boldsymbol{F}\cdot\nabla\psi\,dx-\int_{\Omega_r}\boldsymbol{F}\cdot\nabla\phi\,dx.$$

由于 $u\in H_0^1(\Omega_r)$, 我们得

$$\int_{\Omega_r}\nabla u\cdot\nabla\phi\,dx=-\int_{\Omega_r}u\Delta\phi\,dx=0.$$

注意到 $\phi|_{\Gamma_1}=\psi|_{\Gamma_1}=0$ 和条件 (1.8), 我们有

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\nabla\phi\,dx=0.$$

因此,

$$\int_{\Omega_r}\nabla u\cdot\nabla\psi\,dx=\int_{\Omega_r}\boldsymbol{F}\cdot\nabla\psi\,dx,\quad\forall\,\psi\in C_0^\infty(B_r).\tag{2.13}$$

又由于 $u\in H_0^1(\Omega_r)$, 由 (1.4) 得 $\tilde{u}\in H_0^1(B_r)$. 显然,

$$\nabla\tilde{u}=\begin{cases}\nabla u, & \text{a.e. } x\in\Omega_r,\\ 0, & \text{a.e. } x\in B_r\setminus\Omega_r.\end{cases}$$

于是, 从 (2.13) 得到

$$\int_{B_r}\nabla\tilde{u}\cdot\nabla\psi\,dx=\int_{B_r}\tilde{\boldsymbol{F}}\cdot\nabla\psi\,dx,\quad\forall\,\psi\in C_0^\infty(B_r).$$

这蕴含着

$$\int_{B_r}\nabla\tilde{u}\cdot\nabla\psi\,dx=\int_{B_r}\tilde{\boldsymbol{F}}\cdot\nabla\psi\,dx,\quad\forall\,\psi\in H_0^1(B_r).$$

于是, $\tilde{u}\in H_0^1(B_r)$ 是问题 (2.10) 的弱解.

这就完成定理 (1.3) 的证明. □

3 推广

设 $\mathcal{L}=-\frac{\partial}{\partial x_j}(a^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j})$ 是一个一致椭圆算子, 对于 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\mathcal{L}u=f, & x\in\Omega_r,\\ u=0, & x\in\partial\Omega_r\end{cases}$$

的零延拓问题, 我们也能利用同样的方法证明类似定理 1.3 的结论. 一个更为有趣的问题是, 如何把定理 1.3 推广到非线性方程, 如 p-Laplace 方程.

设 $p\in(1,+\infty)$, $q=\frac{p}{p-1}$, $\boldsymbol{F}\in L^q(\Omega_r,\mathbb{R}^n)$, 则 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta_p u=\operatorname{div}\boldsymbol{F}, & x\in\Omega_r,\\ u=0, & x\in\partial\Omega_r\end{cases}\tag{3.1}$$

存在唯一弱解 $u\in W_0^{1,p}(\Omega_r)$, 即等式

$$\int_{\Omega_r}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx=\int_{\Omega_r}\boldsymbol{F}\cdot\nabla\varphi\,dx,\quad \forall\,\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega_r)$$

成立. 设 $\tilde{u},\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_n$ 如 (1.4) 和 (1.3) 定义, 记 $\tilde{\boldsymbol{F}}=(\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_n)$, 则 $\tilde{u}\in W_0^{1,p}(B_r)$ 且 $\tilde{\boldsymbol{F}}\in L^q(B_r,\mathbb{R}^n)$. 一个更为有趣的问题是, 当 $\boldsymbol{F}$ 满足什么条件时, $\tilde{u}$ 是问题

$$\begin{cases}\Delta_p v=\operatorname{div}\tilde{\boldsymbol{F}}, & x\in B_r,\\ v=0, & x\in\partial B_r\end{cases}\tag{3.2}$$

的弱解.

仔细检查定理 1.3 的证明, 我们得到这样的结论.

命题 3.1 设 $\boldsymbol{F}=(f_1,\dots,f_n)\in L^q(\Omega_r;\mathbb{R}^n)$, $u\in W_0^{1,p}(\Omega_r)$ 是问题 (3.1) 的弱解, $\tilde{u},\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_n$ 如 (1.4) 和 (1.3) 定义, 则 $\tilde{u}$ 是问题 (3.2) 的弱解当且仅当对于满足 $\varphi|_{\Gamma_1}=0$ 的任意函数 $\varphi\in C^1(\bar{\Omega}_r)$, 等式

$$\int_{\Omega_r}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-\boldsymbol{F})\cdot\nabla\varphi\,dx=0\tag{3.3}$$

成立.

然而, 由 $\boldsymbol{F}$ 决定的弱解 u 出现在条件 (3.3) 中, 从而使得条件 (3.3) 难以验证. 因此, 更有意义的问题是, 给出一个仅与 $\boldsymbol{F}$ 有关的条件. 但是由于 p-Laplace 算子的非线性, 这个问题变得异常困难.

致谢 本文是在第二作者访问北京计算科学研究中心时完成的. 他感谢北京计算科学研究中心的热情接待.

参考文献

1 Cai Y, Zhou S. Zero extension for Poisson equation. Sci China Math, 2019, doi: 10.1007/s11425-017-9362-5
2 Di Fazio G. L^p estimates for divergence form elliptic equations with discontinuous coefficients. Boll Un Mat Ital A (7), 1996, 10: 409–420
3 DiBenedetto E. Partial Differential Equations. Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 1995
4 John F. Partial Differential Equations, 4th ed. Applied Mathematical Sciences, Vol. 1. New York: Springer-Verlag, 1981

5 Chen Y, Wu L. Second Order Elliptic Equations and Elliptic Systems. Providence: Amer Math Soc, 1998
6 Gilbarg D, Trudinger N. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1998
7 Evans L. Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19. Providence: Amer Math Soc, 1998
8 Adams R A, Fournier J J F. Sobolev Spaces, 2nd ed. Amsterdam: Elsevier/Academic, 2003
9 Fefferman C. A sharp form of Whitney's extension theorem. Ann of Math (2), 2005, 161: 509–577
10 Whitney H. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans Amer Math Soc, 1934, 36: 63–89

Zero extension for Poisson equation near the boundary

Yongyong Cai & Shulin Zhou

Abstract In this paper we present a necessary and sufficient condition to guarantee that the extended function of the solution for Poisson equation by zero extension near the boundary of a domain is still the solution of the corresponding extension problem in the extended domain. We prove the results under the frameworks of classical solutions, strong solutions and weak solutions.

Keywords **Poisson equation, zero extension, boundary**

MSC(2010) **35J05, 35J25**

doi: 10.1360/SCM-2018-0753