

斜压 Rossby 波稳定性的线性与非线性问题

刘 式 适 刘 式 达

(北京大学地球物理系)

摘 要

本文从描写非线性斜压 Rossby 波的准地转两层模式的方程组出发, 利用分岔 (bifurcation) 理论, 建立了斜压 Rossby 波稳定性的简单模型, 找到了它的控制参数, 并对经典的斜压 Rossby 波的稳定性的某些结论作出评价。

一、引 言

早在 1946 年, 我国气象学家赵九章^[1]就提出了斜压不稳定问题。随后, Charney^[2] (1947) 和 Eady^[3] (1949) 作了更为明确的论述, 他们都认为中纬度大气中出现的波动, 是纬向气流斜压不稳定的结果。1954 年 Phillips^[4] 考虑了 β 的作用, 应用简单的斜压两层模式, 讨论了 Rossby 波斜压不稳定问题。研究指出: Rossby 波斜压不稳定的必要条件是:

$$k^2 < 2\mu^2, \quad (1)$$

充分条件为:

$$\bar{u}_s > \bar{u}_c \equiv \frac{\beta\mu^2}{k^2\sqrt{4\mu^4 - k^4}}. \quad (2)$$

而且不稳定波高层流场的振幅比低层大, 但位相较低层落后, 而在中层温度场位相落后于流场。这种不稳定波的结构有利于有效位能的释放, 也较符合实际。不过, 这些研究都是线性的, 它只能描写扰动演变的初始阶段。随着时间的推移, 伴随振幅的增加, 必须要考虑非线性的作用。自 1970 年开始, Pedlosky^[5-8] 用多尺度方法论述了非线性 Rossby 波的稳定度问题。他指出, 非线性作用不改变高低层的结构, 但限制了振幅的无限增长, 并最终导致振幅停止增长。

本文在我们早先工作^[9,10]的基础上, 研究斜压 Rossby 波稳定性。它既包含了线性斜压 Rossby 波稳定性的某些结论, 又反映了有限振幅 Rossby 波的某些特色。

二、基本方程组

应用描写斜压大气运动最简洁的准地转两层模式, 方程组可以表为:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{f_0}{2\Delta p} \omega_2, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \phi_3}{\partial x} = -\frac{f_0}{2\Delta p} \omega_2, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_1 - \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_3 = \frac{c_a^2}{2f_0\Delta p} \omega_2, \end{cases} \quad (3)$$

这里未考虑 $\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}$ 项。且准地转涡度仅取了 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ 。如取为 $\nabla^2 \phi$ ，则以下结果的 k^2 用 $k^2 + l^2$ 来代替。在(3)式中 f_0, β 分别为 Coriolis 参数和 Rossby 参数，均取为常数； c_a 为重力内波的特征速度，也取为常数。 $\Delta p = 250 \text{ mb}$ ， ϕ 为准地转流函数， ω 为垂直 p 速度。下标 1, 2, 3 分别表示 250mb, 500mb, 750mb 等压面上的特征。

(3) 式中第三式分别与第一式、第二式联立，消去 ω_2 得到

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \mu^2 \phi_3 \right) - \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_1 + \beta \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} + \mu^2 \phi_1 \right) - \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_3 + \beta \frac{\partial \phi_3}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\mu = \frac{f_0}{c_a}, \quad (5)$$

μ^{-1} 是斜压 Rossby 变形半径。

令(4)式的解为：

$$\phi_1 = -\bar{u}_1 y + \Psi_1(\theta), \quad \phi_3 = -\bar{u}_3 y + \Psi_3(\theta) \quad (\theta = kx + ly - \sigma t), \quad (6)$$

其中 $\bar{u}_1, \bar{u}_3$ 分别为 250mb, 750mb 等压面上的基本西风，取为常数。 k, l 分别是 x, y 方向上的波数， σ 为圆频率。

将(6)式代入(4)式，得到

$$\begin{cases} (\bar{u}_1 + U_1 - c)(k^2 U_1'' + \mu^2 U_3) - \mu^2(\bar{u}_3 + U_3 - c)U_1 + \beta U_1 = 0, \\ (\bar{u}_3 + U_3 - c)(k^2 U_3'' + \mu^2 U_1) - \mu^2(\bar{u}_1 + U_1 - c)U_3 + \beta U_3 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

其中“'”表示对 θ 的导数，且

$$U_1 \equiv -l\Psi_1', \quad U_3 \equiv -l\Psi_3', \quad (8)$$

而

$$c \equiv \frac{\sigma}{k} \quad (9)$$

表 x 方向的波速。

在 $\bar{u}_1 + U_1 - c \approx 0, \bar{u}_3 + U_3 - c \approx 0$ 的条件下，(7)式可改写为：

$$\begin{cases} U_1'' = \frac{[\mu^2(\bar{u}_3 - c) - \beta]U_1 - \mu^2(\bar{u}_1 - c)U_3}{k^2(\bar{u}_1 + U_1 - c)} \equiv F(U_1, U_3), \\ U_3'' = \frac{-\mu^2(\bar{u}_3 - c)U_1 + [\mu^2(\bar{u}_1 - c) - \beta]U_3}{k^2(\bar{u}_3 + U_3 - c)} \equiv G(U_1, U_3), \end{cases} \quad (10)$$

其中 $F(U_1, U_3)$, $G(U_1, U_3)$ 是 U_1, U_3 的非线性函数.

使 U_1', U_3' 为零的平衡点为 $(U_1, U_3) = (0, 0)$. 将 F, G 在平衡点附近作 Taylor 展开, 有

$$\begin{cases} F(U_1, U_3) = -a^2 U_1 - r^2 U_3 + \frac{a^2}{\bar{u}_1 - c} U_1^2 + \frac{r^2}{\bar{u}_1 - c} U_1 U_3 + \cdots, \\ G(U_1, U_3) = -r^2 U_1 - b^2 U_3 + \frac{r^2}{\bar{u}_3 - c} U_1 U_3 + \frac{b^2}{\bar{u}_3 - c} U_3^2 + \cdots, \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\begin{cases} r^2 = \frac{\mu^2}{k^2}, \\ a^2 = \frac{\beta - \mu^2(\bar{u}_3 - c)}{k^2(\bar{u}_1 - c)} = \frac{\beta}{k^2(\bar{u} - c)} - r^2 \cdot \frac{\bar{u}_3 - c}{\bar{u}_1 - c}, \\ b^2 = \frac{\beta - \mu^2(\bar{u}_1 - c)}{k^2(\bar{u}_3 - c)} = \frac{\beta}{k^2(\bar{u}_3 - c)} - r^2 \cdot \frac{\bar{u}_1 - c}{\bar{u}_3 - c}. \end{cases} \quad (12)$$

对(11)式取一次项, 代入(10)式就是我们讨论线性斜压 Rossby 波的基本方程. (11)式取到二次项, 代入(10)式就是我们讨论非线性有限振幅 Rossby 波的基本方程.

三、线性稳定度

(11)式的右端只取线性部分, 分别代替 F 和 G , 则(10)式化为:

$$\begin{cases} U_1'' + a^2 U_1 = -r^2 U_3, \\ U_3'' + b^2 U_3 = -r^2 U_1. \end{cases} \quad (13)$$

(13)式类似于力学中两个自由度的自由振动微分方程组^[11]. r^2 反映高低层的相互作用. 当层结非常稳定, 以致 $r^2 \rightarrow 0$, 则(13)式退化为高低层没有关系的振动方程, r^2 可称为耦合强迫参数^[12]. 在线性条件下, 谢义炳教授就斜压行星波的存在范围及稳定度作了较详细的讨论.

(13) 式有一个平衡点 O :

$$(U_1, U_3) = (0, 0), \quad (14)$$

引入方程组(13)的位势函数

$$\begin{aligned} P(U_1, U_3) &= - \int (-a^2 U_1 - r^2 U_3) dU_1 - \int (-b^2 U_3 - r^2 U_1) dU_3 \\ &= \frac{1}{2} (a^2 U_1^2 + 2r^2 U_1 U_3 + b^2 U_3^2) + C, \end{aligned} \quad (15)$$

C 为积分常数. 由上式有

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial U_1} = a^2 U_1 + r^2 U_3, & \frac{\partial P}{\partial U_3} = r^2 U_1 + b^2 U_3, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial U_1^2} = a^2, & \frac{\partial^2 P}{\partial U_1 \partial U_3} = r^2, & \frac{\partial^2 P}{\partial U_3^2} = b^2, \end{cases} \quad (16)$$

由此可见, 平衡点 O 是位势函数(15)的驻点, 且当 $a^2 b^2 - r^4 > 0$, $a^2 > 0$, $b^2 > 0$ 时, 该点是极小值点, 而当 $a^2 b^2 - r^4 > 0$, $a^2 < 0$, $b^2 < 0$ 时, 该点是极大值点; 当 $a^2 b^2 - r^4 < 0$ 时, 在

该点无极值;当 $a^2b^2 - \gamma^4 = 0$ 时,无法判断极值

鉴于上述分析,为清晰起见,令

$$W_1 = U'_1, \quad W_3 = U'_3, \quad (17)$$

则(13)式化为下列一阶自治系统的常微分方程组

$$\begin{cases} W'_1 = -a^2U_1 - \gamma^2U_3, \\ U'_1 = W_1, \\ W'_3 = -\gamma^2U_1 - b^2U_3, \\ U'_3 = W_3 \end{cases} \quad (18)$$

在平衡点 O 的特征方程为:

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & 0 & 0 \\ -a^2 & 0 - \lambda & -\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 - \lambda & 1 \\ -\gamma^2 & 0 & -b^2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (19)$$

展开后,得

$$\lambda^4 + p\lambda^2 + q = 0, \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} p &\equiv a^2 + b^2 = -\frac{2\mu^2(c - c_1)(c - c_2)}{k^2(\bar{u}_1 - c)(\bar{u}_3 - c)}, \\ q &\equiv a^2b^2 - \gamma^4 = \frac{2\beta\mu^2(c - c_0)}{k^4(\bar{u}_1 - c)(\bar{u}_3 - c)}. \end{aligned} \quad (21)$$

这里

$$\begin{cases} c_0 = \bar{u}_2 - \frac{\beta}{2\mu^2}, & \bar{u}_2 = \frac{1}{2}(\bar{u}_1 + \bar{u}_3), & \bar{u}_s = \frac{1}{2}(\bar{u}_1 - \bar{u}_3), \\ c_1 = c_0 + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu^2}\right)^2 - \bar{u}_s^2}, \\ c_2 = c_0 - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu^2}\right)^2 - \bar{u}_s^2}, \end{cases} \quad \bar{u}_s < \frac{\beta}{2\mu^2}, \quad (22)$$

c_0 可视为超长波波速.

准二次代数方程(20)的根,满足

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{\Delta}), \quad (23)$$

其中

$$\Delta \equiv p^2 - 4q = (a^2 - b^2)^2 + 4\gamma^4 > 0, \quad (24)$$

且四个根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 之间有关系

$$\lambda_{1,2}^2 + \lambda_{3,4}^2 = -p, \quad \lambda_{1,2}^2 \cdot \lambda_{3,4}^2 = q. \quad (25)$$

注意,对于中高纬度大气的通常情况,有

$$\bar{u}_1 - c > 0, \quad \bar{u}_3 - c < 0, \quad (26)$$

则根据常微分方程的稳定性理论,我们看到如下两种情况

1. $q < 0$

此时, λ^2 一正一负, 即 λ 一组是共轭纯虚根, 另一组是两实根. 尽管此时依(16)式, O 点不是极值点, 但该点是不稳定的. 由(21), (22)和(26)式知, 此时

$$c > c_0. \quad (27)$$

2. $q > 0$

1) 在 $p > 0$ 的条件下, λ^2 两负, 即 λ 是两组共轭纯虚根. 此时, O 点是位势函数(15)式的极小点, 因而是稳定的. 由(21)和(26)式知, 此时,

$$c < c_0 \quad (28)$$

和

$$c > c_1 \text{ 或 } c < c_2. \quad (29)$$

上两式结合起来, 有

$$c < c_2, \quad (30)$$

这是稳定的斜压 Rossby 波的相速限制.

2) 在 $p < 0$ 的条件下, λ^2 两正, 即 λ 是两组实根. 此时, O 点是位势函数(15)式的极大点. 因而不稳定的, 则由(21)和(26)式知, 此时

$$c < c_0 \quad (31)$$

和

$$c_2 < c < c_1. \quad (32)$$

上两式结合起来, 有

$$c_2 < c < c_0. \quad (33)$$

(27)和(33)式结合起来, 又有

$$c > c_2. \quad (34)$$

这是不稳定的斜压 Rossby 波的相速要求.

综上所述, 若以 p 作为横坐标, q 作为纵坐标, 则参数平面 (p, q) 将平衡点的稳定性分成几个区域, 见图 1.

由图 1 可知, 参数 p 由负变到正时, 当 $q > 0$ 时, 在 $p = 0$ 处发生 Hopf 分岔; 而参数 q 由负变到正时, 当 $p > 0$ 时, 在 $q = 0$ 处发生鞍一结点分岔.

下面, 我们说明: 当 $\lambda_{1,2}^2 = -1$ 时, (20)式就是传统的斜压 Rossby 波稳定度两层模式理论的波速方程. 因此时, 相当于方程组(13)或(18)有 $e^{i\theta}$ 形式的解. 以 $\lambda_{1,2}^2 = -1$ 代入(20)式得到

$$1 - p + q = 0 \quad (35)$$

或

$$1 - (a^2 + b^2) + (a^2 b^2 - \gamma^4) = 0, \quad (36)$$

(12)式代入到(36)式, 整理得到

$$\begin{aligned} k^2(k^2 + 2\mu^2)c^2 + [2\beta(k^2 + \mu^2) - k^2(k^2 + 2\mu^2)(\bar{u}_1 + \bar{u}_3)]c \\ + [k^4\bar{u}_1\bar{u}_3 + \beta^2 - \beta(k^2 + \mu^2)(\bar{u}_1 + \bar{u}_3) + k^2\mu^2(\bar{u}_1^2 + \bar{u}_3^2)] = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

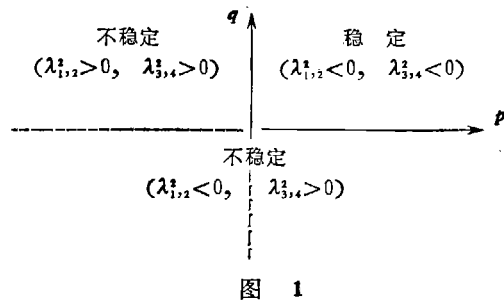


图 1

这就是传统斜压不稳定两层模式的理论关于 c 的方程。由上式解得

$$c = \bar{u}_2 - \frac{\beta(k^2 + \mu^2)}{k^2(k^2 + 2\mu^2)} \pm \sqrt{\delta}, \quad \delta = \frac{\beta^2 \mu^4}{k^2(k^2 + 2\mu^2)} - \frac{\bar{u}_2^2(2\mu^2 - k^2)}{k^2 + 2\mu^2}. \quad (38)$$

此时,若设(13)式有特解

$$U_1 = A_1 e^{i\theta}, \quad U_3 = A_3 e^{i\theta}, \quad (39)$$

则得到

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{\gamma^2}{1 - a^2} = \frac{1 - b^2}{\gamma^2}, \quad (40)$$

在不稳定时,求得

$$A_1 = r A_3 e^{i\alpha}, \quad (41)$$

其中

$$r = \sqrt{\frac{2\bar{u}_2 + \frac{\beta}{k^2}}{2\bar{u}_2 - \frac{\beta}{k^2}}} > 1, \quad \tan \alpha = \frac{k^2 + 2\mu^2}{k^2} \cdot \frac{c_i}{\bar{u}_2}, \quad (42)$$

$$c_i = \sqrt{-\delta}$$

这就解释了不稳定的斜压行星波高层波振幅大于低层波振幅以及高层波位相落后于低层波位相的天气事实。

四、非线性稳定度

(11)式的右端若取到二次项代替 F 和 G , 则(10)式化为:

$$\begin{cases} U_1'' + a^2 \left(1 - \frac{U_1}{\bar{u}_1 - c}\right) U_1 = -\gamma^2 \left(1 - \frac{U_1}{\bar{u}_1 - c}\right) U_3 \\ U_3'' + b^2 \left(1 - \frac{U_3}{\bar{u}_3 - c}\right) U_3 = -\gamma^2 \left(1 - \frac{U_3}{\bar{u}_3 - c}\right) U_1, \end{cases} \quad (43)$$

比较(43)与(13)式可知,(13)式中 a^2, b^2 分别被 $a^2 \left(1 - \frac{U_1}{\bar{u}_1 - c}\right), b^2 \left(1 - \frac{U_3}{\bar{u}_3 - c}\right)$ 所代替;而且,(43)式的非线性项分别为:

$$\begin{cases} X(U_1, U_3) = \frac{U_1}{\bar{u}_1 - c} (a^2 U_1 + \gamma^2 U_3), \\ Y(U_1, U_3) = \frac{U_3}{\bar{u}_3 - c} (\gamma^2 U_1 + b^2 U_3). \end{cases} \quad (44)$$

这样,(43)式可改写为:

$$\begin{cases} U_1'' = -a^2 U_1 - \gamma^2 U_3 + X(U_1, U_3), \\ U_3'' = -\gamma^2 U_1 - b^2 U_3 + Y(U_1, U_3). \end{cases} \quad (45)$$

(43)或(45)式除有平衡点 O ((14)式)外,还有另一平衡点 A :

$$(U_1, U_3) = (\bar{u}_1 - c; \bar{u}_3 - c). \quad (46)$$

在 O 点,固有

$$X = Y = \frac{\partial X}{\partial U_1} = \frac{\partial X}{\partial U_3} = \frac{\partial Y}{\partial U_1} = \frac{\partial Y}{\partial U_3} = 0, \quad (47)$$

则按 Poincare-Bendixson 理论^[33], (43)或(45)式在平衡点 O 附近的定性特性与(13)式的一致。

进一步, 若令

$$\begin{cases} a_1^2 \equiv a^2 \left(1 - \frac{U_1}{\bar{u}_1 - c}\right), & b_3^2 \equiv b^2 \left(1 - \frac{U_3}{\bar{u}_3 - c}\right), \\ \gamma_1^2 \equiv \gamma^2 \left(1 - \frac{U_1}{\bar{u}_1 - c}\right), & \gamma_3^2 \equiv \gamma^2 \left(1 - \frac{U_3}{\bar{u}_3 - c}\right), \end{cases} \quad (48)$$

则(43)或(45)式化为:

$$\begin{cases} U_1'' + a_1^2 U_1 = -\gamma_1^2 U_3, \\ U_3'' + b_3^2 U_3 = -\gamma_3^2 U_1, \end{cases} \quad (49)$$

(49)式在形式上与(13)式相似。

若在(48)式中, U_1, U_3 分别用 $\bar{u}_1, \bar{u}_3$ 去近似, 且注意(26)式, 不难发现

$$a_1^2 < a^2, \quad b_3^2 > b^2, \quad \gamma_1^2 < \gamma^2, \quad \gamma_3^2 > \gamma^2, \quad (50)$$

这样, 仿(39)式, 设

$$U_1 = A_1^* e^{i\theta}, \quad U_3 = A_3^* e^{i\theta}, \quad (51)$$

代入(49)式得到

$$\frac{A_1^*}{A_3^*} = \frac{\gamma_1^2}{1 - a_1^2} = \frac{1 - b_3^2}{\gamma_3^2}, \quad (52)$$

(52)与(40)式比较, 注意(50)式即知,

$$\frac{A_1^*}{A_3^*} < \frac{A_1}{A_3}. \quad (53)$$

由此得到结论, 非线性的作用使得高低层波幅比减小。

对于平衡点 A , 若写(43)或(45)式为:

$$\begin{cases} W_1' = -a^2 \left(1 - \frac{U_1}{\bar{u}_1 - c}\right) U_1 - \gamma^2 \left(1 - \frac{U_1}{\bar{u}_1 - c}\right) U_3, \\ U_1' = W_1, \\ W_3' = -\gamma^2 \left(1 - \frac{U_3}{\bar{u}_3 - c}\right) U_1 - b^2 \left(1 - \frac{U_3}{\bar{u}_3 - c}\right) U_3, \\ U_3' = W_3, \end{cases} \quad (54)$$

则在平衡点 A 的特征方程为:

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & b^2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (55)$$

展开后得

$$(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2) = 0, \quad (56)$$

因而

$$\lambda_{1,2}^2 = a^2, \quad \lambda_{3,4}^2 = b^2. \quad (57)$$

但由(12)式,在(26)式的条件下,恒有 $a^2 > 0$, 它说明(56)式的根为 λ^2 一正一负或两正。这样

不论 p, q 值如何,平衡点 A 都是不稳定的。

为了比较平衡点 A 和 O 的稳定性,我们把(56)式改写为:

$$\lambda^4 - p\lambda^2 + (q + r^4) = 0. \quad (58)$$

(58)与(20)式比较知,在 $q > 0$ 的条件下,当 $p > 0$ 时, O

点是稳定的,但 A 点是不稳定的,其示意图见图 2。

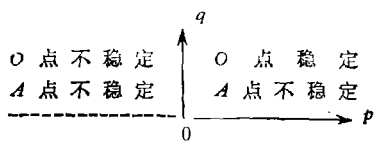


图 2

五、结 论

我们讨论了两层纯斜压的线性和非线性 Rossby 波的稳定性,分析了它在平衡点附近的特征。它由参数 p 和 q 两者所决定。探讨非线性稳定性可以有很多方法,本文的途径只是其中之一。本文的工作是初步的。许多工作尚待进一步研究,如(43)式的求解。更多的工作有待力学、数学、海洋和气象工作者跨出自己学科的界限去共同研究。

参 考 文 献

- [1] Jaw, J. J. (赵九章), *J. Met.*, 3(1946), 103—114.
- [2] Charney, J. G., *ibid.*, 4(1947), 125—162.
- [3] Eady, E. T., *Tellus*, 1(1949), 33—52.
- [4] Phillips, N. A., *ibid.*, 6(1954), 273—286.
- [5] Pedlosky, J., *J. Atmos. Sci.*, 27(1970), 15—30.
- [6] ———, *ibid.*, 28(1971), 587—597.
- [7] ———, *ibid.*, 29(1972), 53—63.
- [8] ———, Frenzen, C., *J. Atmos. Sci.*, 37(1980), 1177—1196.
- [9] 刘式达、刘式适, *气象学报*, 40(1982), 279—288.
- [10] ———, *中国科学 B 辑*, 1982, 4: 372—384.
- [11] 洛强斯基等, *理论力学教程*, 下册, 第二分册, 人民教育出版社, 1958.
- [12] 谢义炳, *气象学报*, 39(1981), 44—54.
- [13] 秦元勋, *运动稳定性理论和应用*, 科学出版社, 1964.