



二维 Keller-Segel 系统的平均场控制问题

献给肖玲教授 85 寿辰

王昭¹, 王宇澄², 陈丽^{2*}

1. 长春工业大学数学与统计学院, 长春 130012;

2. School of Business Informatics and Mathematics, University of Mannheim, Mannheim 68159, Germany

E-mail: wangzhao@ccut.edu.cn, yucheng.wang@uni-mannheim.de, chen@math.uni-mannheim.de

收稿日期: 2024-01-11; 接受日期: 2024-03-19; 网络出版日期: 2024-04-17; * 通信作者

摘要 本文利用平均场极限理论得到带有随机效应的粒子相互作用系统的最优控制收敛于 Keller-Segel 系统的最优控制, 其中功效泛函具有相似的结构且包含平均场作用项. 首先, 为克服 Poisson 方程基本解的奇性, 引入相对熵方法及依概率收敛得到粒子系统的解收敛于 Keller-Segel 系统的解; 其次, 结合容许控制函数空间的紧性得到功效泛函的平均场极限结果; 最后, 利用二维 Keller-Segel 系统的最优控制的存在性结合 Γ -收敛技术观点, 得到最优控制的平均场极限结果.

关键词 平均场控制 偏微分方程最优控制 相对熵方法 平均场极限 依概率收敛

MSC (2020) 主题分类 35Q93, 60F17, 82C22, 60B10

1 引言

近年来, 粒子相互作用模型的分析以及其最优控制问题得到广泛关注, 相关的领域涉及从统计力学到生物学, 从群体动力学到经济金融现象等研究方向. 由于个体与个体之间的作用关系, 群体效应得以实现, 如鸟的迁徙, 器官的形成等. 随着个体数量的不断增加, 如细菌数以亿计的数量, 使得研究全部个体的系统变得异常困难. 目前的研究方法主要是借助统计力学中的平均场思想, 即通过利用单一个体与群体平均效应之间的作用关系代替个体间的作用, 当个体数量无限大后, 粒子系统近似于连续动力学系统, 进而研究群体效应.

关于平均场极限的数学研究最初集中在整体 Lipschitz 连续的作用力情形下 (参见文献 [22,30,37]), 而在很多具有丰富背景的数学模型中粒子之间的相互作用力往往不具有连续性, 甚至有时只有一定的可积性. 由于近年来这一领域引起了应用数学家的广泛兴趣并发表了大量文章, 本文没有完全回顾所有的研究成果, 而是仅对与本文研究课题相近的部分工作给出陈述. 对于一般的 L^p 相互作用力, 文献 [8] 给出了有界周期区域上的一阶和二阶模型的极限结果, 文献 [20, 21, 26] 基于不同的奇性给出了

英文引用格式: Wang Z, Wang Y C, Chen L. The mean field control problem for the two-dimensional Keller-Segel system (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 703–734, doi: 10.1360/SSM-2024-0010

全空间上的结果. 同时文献 [28] 引入了一种新的思路, 从而推导出了概率意义下的平均场极限, 此方法的特点是利用小参数截断处理不光滑作用力, 然后从截断后的粒子系统出发作研究. 更一般地, 文献 [31, 36] 在没有白噪声的情形下, 处理了具有库仑势的没有随机效应的方程. 文献 [9, 24, 34] 处理了具有随机效应的方程的结果. 此类文献中引入的调整自由能对于处理库仑势起到了关键作用. 特别地, 它给出了经验测度的弱收敛性 (参见文献 [34]). 但调整自由能方法与相对熵相结合的方法有其不足之处, 即其需要对极限非局部的偏微问题的解施加严格的条件, 由此导致了对问题的初值施加严格的条件. 事实上 Oelschläger^[32, 33] 在 20 世纪 80 年代在用温和排斥作用系统导出多孔介质扩散方程方面作出了一系列贡献. 特别地, 在文献 [33] 中的估计中, 温和排斥项对于导出 L^2 估计起到了至关重要的作用. 文献 [23] 指出在依赖于依概率收敛的假设下, 可以得到带有吸引势的温和相互作用. 文献 [13] 阐述了一种新的思路, 即通过直接引用文献 [33] 的估计得到了相对熵与 L^2 正则性估计的联系. 此方法给出了完成相对熵估计的另一个新的启示.

在此平均场的框架下, 最优控制问题的研究应运而生. 引入控制的主要目的是保证群体效应的稳定, 由于粒子或个体数量极其庞大, 导致群体的整体协调以及模式生成难以保证, 因此相对有效的方式是对于其中一些个体施加一定的干预最终保证群体效应. 平均场控制问题, 即当群体数量极其庞大时, 利用群体的平均场极限能够大大降低群体数量带来的维数灾难的特性, 将有限维的相互作用粒子问题转化为研究其平均场逼近的无限维动力学系统问题, 进而得到有限维的相互作用个体问题的最优控制收敛于无限维动力学系统的最优控制的性质. 而平均场控制问题近几年才慢慢引起应用数学家的关注. 对于确定性的粒子系统, 文献 [19] 首先引入平均场控制概念, 并结合 Γ -收敛及容许控制空间的相关假设, 给出二阶动力学方程的最优控制为粒子相互作用问题的最优控制的平均场极限. 在此基础上, 文献 [18] 给出了一阶方程的相应结果, 文献 [11] 给出了不同形式下平均场控制的等价性结果, 文献 [12] 研究了各粒子之间距离加以限制的平均场极限结果, 文献 [10] 给出了环上的粒子系统的平均场控制收敛于 Fokker-Planck 方程的最优控制, 然而以上粒子系统中的相互作用力均为无奇性的势. 带有随机效应的粒子问题研究大多关注于 McKean-Vlasov 方程的最优控制问题, 文献 [25] 利用鞅问题给出了平均场极限的松弛控制证明, 文献 [14, 16] 将文献 [25] 的结果推广到一般随机扰动. 另有利用最大值原理^[1-3] 或利用动态规划方法研究概率空间的 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程^[4, 15] 等. 除此之外, 文献 [27] 引入了平均场博弈的概念处理相互独立的个体完成各自的最优控制目标后的 Nash 均衡问题, 文献 [5] 重点研究了刻画控制的最优方程的计算, 文献 [11] 给出了带有随机效用的非局部输运方程的平均场控制极限结果.

本文致力于研究具有奇性的一阶粒子系统的平均场控制问题. 特别地, 本文研究一类二维情形用 Poisson 方程基本解作为相互作用势的模型, 它的平均场极限方程是生物趋化模型中比较典型的 Keller-Segel 方程组. 这个方程组在偏微分方程层面具有鲜明的特点, 解的整体存在或爆破完全取决于初始质量 (参见文献 [6, 17]). 本文致力于研究这类问题的最优控制问题, 对于近年来 Keller-Segel 方程组的解的适定性问题方面的研究成果不给予详细回顾. 而对于 Keller-Segel 方程组仅有的最优控制问题的研究^[7, 35] 都是集中在有界区域上的初边值问题. 据我们能够查到的文献看, 对于平均场极限的控制问题, 目前还没有任何关于奇异势的工作. 本文计划在 Keller-Segel 方程组的解整体存在的情形下, 即次临界情形, 来得到平均场控制问题的结果. 本文的主要技术难点在于如何克服相互作用力的奇性以及如何分析控制项所需要的紧性. 在 Keller-Segel 方程组的解的理论方面借鉴文献 [6] 在次临界情形的先验估计思想. 在平均场极限方面借鉴温和和作用势的技巧推导出了依概率收敛, 进而与相对熵方法相结合, 避免计算烦琐的 L^2 估计, 得到了平均场极限在强 L^1 范数下的收敛. 这方面的技巧还未在现有文献中出现过. 整个过程中, 还要克服控制项带来的额外困难, 具体见下文功效泛函关于控制序列的紧

性讨论.

1.1 在偏微分方程层面控制问题的提法

本文考虑如下二维 Keller-Segel 方程组控制问题的平均场推导:

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \Delta \rho - \nabla \cdot (\rho \chi \nabla c), \\ -\Delta c = \rho - f, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, ρ 表示细胞密度, c 表示物质浓度. 受文献 [19] 的启发, 本文考虑如下的容许控制函数空间:

$$X = \{f(K) \mid K \text{ 是 } \mathbb{R}^2 \text{ 中的紧集, } \|f\|_{W^{1,q}(K)} \leq l(t), l(t) \in L^p(0, T), \text{ 其中 } q > 2, p \geq 8\}. \quad (1.2)$$

另外, 方程 (1.1)₂ 可以表示为如下的等价形式:

$$c = \Phi * (\rho - f) = \frac{1}{2\pi} \ln |x| * (\rho - f),$$

其中函数 Φ 是 Poisson 方程的基本解. 对于方程 (1.1), 考虑其 Cauchy 问题, 取初值满足如下条件:

$$0 \leq \rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^2, (1 + |x|^2)dx) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\mathbb{R}^2} \rho_0 \log \rho_0 dx < \infty, \quad \nabla \rho_0 \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad \rho_0 < \frac{8\pi}{\chi}. \quad (1.3)$$

为简单起见, 本文应用符号 L^p 和 $W^{k,q}$ 来代替空间变量的空间, 如 $W^{k,p} := W^{k,p}(\mathbb{R}^2)$ 或者 $W^{k,p}(\mathbb{R}^{2N})$, $L^p((0, T); L^q) := L^p((0, T); L^q(\mathbb{R}^2))$ 或者 $L^p((0, T); L^q(\mathbb{R}^{2N}))$.

通过方程 (1.1) 的散度结构, 如下的质量守恒是显而易见的:

$$M := \int_{\mathbb{R}^2} \rho_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, t) dx. \quad (1.4)$$

由于本文主要考虑方程的解是概率密度函数, 因此不妨设 $M = 1$. 记

$$C_0 := \| |x| \sqrt{\rho_0} \|_{L^2}^2 + \|\rho_0 \log \rho_0\|_{L^1} + \|\nabla \rho_0\|_{L^2}^2.$$

对于上述的偏微分方程 (1.1), 在给定 f 的情形下, 首先记 $\rho[f] \in L^r((0, T); L^\infty)$ (这个解的存在性会在下文中证明) 为由给定的 f 解得的问题 (1.1) 的解, 由此对于任意给定的目标密度函数 $z \in L^r((0, T); L^1 \cap L^\infty)$, 考虑如下的功效泛函 (主要思想是施加最小的控制函数 f 以得到最接近目标函数 z 的满足方程的解 ρ):

$$J(f) = \|\rho[f] - z\|_{L^r((0, T); L^\infty)}^r + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} f \rho[f] dx dt,$$

其中 $r \in [1, 2)$.

本文目标是证明功效泛函极小子的存在性, 即证明存在一个 $\bar{f}$ 使得

$$J(\bar{f}) = \min_{f \in X} J(f).$$

1.2 在微观层面粒子模型控制问题的提法

由于 Φ 的奇性, 我们引入如下光滑化的相互作用势:

$$\tilde{\Phi} = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, & |x| > 2\varepsilon, \\ -\frac{1}{4\pi\varepsilon} |x| + \frac{1}{2\pi} (1 - \ln 2\varepsilon), & |x| \leq 2\varepsilon, \end{cases} \quad \tilde{\Phi}_\varepsilon = j_\varepsilon * \tilde{\Phi}, \quad (1.5)$$

其中 j_ε 是任意给定的磨光核函数. 如上的光滑化包括截断和磨光两步, 这么做的好处是可以清晰地计算出关于 $\tilde{\Phi}_\varepsilon$ 的各个范数与 ε 的依赖关系.

本文所考虑的 N 粒子方程为

$$\begin{cases} dX_i^{N,\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(X_i^{N,\varepsilon} - X_j^{N,\varepsilon}) dt + \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * f(X_i^{N,\varepsilon}) dt + \sqrt{2} dW_t^i, \\ X_i^N(0) = \xi_i \text{ 独立同分布, } \rho_0 \text{ 是 } \xi_i \text{ 的概率密度函数.} \end{cases} \quad (1.6)$$

不失一般性, 记 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ 为上述问题提法中所需要的概率空间. 初值 ξ_i 为独立同分布的随机变量, Brown 运动 W_t^i 独立同分布且与初值不相关. 由经典的随机微分方程理论可知上述问题的平方可积强解是存在的. 对于上述粒子模型, 记 $\mu_N[f] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^{N,\varepsilon}$ 为此随机微分方程解的经验测度. 在给定 f 的情形下, 考虑如下的功效泛函:

$$J_N(f) = \int_0^T (\mathbb{E}(\|j_\varepsilon * \mu_N[f] - z\|_{L^\infty}^r)) dt + \mathbb{E} \left(\int_0^T \langle f, \mu_N[f] \rangle dt \right), \quad (1.7)$$

其中 z 是之前给出的目标函数. 假设 $\rho^{N,\varepsilon}(\cdot, t)$ 是 $(X_1^{N,\varepsilon}(t), X_2^{N,\varepsilon}(t), \dots, X_N^{N,\varepsilon}(t))$ 的联合分布函数, 根据 Itô 公式可知 $\rho^{N,\varepsilon}(\cdot, t)$ 满足如下的线性偏微分方程:

$$\begin{cases} \partial_t \rho^{N,\varepsilon} - \sum_{i=1}^N \Delta_{x_i} \rho^{N,\varepsilon} + \sum_{i=1}^N \nabla_{x_i} \left(\rho^{N,\varepsilon} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(x_i - x_j) - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * f(x_i) \right) \right) = 0, \\ \rho^{N,\varepsilon}|_{t=0} = \rho_0^{\otimes N} = \rho_0(x_1) \rho_0(x_2) \cdots \rho_0(x_n). \end{cases} \quad (1.8)$$

设 $\rho^{N,k}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) 为 $\rho^{N,\varepsilon}$ 的 k 粒子边缘密度, 即

$$\rho^{N,k}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{2(N-k)}} \rho^{N,\varepsilon}(x_1, \dots, x_N, t) dx_{k+1} \cdots dx_N.$$

显然 $\rho^{N,1}$ 满足如下的方程:

$$\partial_t \rho^{N,1} - \Delta \rho^{N,1} + \nabla \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \rho^{N,2}(x, y) (\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(x - y) - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * f(x)) dy = 0. \quad (1.9)$$

通过方程 (1.8) 的结构可知 $\rho^{N,\varepsilon}(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ 关于空间变量是对称的, 故

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_0^T \langle f, \mu_N[f] \rangle dt \right) &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i, t) \rho^{N,\varepsilon}(x_1, x_2, \dots, x_N, t) dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} f(x, t) \rho^{N,1}(x, t) dx dt, \end{aligned}$$

所以功效泛函 $J_N(f)$ 还可以表示为

$$J_N(f) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} \|j_\varepsilon * \mu_N[f] - z\|_{L^\infty}^r \rho^{N,\varepsilon}[f] dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} f \rho^{N,1}[f] dx dt. \quad (1.10)$$

对于这个粒子模型的最优控制问题, 本文将证明它的极小化子存在, 即存在一个 $\tilde{f} \in X$ 使得

$$J_N(\tilde{f}) = \min_{f \in X} J_N(f).$$

为了建立 Keller-Segel 方程组 (1.1) 和粒子系统 (1.6) 之间的联系, 还需要引入如下的光滑化的偏微分方程问题:

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\varepsilon - \Delta \rho^\varepsilon = \nabla \cdot (\rho^\varepsilon \chi \nabla c^\varepsilon), \\ c^\varepsilon = \tilde{\Phi}_\varepsilon * (\rho^\varepsilon - f). \end{cases} \quad (1.11)$$

方程 (1.11) 所对应的迹方程为如下的 McKean-Vlasov 随机微分方程:

$$d\bar{X}_t^\varepsilon = \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * (\rho^\varepsilon - f)(\bar{X}_t^\varepsilon) dt + \sqrt{2} dW_t^i. \quad (1.12)$$

在上述光滑化问题中, 取 $\varepsilon(N) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$). 这样在取平均场极限之后也就意味着同时去光滑化发生.

1.3 文章主要结果和结构

在开始陈述本文的主要定理之前, 本文给出证明所需要的基本命题, 以集中精力阐述证明主要定理的思想. 命题的证明将推迟到后续章节.

首先给出如下的命题确保功效泛函 (1.7) 的极小化子是存在的.

命题 1.1 (粒子问题极小化子的存在性) 假设初值 ρ_0 满足条件 (1.3), 则对于任意固定的 N (从而 ε 也固定), 功效泛函 (1.7) 存在极小化子, 即存在 $\tilde{f} \in X$ 使得

$$J_N(\tilde{f}) = \min_{f \in X} J_N(f).$$

其次给出如下的偏微分方程层面的解的适定性及误差估计.

命题 1.2 (偏微分方程解的存在性和误差估计) 对于任意给定的 $f \in X$, 假设初值 ρ_0 满足条件 (1.3), 则问题 (1.1) 和 (1.11) 的解 $\rho[f], \rho^\varepsilon[f] \in L^\infty((0, T); L^1 \cap L^\infty \cap H^1) \cap L^2((0, T); H^1 \cap H^2)$ 存在并且有

$$\|\rho[f] - \rho^\varepsilon[f]\|_{L^\infty((0, T); L^1 \cap L^\infty)} \leq C\varepsilon,$$

其中常数 C 不依赖于 $f \in X$ 和 ε 的选取.

命题 1.3 (偏微分方程解关于控制函数的弱强紧性) 在命题 1.2 的假设下, 映射 $\rho: f \in X \rightarrow \rho[f]$ 有如下紧性: 当在 $L^p((0, T); W^{1,q})$ 中 $f_N \rightharpoonup f$ 时, 有方程解的收敛子序列 $\rho[f_{N_k}]$ 使得

$$\begin{aligned} \rho[f_{N_k}] &\overset{*}{\rightharpoonup} \rho[f] \text{ 在 } L^\infty((0, T); L^\infty) \text{ 中,} \\ \rho[f_{N_k}] &\rightarrow \rho[f] \text{ 在 } L^2((0, T); L^2) \text{ 中.} \end{aligned}$$

如下两个关于平均场极限的命题在全文中至关重要, 起到了粒子控制问题和偏微分方程控制问题的桥梁作用.

命题 1.4 (在共同控制函数下依概率收敛) 对于任意固定的控制函数 $\tilde{f}_N$, 设 $X_i^{N,\varepsilon}[\tilde{f}_N]$ 和 $\bar{X}_i^\varepsilon[\tilde{f}_N]$ 分别是粒子问题 (1.6) 和 (1.12) 的平方可积强解. 假设 $\varepsilon = N^{-\beta}$, 对于任意 $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, 如果 $0 < \beta < \beta_1 = \min\{\frac{\alpha}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} - \alpha\}$, 则对于任意 $\gamma > 0$, 有

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq N} |X_i^{N,\varepsilon}[\tilde{f}_N] - \bar{X}_i^\varepsilon[\tilde{f}_N]| \geq N^{-\alpha} \right) \leq \frac{C(\gamma)}{N^\gamma},$$

其中 $C(\gamma)$ 表示与 γ 有关的常数, 不依赖于 $\tilde{f}_N \in X$ 和 N 的选取.

注 1.1 在上述结果中, 考虑到 $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ 的任意性, 为了得到收敛性, β 的最优选取为 $0 < \beta < \frac{1}{8}$.

命题 1.5 (在共同控制函数下平均场的 L^1 强收敛) 对于任意固定的控制函数 $\tilde{f}_N$, 设 $\rho^{N,1}[\tilde{f}_N]$ 和 $\rho[\tilde{f}_N]$ 分别满足方程 (1.9) 和 (1.1), 假设 $\varepsilon = N^{-\beta}$, $\beta \in (0, \frac{1}{8})$, 则有

$$\|\rho^{N,1}[\tilde{f}_N] - \rho[\tilde{f}_N]\|_{L^1} \leq \frac{C(t)}{N^\beta}.$$

本文的主要定理如下:

定理 1.1 假设初值 ρ_0 满足 (1.3), 则存在 $\tilde{f} \in X$ 使得它是 $J_N(f)$ 的一个极小化子, 即

$$J_N(\tilde{f}) = \min_{f \in X} J_N(f).$$

令 $\varepsilon = N^{-\beta}$, $\beta \in (0, \frac{1}{8})$, $f_N \in X$ 是 $J_N(f)$ 的任意极小化子, $\bar{f}$ 是它的任意一个聚点, 则有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_N(f_N) = J(\bar{f})$$

且 $\bar{f} \in X$ 是 $J(f)$ 的极小化子, 即

$$J(\bar{f}) = \min_{f \in X} J(f).$$

在证明这个主要定理之前, 需要如下的准备工作:

引理 1.1 (在共同控制函数下功效泛函的极限) 对于任意给定的 $\tilde{f}_N \in X$, 在命题 1.4 和 1.5 的假设下, 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (J_N(\tilde{f}_N) - J(\tilde{f}_N)) = 0.$$

证明 首先对两个功效泛函作差, 并利用三角不等式得到

$$\begin{aligned} |J_N(\tilde{f}_N) - J(\tilde{f}_N)| &\leq |\mathbb{E}(\|j_\varepsilon * \mu_N[\tilde{f}_N] - z\|_{L^r(0,T;L^\infty)}^r) - \|\rho[\tilde{f}_N] - z\|_{L^r(0,T;L^\infty)}^r| \\ &\quad + \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}_N \rho^{N,1}[\tilde{f}_N] dx dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}_N \rho[\tilde{f}_N] dx dt \right| \\ &=: A_1 + A_2. \end{aligned}$$

对于 A_1 项, 可以得到

$$A_1 \leq \mathbb{E}(\|j_\varepsilon * \mu_N[\tilde{f}_N] - j_\varepsilon * \bar{\mu}_N[\tilde{f}_N]\|_{L^r((0,T);L^\infty)}^r) + \mathbb{E}(\|j_\varepsilon * \bar{\mu}_N[\tilde{f}_N] - j_\varepsilon * \rho_\varepsilon[\tilde{f}_N]\|_{L^r((0,T);L^\infty)}^r)$$

$$+ \|j_\varepsilon * \rho_\varepsilon[\tilde{f}_N] - \rho_\varepsilon[\tilde{f}_N]\|_{L^r((0,T);L^\infty)}^r + \|\rho_\varepsilon[\tilde{f}_N] - \rho[\tilde{f}_N]\|_{L^r((0,T);L^\infty)}^r, \quad (1.13)$$

其中 $\bar{\mu}_N[\tilde{f}_N] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_i^\varepsilon[\tilde{f}_N]$ 是问题 (1.12) 解的经验测度. 所以根据命题 1.4, 上述右端第一项有如下估计:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\int_0^T \left\| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (j_\varepsilon(\cdot - X_i^{N,\varepsilon}[\tilde{f}_N]) - j_\varepsilon(\cdot - \bar{X}_i^\varepsilon[\tilde{f}_N])) \right\|_{L^\infty}^r dt \right] \\ & \leq \int_0^T \mathbb{E} \left[(\mathbb{I}_{\mathcal{A}_\alpha} + \mathbb{I}_{\mathcal{A}_\alpha^c}) \left\| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (j_\varepsilon(\cdot - X_i^{N,\varepsilon}[\tilde{f}_N]) - j_\varepsilon(\cdot - \bar{X}_i^\varepsilon[\tilde{f}_N])) \right\|_{L^\infty}^r \right] dt \\ & \leq C(T) \|\nabla j_\varepsilon\|_{L^\infty}^r N^{-r\alpha} + C(T) \|j_\varepsilon\|_{L^\infty}^r \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{P}^r(\mathcal{A}_\alpha) \\ & \leq C(T) N^{r(3\beta-\alpha)} + C(T) N^{r(2\beta-\gamma)}, \end{aligned}$$

其中集合 $\mathcal{A}_\alpha = \{\omega \in \Omega : \max_{1 \leq i \leq N} |X_i^{N,\varepsilon}[\tilde{f}_N] - \bar{X}_i^\varepsilon[\tilde{f}_N]| \geq N^\alpha\}$ 的概率小于 $N^{-\gamma}$. 事实上, 为使上式趋于 0, 需要 $3\beta < \alpha$.

(1.13) 中右端第二项可直接利用大数定律 $\|j_\varepsilon\|_{L^\infty} N^{-1} = N^{2\beta-1}$ 来控制, 显然也趋于 0. 另外 (1.13) 右端第四项可由命题 1.2 直接得到趋于 0. 而关于第三项, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} j_\varepsilon(x-y) (\rho_\varepsilon[\tilde{f}_N](y) - \rho_\varepsilon[\tilde{f}_N](x)) dy \right|^r dt \\ & \leq \varepsilon^{r\alpha_1} C \|\rho_\varepsilon[\tilde{f}_N]\|_{L^r((0,T);C^{\alpha_1})}^r \leq \varepsilon^{\alpha_1} C(T) \|\rho_\varepsilon[\tilde{f}_N]\|_{L^2((0,T);H^2)}^r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

其中用到了 $H^2(\mathbb{R}^2)$ 到 Hölder 连续空间 $C^{\alpha_1}(\mathbb{R}^2)$ ($\forall \alpha_1 \in (0,1)$) 的 Sobolev 嵌入定理.

对于 A_2 , 由命题 1.5 得出

$$A_2 \leq \|\tilde{f}_N\|_{L^p((0,T);L^\infty)} \|\rho^{N,1} - \rho\|_{L^{p'}((0,T);L^1)} \leq C(T) \frac{1}{N^\beta} \rightarrow 0.$$

故

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (J_N(\tilde{f}_N) - J(\tilde{f}_N)) = 0.$$

证毕. □

定理 1.1 的证明 首先对于任意 N , 根据命题 1.1 可知 $J_N(f)$ 的极小化子存在. 取 f_N 是任意的极小化子, 即 $J_N(f_N) = \min_{f \in X} J_N(f)$. 由于 $f_N \in X$ 是弱紧的, 所以存在它的一个子列和聚点 $\bar{f} \in X$, 使得

$$f_{N_k} \rightharpoonup \bar{f}, \quad L^p((0,T);W^{1,q}). \quad (1.14)$$

下面证明 $\lim_{N \rightarrow \infty} J_N(f_N) = J(\bar{f})$. 证明思路来自 Γ 收敛. 具体主要分为以下的两步:

第 1 步 证明

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} J_{N_k}(f_{N_k}) \geq J(\bar{f}). \quad (1.15)$$

第 2 步 证明

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_N(\bar{f}) = J(\bar{f}). \quad (1.16)$$

在 (1.15) 和 (1.16) 的基础上, 有

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \min_{f \in X} J_N(f) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} J_N(\bar{f}) = J(\bar{f}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J_{N_k}(f_{N_k}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \min_{f \in X} J_{N_k}(f). \quad (1.17)$$

故有 $\lim_{N \rightarrow \infty} \min_{f \in X} J_N(f) = J(\bar{f})$. 由于 f_N 是 J_N 的极小化子, 进而有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_N(f_N) = J(\bar{f}).$$

最后只需要证明这个 $\bar{f}$ 就是 $J(f)$ 的一个极小化子, 即 $J(\bar{f}) = \min_{f \in X} J(f)$. 事实上, 根据定义容易知道 $J(\bar{f}) \geq \min_{f \in X} J(f)$. 故只需要证明

$$J(\bar{f}) \leq \min_{f \in X} J(f),$$

即对于任意 $\hat{f} \in X$, 需要证明 $J(\hat{f}) \geq J(\bar{f})$. 通过引理 1.1 (其中取 $\tilde{f}_N = \hat{f}$)、(1.16) 和 (1.17), 有

$$J(\hat{f}) = \lim_{N \rightarrow \infty} J_N(\hat{f}) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \min_{f \in X} J_N(f) = J(\bar{f}).$$

从而定理得证, 即

$$J(\bar{f}) = \min_{f \in X} J(f).$$

下面证明上述论证余下的两式 (1.15) 和 (1.16), 其中 (1.16) 可以由引理 1.1 (其中取 $\tilde{f}_N = \bar{f}$) 直接得到.

而 (1.15) 的证明如下. 事实上, 根据三角不等式 $J_{N_k}(f_{N_k}) \leq |J_{N_k}(f_{N_k}) - J(f_{N_k})| + J(f_{N_k})$, (1.15) 可以归结为如下不等式的证明:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} |J_{N_k}(f_{N_k}) - J(f_{N_k})| + \liminf_{k \rightarrow \infty} J(f_{N_k}) \geq J(\bar{f}).$$

上式第一项依旧应用引理 1.1 (其中取 $\tilde{f}_{N_k} = f_{N_k}$) 可得

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} |J_{N_k}(f_{N_k}) - J(f_{N_k})| = \lim_{k \rightarrow \infty} |J_{N_k}(f_{N_k}) - J(f_{N_k})| = 0. \quad (1.18)$$

最后只剩证明

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} J(f_{N_k}) \geq J(\bar{f}).$$

根据命题 1.3 可知 $\rho[f_{N_k}]$ 在 $L^\infty(L^\infty)$ 中弱 * 紧, 则由范数的弱下半连续性有

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\rho[f_{N_k}] - z\|_{L^r((0,T);L^\infty)} \geq \|\rho[\bar{f}] - z\|_{L^r((0,T);L^\infty)}.$$

利用 $(\rho[f_{N_k}])$ 的强收敛和 (f_{N_k}) 的弱收敛性知

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (f_{N_k} \rho[f_{N_k}] - \bar{f} \rho[\bar{f}]) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} f_{N_k} (\rho[f_{N_k}] - \rho[\bar{f}]) dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (f_{N_k} - \bar{f}) \rho[\bar{f}] dx dt \rightarrow 0, \quad \text{当 } N_k \rightarrow \infty \text{ 时.} \end{aligned}$$

故有

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} J(f_{N_k}) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\|\rho[f_{N_k}] - z\|_{L^r((0,T);L^\infty)} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} f_{N_k} \rho[f_{N_k}] dx dt \right) \geq J(\bar{f}). \quad (1.19)$$

结合 (1.18) 和 (1.19) 即可完成 (1.15) 的证明. $\square$

本文余下内容的结构如下. 第 2 节完成粒子层面控制问题的可解性, 即证明命题 1.1. 第 3 节构建出本文中关于偏微分方程 (1.1) 部分的估计, 同时完成命题 1.2 和 1.3 的证明. 第 4 节建立粒子模型 (1.6) 的平均场极限理论并利用相对熵得到 L^1 强收敛结果, 完成命题 1.4 和 1.5 的证明. 附录 A 给出本文估计中需要的几个重要结论.

2 粒子控制问题极小化子的存在性

本节完成命题 1.1 的证明, 即需要找到 $\tilde{f} \in X$ 使得 $J_N(\tilde{f}) = \min_{f \in X} J_N(f)$. 注意到这是对粒子控制问题可解性的研究, 所以本节中 N 和 ε 都是固定的.

因为 $J_N(f)$ 是非负函数, 故假设 $m = \min_{f \in X} J_N(f)$. 令 f_l 是 $J_N(f)$ 的极小化序列, 即

$$m \leq J_N(f_l) \leq m + \frac{1}{l}.$$

因为 $f_l \in X$, 所以存在它的一个弱收敛子序列使得

$$f_{l_k} \rightharpoonup \tilde{f} \text{ 于 } L^p((0, T); W^{1,q}).$$

下面只需要证明

$$J_N(\tilde{f}) = \lim_{l \rightarrow \infty} J_N(f_l), \quad (2.1)$$

即 $m = J_N(\tilde{f})$, 由此可以得出 $J_N(\tilde{f}) = \min_{f \in X} J_N(f)$.

对于任意 $f_{l_k} \in X$, 通过方程 (1.8) 可以解得其对应的 $\rho^{N,\varepsilon}[f_{l_k}]$, 需要证明这个解序列存在极限, 即 $\rho^{N,\varepsilon}[f_{l_k}] \rightharpoonup \rho^{N,\varepsilon}$; 并且需要证明 $\rho^{N,\varepsilon} = \rho^{N,\varepsilon}[\tilde{f}]$, 即这个极限函数 $\rho^{N,\varepsilon}$ 就是给定控制函数 $\tilde{f}$ 相应的粒子问题高维偏微分方程 (1.8) 的解. 由此可以给出 $J_N(\tilde{f})$ 定义的合理性. 下面给出由其所决定的 $\rho^{N,\varepsilon}[f]$ 的正则性估计.

引理 2.1 对于任意 $f \in X$, 方程 (1.8) 具有如下估计的弱解存在:

$$\|\rho^{N,\varepsilon}[f]\|_{L^\infty((0,T);L^1(1+|x|^2)) \cap L^2(0,T;H^1)} \leq C(N, \varepsilon, \|f\|_{L^p((0,T);W^{1,q})}).$$

证明 由于方程 (1.8) 是线性一致抛物方程, 所以弱解的存在性可以由传统的 L^2 弱解理论得到. 为简单起见, 只给出如下的一致估计.

首先证明 $\rho^{N,\varepsilon}[f] \in L^\infty((0, T); L^2)$. 对于方程 (1.8), 取实验函数 $\rho^{N,\varepsilon}[f]$, 再利用引理 3.10, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{2N}} (\rho^{N,\varepsilon}[f])^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_N + \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^{2N}} |\nabla_{x_i} \rho^{N,\varepsilon}[f]|^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_N \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho^{N,\varepsilon}[f] \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(x_i - x_j) - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * f(x_i) \right) \nabla_{x_i} \rho^{N,\varepsilon}[f] dx_1 dx_2 \cdots dx_N \\ &\leq \|\rho^{N,\varepsilon}[f]\|_{L^2} \|\nabla_{x_i} \rho^{N,\varepsilon}[f]\|_{L^2} \|\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty} + \|\rho^{N,\varepsilon}[f]\|_{L^2} \|\nabla_{x_i} \rho^{N,\varepsilon}[f]\|_{L^2} \|\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * f\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla_{x_i} \rho^{N,\varepsilon}[f]\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon^{-2} + \|f\|_{L^1}^2 + \|f\|_{W^{1,q}}^2) \|\rho^{N,\varepsilon}[f]\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

对 (2.2) 应用 Gronwall 不等式, 有

$$\sup_{0 \leq s \leq T} \|\rho^{N,\varepsilon}[f]\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^T \|\nabla_{x_i} \rho^{N,\varepsilon}[f]\|_{L^2}^2 ds \leq C(\varepsilon). \quad (2.3)$$

然后计算 $\| |x| \sqrt{\rho^{N,\varepsilon}[f]} \|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C(N, \varepsilon)$. 方程 (1.8) 的两端同时乘以 $|x|^2$ 并积分, 再根据引理 3.10 可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{2N}} |x|^2 \rho^{N,\varepsilon}[f] dx_1 dx_2 \cdots dx_N \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^{2N}} |x|^2 \Delta_{x_i} \rho^{N,\varepsilon}[f] dx_1 dx_2 \cdots dx_N \\
 & \quad - \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^{2N}} |x|^2 \nabla_{x_i} \left(\rho^{N,\varepsilon}[f] \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(x_i - x_j) - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * f \right)(x_i) \right) dx_1 dx_2 \cdots dx_N \\
 &\leq 4N + 2 \sum_{i=1}^N \| |x| \sqrt{\rho^{N,\varepsilon}[f]} \|_{L^2} \sqrt{\rho^{N,\varepsilon}[f]} \|_{L^2} (\| \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon \|_{L^\infty} + \| \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * f \|_{L^\infty}) \\
 &\leq \| |x| \sqrt{\rho^{N,\varepsilon}[f]} \|_{L^2}^2 + C(N, \varepsilon).
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

对 (2.4) 应用 Gronwall 不等式即可得

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \| |x| \sqrt{\rho^{N,\varepsilon}[f]} \|_{L^2}^2 \leq C(N, \varepsilon). \tag{2.5}$$

结合 (2.3)、(2.5) 以及 $\rho^{N,\varepsilon}[f]$ 的质量守恒特性, 即可完成该引理的证明. $\square$

下面给出 $J_N(\tilde{f})$ 的定义合理性证明, 即其中出现的 $\rho^{N,\varepsilon}$ 是由给定的控制函数 $\tilde{f}$ 确定的解.

引理 2.2 设泛函 J_N 的极小化序列 $\{f_l\} \in X$ 存在弱收敛极限

$$f_l \rightharpoonup \tilde{f} \text{ 在 } L^p((0, T); W^{1,q}) \text{ 中.}$$

令 $\rho^{N,\varepsilon}[f_l]$ 是通过方程 (1.8) 在给定控制函数 f_l 得到的解, 则存在它的一个收敛子序列 (为简单起见, 延用原记号) 使得

$$\rho^{N,\varepsilon}[f_l] \rightarrow \rho^{N,\varepsilon} \text{ 在 } L^2((0, T); L^2) \text{ 中,}$$

并且有

$$\rho^{N,\varepsilon} = \rho^{N,\varepsilon}[\tilde{f}].$$

证明 考虑给定 f_l 后的方程 (1.8) 的弱解定义, 即对于任意给定的测试函数 $\varphi \in L^2(0, T; H^1)$, 有

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho^{N,\varepsilon}[f_l] \varphi dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt + \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} \nabla_{x_i} \rho^{N,\varepsilon}[f_l] \nabla_{x_i} \varphi dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt \\
 & \quad - \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho^{N,\varepsilon}[f_l] \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(x_i - x_j) - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * f_l(x_i) \right) \nabla_{x_i} \varphi dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

根据引理 2.1 中对 $\rho^{N,\varepsilon}[f_l]$ 的一致估计, 有如下的弱收敛性:

$$\rho^{N,\varepsilon}[f_l] \rightharpoonup \rho^{N,\varepsilon} \text{ 在 } L^2((0, T); H^1) \text{ 中.}$$

故只需要考虑 $-\sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho^{N,\varepsilon}[f_l] (\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(x_i - x_j) - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * f_l(x_i)) \nabla_{x_i} \varphi dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt$ 的收敛性. 对其进行分解后, 对于 $i = 1, \dots, N$ 有

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho^{N,\varepsilon}[f_l] \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(x_i - x_j) - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * f_l(x_i) \right) \nabla_{x_i} \varphi dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho^{N,\varepsilon}[f_l] \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(x_i - x_j) \nabla_{x_i} \varphi dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} (\rho^{N,\varepsilon}[f_l] - \rho^{N,\varepsilon})(\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * f_l(x_i)) \nabla_{x_i} \varphi dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho^{N,\varepsilon} (\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * f_l(x_i)) \nabla_{x_i} \varphi dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt \\ &=: K_1 + K_2 + K_3. \end{aligned}$$

对于 K_1 , 根据 $\rho^{N,\varepsilon}[f_l]$ 的弱收敛性知

$$\rho^{N,\varepsilon}[f_l] \rightharpoonup \rho^{N,\varepsilon} \quad \text{在 } L^2((0, T); H^1) \text{ 中.}$$

故

$$K_1 \rightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho^{N,\varepsilon} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(x_i - x_j) \nabla_{x_i} \varphi dx dt, \quad \text{当 } l \rightarrow \infty \text{ 时.}$$

对于 K_2 的处理, 结合引理 2.1、A.2 以及 Aubin-Lions 定理可知

$$\rho^{N,\varepsilon}[f_l] \rightarrow \rho^{N,\varepsilon} \quad \text{在 } L^2((0, T); L^2) \text{ 中.}$$

故

$$K_2 \rightarrow 0, \quad \text{当 } l \rightarrow \infty \text{ 时.}$$

对于 K_3 , 分部积分后可得

$$\begin{aligned} K_3 &= - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} f_l(x_i) D^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon *_{x_i} (\rho^{N,\varepsilon} \varphi) dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * (\nabla_{x_i} \rho^{N,\varepsilon} \varphi) f_l(x_i) dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt. \end{aligned}$$

根据

$$f_l \rightharpoonup \tilde{f} \quad \text{在 } X \text{ 中,}$$

可知

$$\begin{aligned} K_3 &\rightarrow - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} \tilde{f}(x_i) D^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon *_{x_i} (\rho^{N,\varepsilon} \varphi) dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * (\nabla_{x_i} \rho^{N,\varepsilon} \varphi) \tilde{f}(x_i) dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt. \end{aligned}$$

由此可知 $\rho^{N,\varepsilon}$ 满足给定控制函数 $\tilde{f}$ 的方程, 即 $\rho^{N,\varepsilon} = \rho^{N,\varepsilon}[\tilde{f}]$. □

为了证明极限 (2.1), 即 $J_N(\tilde{f}) = \lim_{l \rightarrow \infty} J_N(f_l)$ 成立, 首先给出 $\rho^{N,\varepsilon}[\tilde{f}]$ 的一个粒子的边缘密度函数 $\rho^{N,1}[\tilde{f}]$ 的强收敛性.

引理 2.3 对于给定控制函数 f , 方程 (1.9) 的解 $\rho^{N,1}[f]$ 满足

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (\|\rho^{N,1}[f]\|_{L^2}^2 + \|x|\rho^{N,1}[f]\|_{L^2}^2) + \int_0^T \|\nabla \rho^{N,1}[f]\|_{L^2}^2 dt \leq C(\varepsilon).$$

证明 方程 (1.9) 的两端同乘以 $\rho^{N,1}[f]$ 并积分, 根据引理 3.10 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (\rho^{N,1}[f])^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \rho^{N,1}[f]|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \rho^{N,2}(x, y) (\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(x - y) - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * f(x)) dy \right) \nabla \rho^{N,1}[f] dx \\ &\leq \|\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty} \|\rho^{N,1}[f]\|_{L^2} \|\nabla \rho^{N,1}[f]\|_{L^2} + \|\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * f\|_{L^\infty} \|\rho^{N,1}[f]\|_{L^2} \|\nabla \rho^{N,1}[f]\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla \rho^{N,1}[f]\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon) \|\rho^{N,1}[f]\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

对 (2.9) 应用 Gronwall 不等式可得

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\rho^{N,1}[f]\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\nabla \rho^{N,1}[f]\|_{L^2}^2 dt \leq C(\varepsilon). \quad (2.8)$$

下面作二阶矩的估计. 方程 (1.9) 两端同乘 $|x|^2$ 并积分可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho^{N,1}[f] dx &= 2 + 2 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \rho^{N,2}(x, y) (\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(x - y) - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * f(x)) dy \right) \cdot x dx \\ &\leq \|\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \rho^{N,1}[f] |x| dx + \int_{\mathbb{R}^2} |x| \rho^{N,1}[f] \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * f dx + 2 \\ &\leq \|x| \sqrt{\rho^{N,1}[f]}\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.9)$$

对 (2.8) 应用 Gronwall 不等式可得

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|x| \sqrt{\rho^{N,1}[f]}\|_{L^2}^2 \leq C(\varepsilon). \quad (2.10)$$

结合不等式 (2.8) 和 (2.10) 即可完成该引理的证明. $\square$

有了上述准备工作, 可以得到粒子模型控制问题的极小子存在性.

引理 2.4 对于极小化序列 f_l , 有

$$\lim_{l \rightarrow \infty} J_N[f_l] = J_N[\tilde{f}].$$

证明 根据 (1.10) 可知 f_l 和 $\tilde{f}$ 所对应的功效泛函分别为

$$J_N[f_l] = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} \|j_\varepsilon * \mu_N - z\|_{L^\infty}^r \rho^N[f_l] dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} f_l \rho^{N,1}[f_l] dx dt, \quad (2.11)$$

$$J_N[\tilde{f}] = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} \|j_\varepsilon * \mu_N - z\|_{L^\infty}^r \rho^N[\tilde{f}] dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f} \rho^{N,1}[\tilde{f}] dx dt. \quad (2.12)$$

(2.11) 和 (2.12) 相减可得

$$J_N[f_l] - J_N[\tilde{f}] = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N}} \|j_\varepsilon * \mu_N - z\|_{L^\infty}^r (\rho^N[f_l] - \rho^N[\tilde{f}]) dx_1 dx_2 \cdots dx_N dt$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (f_l \rho^{N,1}[f_l] - \tilde{f} \rho^{N,1}[\tilde{f}]) dx dt \\
& =: L_1 + L_2.
\end{aligned}$$

根据引理 2.1、A.2 以及 Aubin-Lions 定理可知

$$\rho^{N,\varepsilon}[f_l] \rightarrow \rho^{N,\varepsilon}[\tilde{f}] \quad \text{在 } L^1((0,T); L^1(\mathbb{R}^{2N})) \text{ 中.}$$

由于

$$\|j_\varepsilon * \mu_N - z\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^r(t, x_1, \dots, x_N) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N j_\varepsilon(x - x_i) \right| + \|z\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} + \|z\|_{L^\infty},$$

所以

$$|L_1| \rightarrow 0, \quad \text{当 } l \rightarrow \infty \text{ 时.} \quad (2.13)$$

对于 L_2 的处理, 首先利用三角不等式有

$$\begin{aligned}
L_2 & \leq \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} f_l (\rho^{N,1}[f_l] - \rho^{N,1}[\tilde{f}]) dx dt \right| + \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (f_l - \tilde{f}) \rho^{N,1}[\tilde{f}] dx dt \right| \\
& \leq \|f_l\|_{L^p(0,T;L^\infty)} \|\rho^{N,1}[f_l] - \rho^{N,1}[\tilde{f}]\|_{L^{p'}(0,T;L^1(\mathbb{R}^2))} + \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (f_l - \tilde{f}) \rho^{N,1}[\tilde{f}] dx dt \right|.
\end{aligned}$$

根据引理 A.2、2.3 以及 Aubin-Lions 定理可知

$$\rho^{N,1}[f_l] \rightarrow \rho^{N,1}[\tilde{f}] \quad \text{在 } L^l((0,T); L^l(\mathbb{R}^2)) \text{ } (l \in [1, 2]) \text{ 中.}$$

同时根据引理 2.3 知

$$\rho^{N,1}[\tilde{f}] \in L^l((0,T); L^l) \quad (l \in [1, 2]).$$

由 f_l 的弱收敛性, 有

$$|L_2| \rightarrow 0, \quad \text{当 } l \rightarrow \infty \text{ 时.} \quad (2.14)$$

结合 (2.13) 和 (2.14) 可知

$$\lim_{l \rightarrow \infty} J_N(f_l) = J_N(\tilde{f}).$$

证毕. □

3 偏微分方程部分的证明

关于无控制项的方程 (1.1) 的解在次临界情形, 即 $\chi < 8\pi$, $f = 0$ 的情形下, 已经有文献得出有界解的存在性, 这里效仿文献 [6] 中的技巧得到类似结果. 为了行文方便, 仅给出相应的先验估计, 具体存在性的证明参见文献 [6].

本节主要完成的是偏微分方程部分的正则性估计, 同时给出命题 1.2 和 1.3 的证明. 为了完成这两个命题的证明, 首先需要建立原偏微分方程解的正则性估计, 即方程 (1.1) 的解 $\rho \in L^1((0,T); L^\infty) \cap L^2((0,T); H^2)$. 关于 ρ 的正则性估计, 需依赖于方程 (1.1) 的熵的有界性, 即 $\rho |\log \rho| \in L^\infty((0,T); L^1)$.

为了记号方便, 本节省略符号 $[f]$, 即简化 $\rho[f]$ 为 ρ .

3.1 先验估计和命题 1.2 的证明

首先给出解 ρ 的二阶矩的有界性证明.

引理 3.1 假设 ρ 在时间 $[0, T]$ 上是方程 (1.1) 的解且满足 (1.3) 和 (1.4), 则对于任意 $t \in [0, T]$, 都有

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho dx \leq C(t) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho_0 dx + 4 \left(1 - \frac{\chi}{8\pi} \right) t + 2\chi \|l\|_{L^2(0,t)} \right),$$

其中 l 来自于控制函数空间 (1.2).

证明 取 $|x|^2$ 为方程 (1.1)₁ 的实验函数. 事实上, 下述过程可以通过利用它的逼近函数列严格化, 即取 $\varphi_\varepsilon(|x|)$ 是具有紧支集的光滑函数且满足

$$\begin{aligned} \varphi_R &\rightarrow |x|^2, \quad \text{当 } R \rightarrow 0 \text{ 时}, \\ |D\varphi_R| &\leq \frac{C}{R}, \quad |D^2\varphi_R| \leq \frac{C}{R}. \end{aligned}$$

为简单起见, 直接作如下估计. 将方程的两端同时乘以 $|x|^2$ 并积分, 注意到控制函数 f 具有紧支集, 再利用引理 A.1 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \rho |x|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \rho \Delta |x|^2 dx + \chi \int_{\mathbb{R}^2} \rho \nabla \Phi * (\rho - f) \cdot \nabla |x|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \rho \Delta |x|^2 dx - \frac{\chi}{4\pi} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \frac{\nabla(|x|^2 - |y|^2) \cdot (x - y)}{|x - y|^2} \rho(x) \rho(y) dx dy \\ &\quad - \chi \int_{\mathbb{R}^2} \rho (\nabla \Phi * f) \cdot \nabla |x|^2 dx \\ &\leq 4 - \frac{\chi}{2\pi} - 2\chi \int_{\mathbb{R}^2} \rho (\nabla \Phi * f) \cdot x dx \\ &\leq 4 \left(1 - \frac{\chi}{8\pi} \right) + 2\chi \|x\|_{L^2} \|\sqrt{\rho}\|_{L^2} \|\sqrt{\rho}\|_{L^2} \|\nabla \Phi * f\|_{L^\infty} \\ &\leq 4 \left(1 - \frac{\chi}{8\pi} + \frac{1}{2} \chi (\|f\|_{L^1}^2 + \|f\|_{L^\infty}^2) \right) + \|x\|_{L^2}^2 \|\sqrt{\rho}\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

注意到 $\|f\|_{L^2((0,T);W^{1,q})} \leq \|l\|_{L^1(0,T)}$, 对上述不等式 (3.1) 应用 Gronwall 不等式即可完成该引理的证明. $\square$

下面给出方程 (1.1) 的自由能 $F[\rho]$ 的定义, 即

$$\begin{aligned} F[\rho] &:= \int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \rho dx - \frac{\chi}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho (\Phi * \rho) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \rho dx + \frac{\chi}{4\pi} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \rho(x) \rho(y) \log |x - y| dx dy. \end{aligned} \quad (3.2)$$

下面给出方程自由能的有界性证明.

引理 3.2 假设 ρ 是方程 (1.1) 的解且满足初值 (1.3), 则有

$$F \leq F_0 + C,$$

其中, $F_0 := F[\rho_0]$, 常数 C 依赖于 $\|l\|_{L^2((0,T);W^{1,q})}$.

证明 方程 (1.1)₁ 可以改写为

$$\rho_t = \nabla \cdot (\rho \nabla (\log \rho - \chi c)). \quad (3.3)$$

方程 (3.3) 的两端同时乘以 $\log \rho - \chi \Phi * \rho$ 并积分, 再用引理 A.1 可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \rho dx - \frac{\chi}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho (\Phi * \rho) dx \right) + \|\sqrt{\rho} \nabla (\log \rho - \chi \Phi * \rho)\|_{L^2}^2 \\ &= \chi \int_{\mathbb{R}^2} \rho \nabla (\Phi * f) \nabla (\log \rho - \chi \Phi * \rho) dx \\ &\leq \chi \|\sqrt{\rho}\|_{L^2} \|\nabla (\Phi * f)\|_{L^\infty} \|\sqrt{\rho} \nabla (\log \rho - \chi \Phi * \rho)\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\sqrt{\rho} \nabla (\log \rho - \chi \Phi * \rho)\|_{L^2}^2 + C(\|f\|_{L^1}^2 + \|f\|_{L^\infty}^2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

对上述估计 (3.4) 两端直接关于时间积分可完成该引理的证明. $\square$

下面给出对于熵估计有很大帮助作用的 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式.

引理 3.3 假设 $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 是非负函数且满足 $g \log g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 和 $g \log(1 + |x|^2) \in L^1(\mathbb{R}^2)$. 假设 $\int_{\mathbb{R}^2} g dx = M$, 则有

$$\int_{\mathbb{R}^2} g \log g dx + \frac{2}{M} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} g(x)g(y) \log |x - y| dx dy \geq -C(M),$$

其中 $C(M) := M(1 + \log \pi - \log M)$.

如下从熵估计推导出解的有界性估计取自文献 [6]. 由于控制项的加入, 部分细节有所不同, 为本文的证明的完整性, 将这一估计详细列出, 即下面的引理给出了 $\int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \rho dx$ 的有界性证明.

引理 3.4 假设 $\chi < 8\pi$, 则有如下的熵估计:

$$-\log[\pi(1 + e^{2t})] - K \leq \int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \rho dx \leq \frac{8\pi(F_0 + C) + \chi(1 + \log \pi)}{8\pi - \chi},$$

其中 $K := \max\{\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho_0 dx + 2\chi, \frac{1}{2\pi}(8\pi - \chi)\}$.

证明 一方面, 由自由能的定义 (3.2) 和引理 3.2 可知, 对于 $\theta \in (0, 1)$, 有

$$(1 - \theta) \int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \rho dx + \theta \left(\int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \rho dx + \frac{\chi}{4\pi\theta} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \rho(x)\rho(y) \log |x - y| dx dy \right) \leq F_0 + C. \quad (3.5)$$

根据引理 3.3, 由于考虑的是概率密度函数, 即 $M = 1$, 这时引理 3.3 中的常数 $C(1) = 1 + \log \pi$, 所以取

$$\frac{\chi}{4\pi\theta} = 2 \Rightarrow \theta = \frac{\chi}{8\pi}.$$

将上述解得到的 θ 代入估计 (3.5), 有

$$\left(1 - \frac{\chi}{8\pi}\right) \int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \rho dx - \frac{\chi}{8\pi} (1 + \log \pi) \leq F_0 + C,$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \rho dx \leq \frac{8\pi(F_0 + C) + \chi(1 + \log \pi)}{8\pi - \chi}. \quad (3.6)$$

另一方面, 通过引理 3.1, 有

$$\frac{1}{1+e^{2t}} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho dx \leq K. \quad (3.7)$$

定义函数

$$\mu := \frac{1}{\pi(1+e^{2t})} \exp\left(-\frac{|x|^2}{1+e^{2t}}\right),$$

借助 (3.7), $\int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \rho dx$ 可以有如下估计:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \rho dx &\geq \frac{1}{1+e^{2t}} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho dx - K + \int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \rho dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \left(\frac{\rho}{e^{-\frac{|x|^2}{1+e^{2t}}}} \right) dx - K \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\rho}{\mu} \log \left(\frac{\rho}{\mu} \right) \mu dx - \log(\pi(1+e^{2t})) - K. \end{aligned} \quad (3.8)$$

根据 Jensen 不等式易得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\rho}{\mu} \log \left(\frac{\rho}{\mu} \right) \mu dx \geq X \log X = 0, \quad (3.9)$$

其中 $X = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\rho}{\mu} \mu dx = 1$. 结合不等式 (3.8) 和 (3.9), 可以得到熵的下界估计, 即

$$-\log[\pi(1+e^{2t})] - K \leq \int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \rho dx. \quad (3.10)$$

结合不等式 (3.6) 和 (3.10) 即可完成该引理的证明. $\square$

在上述引理的基础上, 即可给出熵的有界性证明.

引理 3.5 假设 $\rho \in L^1_+(\mathbb{R}^2)$ 且 $\int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \rho dx$ 和 $\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho dx$ 有界, 则有如下的估计:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho |\log \rho| dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \rho (\log \rho + |x|^2) dx + 2 \log(2\pi) \int_{\mathbb{R}^2} \rho dx + \frac{2}{e}.$$

借助引理 3.5 关于熵的有界性证明, 即可给出方程 (1.1) 解 ρ 的 L^2 估计.

引理 3.6 假设方程 (1.1) 的解满足初值 (1.3), 则有

$$\|\rho\|_{L^\infty L^2} \leq C.$$

证明 方程 (1.1)₁ 的两端同时乘以 ρ 并积分, 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \rho^2 dx &= - \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \rho|^2 dx + \chi \int_{\mathbb{R}^2} \rho \nabla \rho \nabla c dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \rho|^2 dx - \frac{\chi}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho^2 \Delta c dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \rho|^2 dx + \frac{\chi}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho^2 (\rho - f) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \rho|^2 dx + \frac{\chi}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho^3 dx - \frac{\chi}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho^2 f dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

根据 Gagliardo-Nirenberg 不等式, 有

$$\|\rho\|_{L^3} \leq K_G \|\rho\|_{L^1}^{\frac{1}{3}} \|\nabla \rho\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}. \quad (3.12)$$

将 (3.12) 代入 (3.11) 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \rho^2 dx &\leq \left(\frac{\chi}{2} K_G - 1 \right) \|\nabla \rho\|_{L^2}^2 - \frac{\chi}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho^2 f dx \\ &\leq \left(\frac{\chi}{2} K_G - 1 \right) \|\nabla \rho\|_{L^2}^2 + \frac{\chi}{2} \|\rho\|_{L^4}^2 \|f\|_{L^2} \\ &\leq \left(\frac{\chi}{2} K_G - 1 \right) \|\nabla \rho\|_{L^2}^2 + \frac{\chi}{2} \eta \|\nabla \rho\|_{L^2}^2 + C_\eta \|\rho\|_{L^2}^2 \|f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

若 $\frac{\chi}{2} K_G - 1 + \frac{\chi}{2} \eta \leq 0$, 即 $\chi \leq \frac{2}{K_G + \eta}$, 则易得

$$\frac{d}{dt} \|\rho\|_{L^2}^2 \leq 2C_\eta \|\rho\|_{L^2}^2 \|f\|_{L^2}^2. \quad (3.13)$$

对上述估计 (3.13) 应用 Gronwall 不等式即可得

$$\|\rho\|_{L^2}^2 \leq CC_0. \quad (3.14)$$

若 $\chi > \frac{2}{K_G + \eta}$, 此时需要将积分区域进行划分后重新计算 $\|\rho\|_{L^2}$. 假设 $K > 1$ 是一个常数, 则 $\|\rho\|_{L^2}^2$ 可写为

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho^2 dx = \int_{\rho \leq K} \rho^2 dx + \int_{\rho > K} \rho^2 dx =: I_1 + I_2.$$

对于 I_1 , 因为 ρ 有界且积分区域有界, 考虑到 ρ 是概率密度函数, 故有

$$I_1 \leq \int_{\rho \leq K} \rho^2 dx \leq K \int_{\rho \leq K} \rho dx \leq K. \quad (3.15)$$

对于 I_2 , 令

$$M(K) = \int_{\rho > K} \rho \log \rho \frac{1}{\log \rho} dx \leq \frac{1}{\log K} \int_{\rho > K} \rho \log \rho dx \leq \frac{1}{\log K} \int_{\mathbb{R}^2} |\rho \log \rho| dx. \quad (3.16)$$

方程 (1.1)₁ 的两端同时乘以 $(\rho - K)_+$ 并积分有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} (\rho - K)_+^2 dx + 2 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla (\rho - K)_+|^2 dx \\ &= \chi \int_{\mathbb{R}^2} (\rho - K)_+^2 (\rho - f) dx + 2\chi K \int_{\mathbb{R}^2} (\rho - K)_+ (\rho - f) dx \\ &= 3\chi K \int_{\mathbb{R}^2} (\rho - K)_+^2 dx + \chi \int_{\mathbb{R}^2} (\rho - K)_+^3 dx - \chi \int_{\mathbb{R}^2} (\rho - K)_+^2 f dx \\ &\quad + 2\chi K^2 \int_{\mathbb{R}^2} (\rho - K)_+ dx - 2\chi K \int_{\mathbb{R}^2} (\rho - K)_+ f dx \\ &=: 3\chi K \int_{\mathbb{R}^2} (\rho - K)_+^2 dx + \sum_{i=1}^4 I_{2,i}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

首先估计 $I_{2,1}$. 再次利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式 (3.12) 和 (3.16), 有

$$\begin{aligned} I_{2,1} &\leq \chi \int_{\mathbb{R}^2} (\rho - K)_+ dx \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\rho - K)_+|^2 dx \\ &\leq \frac{\chi}{\log K} \int_{\mathbb{R}^2} |(\rho - K)_+ \log \rho| dx \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\rho - K)_+|^2 dx. \\ &\leq \frac{\chi}{\log K} \int_{\mathbb{R}^2} |\rho \log \rho| dx \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\rho - K)_+|^2 dx. \end{aligned}$$

其次估计 $I_{2,2}$. 通过 Gagliardo-Nirenberg 不等式、Hölder 不等式和 Young 不等式有

$$I_{2,2} \leq \chi \|(\rho - K)_+\|_{L^4}^2 \|f\|_{L^2} \leq \eta \|\nabla(\rho - K)_+\|_{L^2}^2 + C_\eta \chi^2 \|(\rho - K)_+\|_{L^2}^2 \|f\|_{L^2}^2.$$

然后估计 $I_{2,3}$. 对积分区域进行划分后计算可得

$$\begin{aligned} I_{2,3} &= 2\chi K^2 \left(\int_{K < \rho \leq K+1} (\rho - K)_+ dx + \int_{\rho > K+1} (\rho - K)_+ dx \right) \\ &\leq 2\chi K^2 \left(\frac{1}{K} + \int_{\rho > K+1} (\rho - K)_+^2 dx \right) \\ &\leq 2\chi K^2 \left(\frac{1}{K} + \int_{\mathbb{R}^2} (\rho - K)_+^2 dx \right). \end{aligned}$$

最后估计 $I_{2,4}$. 根据 Hölder 不等式, 有

$$I_{2,4} \leq 2\chi K \|(\rho - K)_+\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \leq 2\chi K (\|(\rho - K)_+\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2).$$

令 $\eta = \frac{1}{2}$, 同时取 K 充分大, 使得

$$-\frac{3}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\rho - K)_+|^2 dx + \frac{\chi}{\log K} \int_{\mathbb{R}^2} |\rho \log \rho| dx \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\rho - K)_+|^2 dx \leq 0.$$

将上述关于 $I_{2,i}$ ($i = 1, \dots, 4$) 的估计代入 (3.17), 得到

$$\frac{d}{dt} \|(\rho - K)_+\|_{L^2}^2 \leq 2\chi K \left(1 + K + \frac{1}{2K} \|f\|_{L^2}^2 \right) \|(\rho - K)_+\|_{L^2}^2 + 2\chi K (\|f\|_{L^2}^2 + 1). \quad (3.18)$$

对 (3.18) 应用 Gronwall 不等式即可得

$$\|(\rho - K)_+\|_{L^2}^2 \leq C. \quad (3.19)$$

对于任意 $x \geq \lambda > 1$, 有如下的事实:

$$x^2 \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda - 1} \right) (x - 1)^2. \quad (3.20)$$

结合 (3.19) 和 (3.20), 容易证得

$$\begin{aligned} \int_{\rho > K} \rho^2 dx &\leq \int_{K < \rho \leq \lambda K} \rho^2 dx + \int_{\rho > \lambda K} \rho^2 dx \\ &\leq \lambda K + \left(\frac{\lambda}{\lambda - 1} \right) K^2 \int_{\rho > \lambda K} \left(\frac{\rho}{K} - 1 \right)^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \lambda K + \left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) \int_{\mathbb{R}^2} (\rho - K)_+^2 dx \\ &\leq C. \end{aligned} \quad (3.21)$$

结合 (3.15) 和 (3.21) 即可完成该引理的证明. $\square$

下面利用 Moser-Alikakos 迭代给出解的进一步估计. 众所周知, 如下的迭代引理成立.

引理 3.7 (Moser-Alikakos 迭代, 参见文献 [38, 引理 3.7]) 假设 $j, j^* \in \mathbb{N}^+$. 对于任意 $j \geq j^*$, d 为空间维数, 可测函数 $g(x, t)$ 满足

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^d} |g(t)|^{2^{j+1}} dx &\leq \max \left\{ C_1 \delta^j \left(\sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^d} |g(t)|^{2^j} dx \right)^2, C_2 \int_{\mathbb{R}^d} |g(0)|^{2^{j+1}} dx, 1 \right\}, \\ \sup_{t \geq 0} \|g(t)\|_{L^{2^j}} &\leq M_1 \quad \text{和} \quad \|g(0)\|_{L^\infty} \leq M_2, \end{aligned}$$

其中 C_1, C_2, δ, M_1 和 M_2 是正数. 则有

$$\sup_{t \geq 0} \|g(t)\|_{L^\infty} \leq C_1^{\frac{1}{2^{j^*}}} \delta^{\frac{j^*+1}{2^{j^*}}} K,$$

其中 $K := \max\{M_1, C_2(M_1 + M_2), 1\}$.

引理 3.8 假设方程 (1.1) 的初值 ρ_0 满足 (1.3), f 取自控制函数空间 X , 则方程 (1.1) 的解满足如下估计:

$$\|\rho\|_{L^\infty((0,T);L^\infty)} \leq C.$$

证明 令 $p_k = 2^{k+1}$, 方程 (1.1)₁ 的两端同时乘以 $p_k \rho^{p_k-1}$ 并积分, 再利用 Hardy 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$\|\rho\|_{L^4} \leq K_G \|\rho\|_{L^1}^{\frac{1}{4}} \|\nabla \rho\|_{L^2}^{\frac{3}{4}}$$

以及引理 3.6, 得到

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \rho^{p_k} dx + \frac{4(p_k-1)}{p_k} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \rho^{\frac{p_k}{2}}|^2 dx \\ &= 2(p_k-1) \chi \int_{\mathbb{R}^2} \rho^{\frac{p_k}{2}} \nabla c \nabla \rho^{\frac{p_k}{2}} dx \\ &\leq 2p_k \chi \|\rho^{\frac{p_k}{2}}\|_{L^4} \|\nabla c\|_{L^4} \|\nabla \rho^{\frac{p_k}{2}}\|_{L^2} \\ &\leq 2p_k \chi \|\rho^{\frac{p_k}{2}}\|_{L^4} \|\nabla \Phi * (\rho - f)\|_{L^4} \|\nabla \rho^{\frac{p_k}{2}}\|_{L^2} \\ &\leq 2p_k \chi \|\rho^{\frac{p_k}{2}}\|_{L^4} (\|\rho\|_{L^{\frac{4}{3}}} + \|f\|_{L^{\frac{4}{3}}}) \|\nabla \rho^{\frac{p_k}{2}}\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla \rho^{\frac{p_k}{2}}\|_{L^2}^2 + C(\chi)(2p_k)^2 \|\rho^{\frac{p_k}{2}}\|_{L^4}^2 (\|\rho\|_{L^{\frac{4}{3}}} + \|f\|_{L^{\frac{4}{3}}})^2 \\ &\leq \|\nabla \rho^{\frac{p_k}{2}}\|_{L^2}^2 + C(\chi)(2p_k)^8 \|\rho^{\frac{p_k}{2}}\|_{L^1}^2 (1 + \|f\|_{L^{\frac{4}{3}}}^8). \end{aligned} \quad (3.22)$$

再次利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式有

$$\|\rho\|_{L^2} \leq \|\rho\|_{L^1}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \rho\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \leq \|\rho\|_{L^1} + \|\nabla \rho\|_{L^2}, \quad (3.23)$$

并注意到 $\frac{4(p_k-1)}{p_k} \geq 2$, (3.22) 可写为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\rho^{\frac{p_k}{2}}\|_{L^2}^2 &\leq -\|\nabla \rho^{\frac{p_k}{2}}\|_{L^2}^2 + C(2p_k)^8 \|\rho^{\frac{p_k}{2}}\|_{L^1}^2 (1 + \|f\|_{L^{\frac{4}{3}}}^8) \\ &\leq -\|\rho^{\frac{p_k}{2}}\|_{L^2}^2 + C(2p_k)^8 \|\rho^{\frac{p_k}{2}}\|_{L^1}^2 (1 + \|f\|_{L^{\frac{4}{3}}}^8), \end{aligned}$$

即

$$\frac{d}{dt} \|\rho\|_{L^{p_k}}^{p_k} \leq -\|\rho\|_{L^{p_k}}^{p_k} + C(2p_k)^8 (\|\rho\|_{L^{p_k-1}}^{p_k-1})^2 (1 + \|f\|_{L^{\frac{4}{3}}}^8). \quad (3.24)$$

方程 (3.24) 的两端同时乘以 e^t 后关于时间 t 积分, 可得

$$\begin{aligned} \|\rho\|_{L^{p_k}}^{p_k} &\leq C(2p_k)^8 (1 - e^{-t}) \sup_{t \geq 0} (\|\rho\|_{L^{p_k-1}}^{p_k-1})^2 + e^{-t} \|\rho_0\|_{L^{p_k}}^{p_k} \\ &\leq \max \left\{ C_1(2p_k)^8 \sup_{t \geq 0} (\|\rho\|_{L^{p_k-1}}^{p_k-1})^2, C_2 \|\rho_0\|_{L^{p_k}}^{p_k}, 1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

故根据引理 3.7 可知

$$\|\rho\|_{L^\infty((0,T);L^\infty)} \leq C.$$

由此可知该引理成立. □

下面给出关于方程 (1.1) 的解的高阶正则性估计.

引理 3.9 假设初值 ρ_0 满足 (1.3), 则方程 (1.1) 的解满足

$$\|\nabla \rho\|_{L^\infty((0,T);L^2)} \leq C.$$

证明 方程 (1.1)₁ 的两端同时乘以 $\Delta \rho$ 并积分, 再利用引理 A.1、3.6、插值不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \rho|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta \rho|^2 dx \\ &= \chi \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \rho \cdot \nabla c \Delta \rho dx + \chi \int_{\mathbb{R}^2} \rho \Delta c \Delta \rho dx \\ &\leq \|\nabla \rho\|_{L^4} \|\nabla c\|_{L^4} \|\Delta \rho\|_{L^2} + \|\rho\|_{L^4} \|\Delta c\|_{L^4} \|\Delta \rho\|_{L^2} \\ &\leq \|\nabla \rho\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\Delta \rho\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \|\rho - f\|_{L^{\frac{4}{3}}} + \|\rho\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \rho\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\rho - f\|_{L^4} \|\Delta \rho\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\Delta \rho\|_{L^2}^2 + C(1 + \|f\|_{L^1}^2 \|f\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^4}^4) \|\nabla \rho\|_{L^2}^2 + C. \end{aligned} \quad (3.26)$$

对 (3.26) 应用 Gronwall 不等式即可完成该引理的证明. □

以上的引理主要是关于方程 (1.1) 的解的正则性估计, 这些引理有助于后面命题 1.2 的证明. 但在完成命题 1.2 的证明之前, 还需要分别给出 $\Phi - \tilde{\Phi}$ 和 $\Phi - \Phi_\varepsilon$ 的估计. 首先给出在后面常用到的关于 $\tilde{\Phi}$ 的估计.

引理 3.10 对于任意 $g \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, 有

$$\|\nabla(\tilde{\Phi} * g)\|_{L^\infty} \leq C(\|g\|_{L^1} + \|g\|_{L^\infty}),$$

其中 $\tilde{\Phi}$ 的定义见 (1.5).

证明 根据 $\tilde{\Phi}$ 的定义, 可以将 $\nabla(\tilde{\Phi} * g)$ 进行如下的分解:

$$\begin{aligned}\nabla \tilde{\Phi} * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \tilde{\Phi}(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{|x-y|<2\varepsilon} \nabla \tilde{\Phi}(x-y)g(y)dy + \int_{2\varepsilon \leq |x-y|<1} \nabla \tilde{\Phi}(x-y)g(y)dy + \int_{|x-y| \geq 1} \nabla \tilde{\Phi}(x-y)g(y)dy \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{|x-y|<2\varepsilon} g(y)dy + \frac{1}{2\pi} \int_{2\varepsilon \leq |x-y|<1} \frac{1}{|x-y|} g(y)dy + \frac{1}{2\pi} \int_{|x-y| \geq 1} \frac{1}{|x-y|} g(y)dy \\ &\leq C(\|g\|_{L^1} + \|g\|_{L^\infty}).\end{aligned}$$

以上即可完成该引理的证明. $\square$

由 Φ 和 $\tilde{\Phi}$ 的定义容易发现,

$$\nabla(\Phi - \tilde{\Phi})(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 2\varepsilon, \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{x_i}{|x|} - \frac{1}{2\pi} \frac{x_i}{|x|^2}, & |x| < 2\varepsilon, \end{cases} \quad (3.27)$$

即 $\nabla(\Phi - \tilde{\Phi})$ 只在球的内部有定义. 由此很容易得到如下引理.

引理 3.11 对于任意 $g \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, 有

$$\|\nabla((\Phi - \tilde{\Phi}) * g)\|_{L^\infty} \leq \varepsilon \|g\|_{L^\infty}.$$

证明 通过表达式 (3.27) 容易得出

$$\nabla((\Phi - \tilde{\Phi}) * g) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{|x-y|<2\varepsilon} \frac{x_i - y_i}{|x-y|} g(y)dy - \frac{1}{2\pi} \int_{|x-y|<2\varepsilon} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} g(y)dy \leq \varepsilon \|g\|_{L^\infty}.$$

以上即完成了该引理的证明. $\square$

下面给出牛顿势 Φ 以及其磨光后的势 Φ_ε 之间的差的估计.

引理 3.12 对于任意 $g \in W^{1,q}(\mathbb{R}^2)$, $q > 2$, 有

$$\|\nabla((\Phi_\varepsilon - \Phi) * g)\|_{L^\infty} \leq \varepsilon \|g\|_{W^{1,q}}.$$

证明 根据卷积的性质, 可以将 $\nabla((\Phi_\varepsilon - \Phi) * g)$ 表示为

$$\nabla((\Phi_\varepsilon - \Phi) * g) = j_\varepsilon * (\nabla \Phi * g) - \nabla \Phi * g.$$

令 $h = \nabla \Phi * g$, 则考虑 $j_\varepsilon * h - h$. 利用微分中值定理, 有如下的估计:

$$\begin{aligned}j_\varepsilon * h - h &= \int_{\mathbb{R}^2} J_\varepsilon(x-y)(h(y) - h(x))dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} J_\varepsilon(x-y) \nabla h(\xi) \cdot (y-x)dy \\ &\leq \varepsilon \|\nabla h\|_{L^\infty},\end{aligned} \quad (3.28)$$

其中 ξ 是介于 x 与 y 之间的某个点. 在 (3.28) 中代入 $h = \nabla \Phi * g$, 再结合 Sobolev 嵌入定理和 Poisson 方程的 $W^{2,p}$ 理论, 对于 $q > 2$, 有

$$\|\nabla(\Phi_\varepsilon - \Phi) * g\|_{L^\infty} \leq \varepsilon \|D^2 \Phi * g\|_{L^\infty} \leq \varepsilon \|D^2 \Phi * g\|_{W^{1,q}} \leq \varepsilon \|g\|_{W^{1,q}},$$

即该引理证毕. $\square$

基于引理 3.10–3.12, 可以完成关于方程 (1.1) 的解 ρ 和光滑化后的方程 (1.11) 的解 ρ^ε 之间差的估计, 即命题 1.2 的证明.

命题 1.2 的证明 令 $u = \rho^\varepsilon - \rho$, 将方程 (1.1) 和 (1.11) 相减, 可得

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= \chi(\nabla \cdot (\rho^\varepsilon \nabla c^\varepsilon) - \nabla \cdot (\rho \nabla c)) \\ &= \chi \nabla \cdot (u \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * u) + \chi \nabla \cdot (u \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * (\rho - f)) \\ &\quad + \chi \nabla \cdot (\rho \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * u) + \chi \nabla \cdot (\rho \nabla (\tilde{\Phi}_\varepsilon - \Phi) * (\rho - f)). \end{aligned} \quad (3.29)$$

注意到 u 的初值为 0, 可以将方程 (3.29) 改写为

$$u = \int_0^t \nabla G * (u \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * u + u \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * (\rho - f) + \rho \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * u + \rho \nabla (\tilde{\Phi}_\varepsilon - \Phi) * (\rho - f)) ds =: \sum_{i=1}^4 L_i.$$

其中 $G(t, x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{4\pi t}$ 是热方程的基本解. 下面要估计 $\|u\|_{L^p}$ ($p = 1$ 或者 $p = \infty$). 首先对 L_1 进行估计. 利用卷积型的 Young 不等式、引理 3.10 以及热核的衰减估计有

$$\begin{aligned} \|L_1\|_{L^p} &\leq C(t) \int_0^t \|\nabla G * u(\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * u)\|_{L^p} ds \\ &\leq C(t) \int_0^t \|\nabla G\|_{L^1} \|u\|_{L^p} \|\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * u\|_{L^\infty} ds \\ &\leq C(t) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{L^p} (\|u\|_{L^1} + \|u\|_{L^\infty}) ds. \end{aligned}$$

同样利用卷积型的 Young 不等式、引理 3.10 以及热核的衰减估计, 对 L_2 和 L_3 进行估计如下:

$$\begin{aligned} \|L_2\|_{L^p} &\leq C(t) \int_0^t \|\nabla G * (u \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * (\rho - f))\|_{L^p} ds \\ &\leq C(t) \int_0^t \|\nabla G\|_{L^1} \|u\|_{L^p} \|\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * (\rho - f)\|_{L^\infty} ds \\ &\leq C(t) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{L^p} (\|\rho\|_{L^1 \cap L^\infty} + \|f\|_{L^1 \cap L^\infty}) ds \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \|L_3\|_{L^p} &\leq C(t) \int_0^t \|\nabla G * (\rho \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * u)\|_{L^p} ds \\ &\leq C(t) \int_0^t \|\nabla G\|_{L^1} \|\rho\|_{L^p} \|\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * u\|_{L^\infty} ds \\ &\leq C(t) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|\rho\|_{L^p} \|u\|_{L^1 \cap L^\infty} ds. \end{aligned}$$

最后利用 $\tilde{\Phi}_\varepsilon - \Phi_\varepsilon$ 和 $\Phi_\varepsilon - \Phi$ 对 L_4 进行估计. 首先对 L_4 进行分解如下:

$$\begin{aligned} \|L_4\|_{L^p} &\leq C(t) \int_0^t \|\nabla G * (\rho \nabla (\tilde{\Phi}_\varepsilon - \Phi_\varepsilon) * (\rho - f))\|_{L^p} ds \\ &\quad + C(t) \int_0^t \|\nabla G * (\rho \nabla (\Phi_\varepsilon - \Phi) * (\rho - f))\|_{L^p} ds \end{aligned}$$

$$=: L_{41} + L_{42}.$$

对于 L_{41} , 根据引理 3.11、卷积型的 Young 不等式以及热核的估计, 可得

$$\begin{aligned} L_{41} &\leq C(t) \int_0^t \|\nabla G\|_{L^1} \|\rho\|_{L^p} \|j_\varepsilon * (\nabla(\tilde{\Phi} - \Phi) * (\rho - f))\|_{L^\infty} ds \\ &\leq \varepsilon C(t) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|\rho\|_{L^p} (\|\rho\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty}) ds. \end{aligned}$$

对于 L_{42} , 同样根据引理 3.12、卷积型的 Young 不等式以及热核的衰减估计, 可得

$$\begin{aligned} L_{42} &\leq C(t) \int_0^t \|\nabla G\|_{L^1} \|\rho\|_{L^p} \|\nabla(\Phi_\varepsilon - \Phi) * g\|_{L^\infty} ds \\ &\leq \varepsilon C(t) \int_0^t \|\nabla G\|_{L^1} \|\rho\|_{L^p} \|D^2\Phi * (\rho - f)\|_{L^\infty} ds \\ &\leq \varepsilon C(t) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|\rho\|_{L^p} \|\rho - f\|_{W^{1,q}} ds. \end{aligned}$$

综合上述关于 L_i ($i = 1, \dots, 4$) 的估计, 利用 Sobolev 嵌入不等式有

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^1} + \|u\|_{L^\infty} &\leq C(t) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} (1 + \|\rho\|_{L^1 \cap L^\infty} + \|f\|_{L^1 \cap L^\infty}) (\|u\|_{L^1} + \|u\|_{L^\infty}) ds \\ &\quad + \varepsilon C(t) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|\rho\|_{L^1 \cap L^\infty} (\|\rho\|_{W^{1,q}} + \|f\|_{W^{1,q}}) ds. \end{aligned} \quad (3.30)$$

对关系式 (3.30) 应用 Gronwall 不等式以及引理 3.6、3.8 和 3.9 即可完成该命题的证明. $\square$

3.2 解对控制函数的连续依赖性, 命题 1.3 的证明

由于 f_N 在 $L^p((0, T); W^{1,q})$ 中弱收敛到 f , 所以 $\|f_N\|_{L^p((0, T); W^{1,q})}$ 一致有界. 由上一小节的一系列一致估计有

$$\|\rho[f_N]\|_{L^\infty((0, T); L^\infty)} \leq C(t),$$

其中 $C(t)$ 不依赖于 f_N 的选取. 所以存在它的一个子列 $\rho[f_{N_k}]$ 和函数 ρ 使得

$$\rho[f_{N_k}] \xrightarrow{*} \rho \quad \text{在 } L^\infty((0, T); L^\infty) \text{ 中}.$$

另外由估计

$$\|\rho[f_N]\|_{L^\infty((0, T); L^2)} + \|\rho[f_N]\|_{L^2((0, T); H^1)} \leq C(t),$$

结合方程得到 $\|\partial_t \rho[f_N]\|_{L^2((0, T); H^{-1})}$. 由二阶矩估计 $\|x|^2 \rho[f_N]\|_{L^\infty((0, T); L^1)}$, 应用 Aubin-Lions 紧性引理得到其存在如下强收敛子列:

$$\rho[f_{N_k}] \rightarrow \rho \quad \text{在 } L^s((0, T); L^2) \text{ 中, } \forall s \in [1, \infty).$$

不失一般性, 仍然沿用此同样的符号表示上述子列中收敛到 ρ 的子列. 余下只需要证明这个极限函数 ρ 就是由极限控制函数给出的解, 即 $\rho = \rho[f]$.

由 f_{N_k} 所决定的 $\rho[f_{N_k}]$ 在分部意义下满足如下的方程, 即对于任意测试函数 $\varphi \in L^2((0, T); H^1)$, 都有

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \rho[f_{N_k}] \varphi dx dt = - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \rho[f_{N_k}] \nabla \varphi dx dt + \chi \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \rho[f_{N_k}] \nabla \Phi * (\rho[f_{N_k}] - f_{N_k}) \nabla \varphi dx dt.$$

根据 $\rho[f_{N_k}]$ 的弱收敛性有

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \rho[f_{N_k}] \varphi dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \rho \varphi dx dt$$

和

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \rho[f_{N_k}] \nabla \varphi dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \rho \nabla \varphi dx dt.$$

最后一项的收敛可以表示为

$$\begin{aligned} & \chi \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\rho[f_{N_k}] \nabla \Phi * (\rho[f_{N_k}] - f_{N_k}) - \rho \nabla \Phi * (\rho - f)) \nabla \varphi dx dt \\ &= \chi \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\rho[f_{N_k}] - \rho) \nabla \Phi * (\rho[f_{N_k}] - f_{N_k}) \nabla \varphi dx dt \\ & \quad + \chi \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \rho \nabla \Phi * (\rho[f_{N_k}] - f_{N_k} - (\rho - f)) \nabla \varphi dx dt \\ &\leq C \|\rho[f_{N_k}] - \rho\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}(0, T; L^2)} \|\nabla \Phi * (\rho[f_{N_k}] - f_{N_k})\|_{L^p(0, T; L^\infty)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(0, T; L^2)} \\ & \quad + \chi \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\rho[f_{N_k}] - f_{N_k} - (\rho - f)) \nabla \Phi * (\rho \nabla \varphi) dx dt \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

上述极限中用到了 $\rho[f_{N_k}]$ 的强收敛和 f_N 的弱收敛, 故有

$$\rho = \rho[f].$$

4 平均场极限部分的证明

本节分为两小节, 第一小节证明命题 1.4, 即 N 粒子模型 (1.6) 与 (1.12) 之间的依概率收敛. 第二小节利用相对熵方法证明平均场极限的强收敛, 即证明命题 1.5.

4.1 依概率收敛

在开始计算之前, 给出停时 $\tau(\omega)$ 的概念:

$$\tau(\omega) = \inf \left\{ t \in (0, T) \mid \max_{1 \leq i \leq N} |X_i^{N, \varepsilon}(t) - \bar{X}_i^\varepsilon(t)| \geq N^{-\alpha} \right\}.$$

基于以上停时的概念, 容易得出如下随机过程:

$$S(\omega, t) = N^{2\alpha k} \max_{1 \leq i \leq N} |(X_i^{N, \varepsilon} - \bar{X}_i^\varepsilon)(t \wedge \tau)|^{2k} \leq 1.$$

下面的一般形式的大数定律是证明中的关键.

引理 4.1 (参见文献 [29, 引理 2.1]) 假设 $(\bar{Y}_i)_{i=1,\dots,N}$ 是独立同分布的随机变量, $v \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 是其分布函数的密度, 函数 $U \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ 给定, 考虑集合

$$\mathcal{A}_\theta^i(U, v) = \left\{ \omega \in \Omega : \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N U(\bar{Y}^i - \bar{Y}^j) - U * v(Y^i) \right| > \frac{1}{N^\theta} \right\},$$

令 $\mathcal{A}_\theta^N(U, v) = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{A}_\theta^i(U, v)$. 则对于任意 $\tilde{k} \geq 1$, 如下估计成立:

$$P(\mathcal{A}_\theta^N(U, v)) \leq N \max_{1 \leq i \leq N} P(\mathcal{A}_\theta^i(U, v)) \leq N^{2\tilde{k}(\theta - \frac{1}{2}) + 1} C(\tilde{k}) \|U\|_{L^\infty}^{2\tilde{k}}.$$

接下来给出势函数 $\tilde{\Phi}$ 的估计.

引理 4.2 对于任意 $g \in L^1 \cap L^\infty$, 有

$$\|\nabla^2 \tilde{\Phi} * g\|_{L^\infty} \leq C(\|g\|_{L^1} - \ln 2\varepsilon \|g\|_{L^\infty}).$$

证明 根据 $\tilde{\Phi}$ 的定义, 有

$$|\nabla^2 \tilde{\Phi} * g| \leq \int_{2\varepsilon < |x-y| < 1} \frac{1}{|x-y|^2} g(y) dy + \int_{|x-y| > 1} \frac{1}{|x-y|^2} g(y) dy \leq -C \ln 2\varepsilon \|g\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^1}.$$

故有

$$\|\nabla^2 \tilde{\Phi} * g\|_{L^\infty} \leq -C \ln 2\varepsilon \|g\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^1}.$$

证毕. □

命题 1.4 的证明 对于任意固定的控制函数 $\tilde{f}_N$, 假设 $X_i^{N,\varepsilon}$ 和 $\bar{X}_i^\varepsilon$ 分别是方程 (1.6) 和 (1.12) 的解, 定义停时 $\tau(\omega)$ 为

$$\tau(\omega) = \inf \left\{ t \in (0, T] \mid \max_{1 \leq i \leq N} |X_i^{N,\varepsilon}(t) - \bar{X}_i^\varepsilon(t)| \geq N^{-\alpha} \right\}.$$

通过停时的定义, 定义截断过程 $S(\omega, t)$ 为

$$S(\omega, t) = N^{2\alpha k} \max_{1 \leq i \leq N} |(X_i^{N,\varepsilon} - \bar{X}_i^\varepsilon)(t \wedge \tau)|^{2k} \leq 1,$$

其中 $k \in \mathbb{N}$ 将通过后续证明来确定. 通过 Markov 不等式有

$$\sup_{0 \leq t \leq T} P\left(\max_{1 \leq i \leq N} |X_i^{N,\varepsilon} - \bar{X}_i^\varepsilon| \geq N^{-\alpha}\right) \leq \sup_{0 \leq t \leq T} P(S_t = 1) \leq \sup_{0 \leq t \leq T} E(S_t).$$

对于任意 $t \wedge \tau$, 注意到 $X_i^{N,\varepsilon}$ 和 $\bar{X}_i^\varepsilon$ 满足如下方程:

$$X_i^{N,\varepsilon}(t \wedge \tau) - X_i^{N,\varepsilon}(0) = \int_0^{t \wedge \tau} \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \mu_N(X_i^{N,\varepsilon}(s)) ds + \int_0^{t \wedge \tau} \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \tilde{f}_N(X_i^{N,\varepsilon}(s)) ds + \int_0^{t \wedge \tau} \sqrt{2} dW_s^i \quad (4.1)$$

和

$$\bar{X}_i^\varepsilon(t \wedge \tau) - \bar{X}_i^\varepsilon(0) = \int_0^{t \wedge \tau} \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \rho^\varepsilon(\bar{X}_i^\varepsilon(s)) ds + \int_0^{t \wedge \tau} \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \tilde{f}_N(\bar{X}_i^\varepsilon(s)) ds + \int_0^{t \wedge \tau} \sqrt{2} dW_s^i. \quad (4.2)$$

将方程 (4.1) 和 (4.2) 作差, 同时利用 Itô 公式再取期望可得

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(S(t)) &= N^{2\alpha k} \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} |(X_i^{N,\varepsilon} - \bar{X}_i^\varepsilon)(t \wedge \tau(\omega))|^{2k} \right) \\
 &\leq N^\alpha C(t, k) \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \int_0^{t \wedge \tau} |\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \mu_N(X_i^{N,\varepsilon}(s)) - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \bar{\mu}_N(\bar{X}_i^\varepsilon(s))| S(s)^{\frac{2k-1}{2k}} ds \right) \\
 &\quad + N^\alpha C(t, k) \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \int_0^{t \wedge \tau} |\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \bar{\mu}_N(\bar{X}_i^\varepsilon(s)) - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \rho^\varepsilon(\bar{X}_i^\varepsilon(s))| S(s)^{\frac{2k-1}{2k}} ds \right) \\
 &\quad + N^\alpha C(t, k) \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \int_0^{t \wedge \tau} |\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \tilde{f}_N(X_i^{N,\varepsilon}(s)) - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \tilde{f}_N(\bar{X}_i^\varepsilon(s))| S(s)^{\frac{2k-1}{2k}} ds \right) \\
 &=: K_1 + K_2 + K_3,
 \end{aligned}$$

其中 $\bar{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\bar{X}_i^\varepsilon}$ 为 $\bar{X}_i^\varepsilon$ 粒子的经验测度. 下面分别对 K_i ($i = 1, 2, 3$) 进行估计. 首先考虑 K_1 . 根据 Taylor 展开, 有

$$\begin{aligned}
 K_1 &\leq N^\alpha C(t, k) \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \int_0^{t \wedge \tau} \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon(\bar{X}_i^\varepsilon(s) - \bar{X}_j^\varepsilon(s)) (X_i^{N,\varepsilon} - X_j^{N,\varepsilon} - (\bar{X}_i^\varepsilon - \bar{X}_j^\varepsilon)) \right| S(s)^{\frac{2k-1}{2k}} ds \right) \\
 &\quad + N^\alpha C(t, k) \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \int_0^{t \wedge \tau} \|\nabla^3 \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (X_i^{N,\varepsilon} - X_j^{N,\varepsilon} - (\bar{X}_i^\varepsilon - \bar{X}_j^\varepsilon)) \right|^2 S(s)^{\frac{2k-1}{2k}} ds \right) \\
 &=: K_{11} + K_{12}.
 \end{aligned}$$

对于 K_{12} , 有

$$K_{12} \leq \frac{C(t, k)}{N^\alpha} \|\nabla^3 \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty} \int_0^t \mathbb{E}(S(s)) ds.$$

对于 K_{11} , 有

$$\begin{aligned}
 K_{11} &\leq 2N^\alpha \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \int_0^{t \wedge \tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |\nabla^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon(\bar{X}_i^\varepsilon - \bar{X}_j^\varepsilon)| \max_{1 \leq i \leq N} |X_i^{N,\varepsilon}(s) - \bar{X}_i^\varepsilon(s)| S(s)^{\frac{2k-1}{2k}} ds \right) \\
 &\leq C(t, k) \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \int_0^{t \wedge \tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (|\nabla^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon(\bar{X}_i^\varepsilon - \bar{X}_j^\varepsilon)| - |\nabla^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon| * \rho^\varepsilon(\bar{X}_i^\varepsilon)) S(s) ds \right) \\
 &\quad + C(t, k) \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \int_0^{t \wedge \tau} (|\nabla^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon| * \rho^\varepsilon(\bar{X}_i^\varepsilon)) S(s) ds \right) \\
 &=: K_{111} + K_{112}.
 \end{aligned}$$

对于 K_{112} , 根据引理 4.2, 易得

$$K_{112} \leq C(t, k) \|\nabla^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon\| * \rho^\varepsilon \|_{L^\infty} \int_0^t \mathbb{E}(S(s)) ds \leq C(t, k) (1 - \ln 2\varepsilon) \int_0^t \mathbb{E}(S(s)) ds.$$

对于 K_{111} 的计算, 利用引理 4.1, 取 $U = |\nabla^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon|$, $v = \rho^\varepsilon$, 即

$$A_\theta(|\nabla^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon|, \rho^\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^N A_\theta^i \Rightarrow A_\theta^c(|\nabla^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon|, \rho^\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^N (A_\theta^i)^c.$$

根据引理 4.1 和 4.2, K_{111} 可以如下计算为

$$\begin{aligned} K_{111} &\leq C(t, k) \mathbb{E} \left((\mathbb{I}_{A_\theta^c} + \mathbb{I}_{A_\theta}) \max_{1 \leq i \leq N} \int_0^{t \wedge \tau} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |\nabla^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon(\bar{X}_i^\varepsilon - \bar{X}_j^\varepsilon)| - |\nabla^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon| * \rho^\varepsilon(\bar{X}_i^\varepsilon) \right) S(s) ds \right) \\ &\leq \frac{C(t, k)}{N^\theta} \int_0^t \mathbb{E}(S(s)) ds + C(t, k) \|\nabla^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty} \mathbb{P}(A_\theta) \\ &\leq C(t, k) \int_0^t \mathbb{E}(S(s)) ds + C(t, k, \tilde{k}) \|\nabla^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty} \|\nabla^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty}^{2\tilde{k}} N^{2\tilde{k}(\theta - \frac{1}{2}) + 1}. \end{aligned}$$

事实上, 可以取 $\theta = 0$. 再次利用引理 4.1, 定义

$$A_{\theta_1}(\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon, \rho^\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^N A_{\theta_1}^i,$$

然后同样利用引理 4.1 和 4.2 即可完成 K_2 的证明. 具体证明如下:

$$\begin{aligned} K_2 &\leq N^{2\alpha k} C(t, k) \mathbb{E} \left((\mathbb{I}_{A_{\theta_1}^c} + \mathbb{I}_{A_{\theta_1}}) \max_{1 \leq i \leq N} \int_0^{t \wedge \tau} (\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \bar{\mu}_N - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \rho^\varepsilon)(\bar{X}_i^\varepsilon)^{2k} ds + \int_0^t \mathbb{E}(S(s)) ds \right) \\ &\leq C(t, k) N^{2\alpha k} \left(\frac{1}{N^{2\theta_1 k}} + \|\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty}^{2k} \mathbb{P}(A_{\theta_1}) \right) + \int_0^t \mathbb{E}(S(s)) ds \\ &\leq C(t, k) (N^{(\alpha - \theta_1)2k} + N^{2\alpha k} C(\tilde{k}) \|\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty}^{2(k + \tilde{k})} N^{2\tilde{k}(\theta_1 - \frac{1}{2}) + 1}) + \int_0^t \mathbb{E}(S(s)) ds. \end{aligned}$$

最后进行 K_3 的估计. 利用 Sobolev 嵌入定理和 Poisson 方程解的 $W^{2,p}$ 估计, 对于 $q > 2$, 有

$$\begin{aligned} K_3 &\leq \int_0^t \|D^2(\tilde{\Phi}_\varepsilon * \tilde{f}_N)\|_{L^\infty} \mathbb{E}(S(s)) ds \\ &\leq \int_0^t \|D^2(\tilde{\Phi}_\varepsilon * \tilde{f}_N)\|_{W^{1,q}} \mathbb{E}(S(s)) ds \\ &\leq \int_0^t \|\tilde{f}_N\|_{W^{1,q}} \mathbb{E}(S(s)) ds \\ &\leq \int_0^t l(s) \mathbb{E}(S(s)) ds. \end{aligned}$$

综合以上关于 K_i ($i = 1, 2, 3$) 的估计, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S(t)) &\leq C \int_0^t (1 + N^{-\alpha} \|\nabla^3 \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty} - \ln 2\varepsilon + l(s)) \mathbb{E}(S(s)) ds \\ &\quad + C(t, k) N^{(\alpha - \theta_1)2k} + C(t, k, \tilde{k}) N^{2\tilde{k}(\theta - \frac{1}{2}) + 1} \|\nabla^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty}^{2\tilde{k} + 1} \\ &\quad + C(t, k, \tilde{k}) N^{2\alpha k + 2\tilde{k}(\theta_1 - \frac{1}{2}) + 1} \|\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty}^{2(k + \tilde{k})}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

根据 $\tilde{\Phi}_\varepsilon$ 的定义, 可知

$$\|\nabla^3 \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \varepsilon^{-3}, \quad \|\nabla^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \varepsilon^{-2}, \quad \|\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \varepsilon^{-1}. \quad (4.4)$$

将 (4.4) 代入 (4.3) 并注意到 $\varepsilon = N^{-\beta}$, 可得

$$\mathbb{E}(S(t)) \leq C \int_0^t (1 + N^{3\beta - \alpha} + \ln N^\beta + l(s)) \mathbb{E}(S(s)) ds$$

$$\begin{aligned}
 &+ C(t, k) N^{(\alpha - \theta_1)2k} + C(t, k, \tilde{k}) N^{2\tilde{k}(-\frac{1}{2} + 2\beta) + (2\beta + 1)} \\
 &+ C(t, k, \tilde{k}) N^{2k(\alpha + \beta) + 2\tilde{k}(\theta_1 - \frac{1}{2} + \beta) + 1}.
 \end{aligned}$$

故对于任意 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, 取 $0 < \beta < \min\{\frac{\alpha}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} - \alpha\}$ 且 $\theta_1 \in (\alpha, \frac{1}{2} - \beta)$, 则对于任意 $\gamma > 0$, 存在 k 和 $\tilde{k}$ 使得

$$E(S(t)) \leq CN^{-2\gamma} + C \int_0^t (1 + N^{3\beta - \alpha} + \ln N^\beta + l(s)) E(S(s)) ds. \quad (4.5)$$

对 (4.5) 应用 Gronwall 不等式, 有

$$E(S(t)) \leq CN^{-2\gamma} \exp \left\{ C \int_0^t (1 + \ln N^\beta + l(s)) ds \right\} \leq C(t) N^{-2\gamma} \exp \{ \ln N^{\beta C t} \} \leq C(t) N^{-\gamma}.$$

此时只需取 $\gamma \geq \beta C t$ 即可. □

4.2 相对熵估计和命题 1.5 的证明

命题 1.5 的证明是借助于如下与空间维数无关的相对熵估计、命题 4.1 和 Csiszár-Kullback-Pinsker 不等式得到的, 具体参见文献 [13, 24].

所谓的多粒子问题的相对熵 $\mathcal{H}$ 定义如下:

$$\mathcal{H}(\rho^{N,\varepsilon} | \rho^{\otimes N}) = \frac{1}{N} \mathcal{H}_N(\rho^{N,\varepsilon} | \rho^{\otimes N}) = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{\rho^{N,\varepsilon}}{\rho^{\otimes N}} \log \frac{\rho^{N,\varepsilon}}{\rho^{\otimes N}} \cdot \rho^{\otimes N} dx_1 dx_2 \cdots dx_N.$$

命题 4.1 (相对熵估计) 假设 $\varepsilon = N^{-\beta}$, $0 < \beta < \beta_1$, 则相对熵有如下估计:

$$\mathcal{H}(\rho^{N,\varepsilon} | \rho^{\otimes N}) \leq \frac{C(t)}{N^{2\beta}}.$$

证明 对于任意固定的控制函数 $\tilde{f}_N$, 参见文献 [13] 中关于相对熵的计算, 有

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \mathcal{H}(\rho^{N,\varepsilon} | \rho^{\otimes N}) + \frac{1}{2N} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \sum_{i=1}^N \left| \nabla_{x_i} \log \frac{\rho^{N,\varepsilon}}{\rho^{\otimes N}} \right|^2 \rho^{N,\varepsilon} dx_1 dx_2 \cdots dx_N \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \nabla \Phi * \rho(x_i) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(x_i - x_j) \right|^2 \rho^{N,\varepsilon} dx_1 dx_2 \cdots dx_N \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \tilde{f}_N(x_i) - \nabla \Phi * \tilde{f}_N(x_i)|^2 \rho^{N,\varepsilon} dx_1 dx_2 \cdots dx_N.
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

(4.6) 也可写为

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \mathcal{H}(\rho^{N,\varepsilon} | \rho^{\otimes N}) + \frac{1}{2N} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \sum_{i=1}^N \left| \nabla_{x_i} \log \frac{\rho^{N,\varepsilon}}{\rho^{\otimes N}} \right|^2 \rho^{N,\varepsilon} dx_1 dx_2 \cdots dx_N \\
 &\leq \frac{1}{2} E \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \nabla \Phi * \rho(X_i^{N,\varepsilon}) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(X_i^{N,\varepsilon} - X_j^{N,\varepsilon}) \right|^2 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} E \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \tilde{f}_N(X_i^{N,\varepsilon}) - \nabla \Phi * \tilde{f}_N(X_i^{N,\varepsilon})|^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$=: M_1 + M_2.$$

对于 M_2 的估计相对容易, 根据 Sobolev 嵌入定理以及引理 3.11 和 3.12, 有

$$\begin{aligned} M_2 &\leq \|(\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon - \nabla \Phi_\varepsilon) * \tilde{f}_N\|_{L^\infty}^2 + \|(\nabla \Phi_\varepsilon - \nabla \Phi) * \tilde{f}_N\|_{L^\infty}^2 \\ &\leq \varepsilon^2 \|\tilde{f}_N\|_{L^\infty}^2 + \varepsilon^2 \|D^2 \Phi * \tilde{f}_N\|_{L^\infty}^2 \leq \varepsilon^2 \|\tilde{f}_N\|_{W^{1,q}}^2 \leq \varepsilon^2 t^2(t). \end{aligned}$$

要对 M_1 进行估计, 首先要先对其进行如下分解:

$$\begin{aligned} M_1 &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\nabla \Phi * \rho(X_i^{N,\varepsilon}) - \nabla \Phi_\varepsilon * \rho(X_i^{N,\varepsilon})|^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\nabla \Phi_\varepsilon * \rho(X_i^{N,\varepsilon}) - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \rho(X_i^{N,\varepsilon})|^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \rho(X_i^{N,\varepsilon}) - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \rho^\varepsilon(X_i^{N,\varepsilon})|^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \rho^\varepsilon(X_i^{N,\varepsilon}) - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \rho^\varepsilon(\bar{X}_i^\varepsilon)|^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \rho^\varepsilon(\bar{X}_i^\varepsilon) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(\bar{X}_i^\varepsilon - \bar{X}_j^\varepsilon) \right|^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(\bar{X}_i^\varepsilon - \bar{X}_j^\varepsilon) - \nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon(X_i^{N,\varepsilon} - X_j^{N,\varepsilon})) \right|^2 \right) \\ &=: \sum_{l=1}^6 M_{1l}. \end{aligned}$$

对于 M_{11} 、 M_{12} 和 M_{13} 的估计, 根据引理 3.10–3.12, 有 $M_{11} + M_{12} + M_{13} \leq \varepsilon^2(1 + \|\rho\|_{W^{1,q}}^2)$. 对于 M_{15} , 根据大数定理可以得到

$$M_{15} \leq \frac{1}{N} \|\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty}^2 \leq N^{2\beta-1}.$$

令

$$\mathcal{A}_\alpha = \left\{ \omega \in \Omega \mid \max_{1 \leq i \leq N} |X_i^{N,\varepsilon} - \bar{X}_i^\varepsilon| > N^{-\alpha} \right\},$$

根据命题 1.4, 当 $\beta \in (0, \beta_1)$ 时有 $P(\mathcal{A}_\alpha) \leq \frac{C(\gamma)}{N^\gamma}$. 由此可得到 M_{14} 和 M_{16} 的估计如下:

$$\begin{aligned} M_{14} + M_{16} &\leq C(\gamma) \frac{\|\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty}^2 + \|\nabla \tilde{\Phi}_\varepsilon * \rho^\varepsilon\|_{L^\infty}^2}{N^\gamma} + \frac{\|D^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon\|_{L^\infty}^2 + \|D^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon * \rho^\varepsilon\|_{L^\infty}^2}{N^{2\alpha}} \\ &\leq C(\gamma) \frac{\varepsilon^2}{N^\gamma} + \frac{\varepsilon^4}{N^{2\alpha}} \leq C(N^{2\beta-\gamma} + N^{4\beta-2\alpha}) \\ &\leq CN^{-\frac{2\alpha}{3}}. \end{aligned}$$

综上对于时间 t 积分, 有

$$\mathcal{H}(\rho^{N,\varepsilon} \mid \rho^{\otimes N}) \leq \frac{C(t)}{N^{\min\{2\beta, \frac{2\alpha}{3}\}}} \leq \frac{C(t)}{N^{2\beta}}. \quad (4.7)$$

至此完成该命题的证明. $\square$

致谢 感谢肖老师在人生关键时刻的指点迷津以及教学科研工作的言传身教, 希望不负先生所望, 不负所学, 祝福先生! 感谢赵雨晨在本文的排版录入方面给予的大力支持.

参考文献

- 1 Albi G, Choi Y P, Fornasier M, et al. Mean field control hierarchy. *Appl Math Optim*, 2017, 76: 93–135
- 2 Andersson D, Djehiche B. A maximum principle for SDEs of mean-field type. *Appl Math Optim*, 2011, 63: 341–356
- 3 Averboukh Y, Khlopin D. Pontryagin maximum principle for the deterministic mean field type optimal control problem via the Lagrangian approach. *arXiv:2207.01892*, 2022
- 4 Bayraktar E, Cosso A, Pham H. Randomized dynamic programming principle and Feynman-Kac representation for optimal control of McKean-Vlasov dynamics. *Trans Amer Math Soc*, 2018, 370: 2115–2160
- 5 Bensoussan A, Frehse J, Yam P. *Mean Field Games and Mean Field Type Control Theory*. New York: Springer, 2013
- 6 Blanchet A, Dolbeault J, Perthame B. Two-dimensional Keller-Segel model: Optimal critical mass and qualitative properties of the solutions. *Electron J Differential Equations*, 2006, 2006: 1–33
- 7 Braz e Silva P, Guillén-González F, Perusato C F, et al. Bilinear optimal control of the Keller-Segel logistic model in 2D-domains. *Appl Math Optim*, 2023, 87: 55
- 8 Bresch D, Jabin P-E, Soler J. A new approach to the mean-field limit of Vlasov-Fokker-Planck equations. *arXiv:2203.15747*, 2022
- 9 Bresch D, Jabin P-E, Wang Z. On mean-field limits and quantitative estimates with a large class of singular kernels: Application to the Patlak-Keller-Segel model. *C R Math Acad Sci Paris*, 2019, 357: 708–720
- 10 Carrillo J A, Pimentel E A, Voskanyan V K. On a mean field optimal control problem. *Nonlinear Anal*, 2020, 199: 112039
- 11 Cavagnari G, Lisini S, Orrieri C, et al. Lagrangian, Eulerian and Kantorovich formulations of multi-agent optimal control problems: Equivalence and Gamma-convergence. *J Differential Equations*, 2022, 322: 268–364
- 12 Cesaroni A, Cirant M. One-dimensional multi-agent optimal control with aggregation and distance constraints: Qualitative properties and mean-field limit. *Nonlinearity*, 2021, 34: 1408–1447
- 13 Chen L, Holzinger A, Huo X. Quantitative convergence in relative entropy for a moderately interacting particle system on $\mathbb{R}^d$. *arXiv:2311.01980*, 2023
- 14 Djete M F. Extended mean field control problem: A propagation of chaos result. *Electron J Probab*, 2022, 27: 1–53
- 15 Djete M F, Possamaï D, Tan X. McKean-Vlasov optimal control: The dynamic programming principle. *Ann Probab*, 2022, 50: 791–833
- 16 Djete M F, Possamaï D, Tan X. McKean-Vlasov optimal control: Limit theory and equivalence between different formulations. *Math Oper Res*, 2022, 47: 2891–2930
- 17 Dolbeault J, Perthame B. Optimal critical mass in the two dimensional Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$. *C R Math Acad Sci Paris*, 2004, 339: 611–616
- 18 Fornasier M, Lisini S, Orrieri C, et al. Mean-field optimal control as Gamma-limit of finite agent controls. *European J Appl Math*, 2019, 30: 1153–1186
- 19 Fornasier M, Solombrino F. Mean-field optimal control. *ESAIM Control Optim Calc Var*, 2014, 20: 1123–1152
- 20 Han Y. Entropic propagation of chaos for mean field diffusion with L^p interactions via hierarchy, linear growth and fractional noise. *arXiv:2205.02772*, 2022
- 21 Hao Z, Röckner M, Zhang X. Strong convergence of propagation of chaos for McKean-Vlasov SDEs with singular interactions. *SIAM J Math Anal*, 2024, 56: 2661–2713
- 22 Hauray M, Mischler S. On Kac’s chaos and related problems. *J Funct Anal*, 2014, 266: 6055–6157
- 23 Holzinger A. Rigorous derivations of diffusion systems from moderately interacting particle models. PhD Thesis. Wien: Technische Universität Wien, 2023
- 24 Jabin P-E, Wang Z. Quantitative estimates of propagation of chaos for stochastic systems with $W^{-1,\infty}$ kernels. *Invent Math*, 2018, 214: 523–591
- 25 Lacker D. Limit theory for controlled McKean-Vlasov dynamics. *SIAM J Control Optim*, 2017, 55: 1641–1672
- 26 Lacker D. Hierarchies, entropy, and quantitative propagation of chaos for mean field diffusions. *Probab Math Phys*, 2023, 4: 377–432
- 27 Lasry J M, Lions P L. Mean field games. *Jpn J Math*, 2007, 2: 229–260
- 28 Lazarovici D, Pickl P. A mean field limit for the Vlasov-Poisson system. *Arch Ration Mech Anal*, 2017, 225: 1201–1231
- 29 Li Y, Chen L, Zhang Z. Convergence towards the population cross-diffusion system from stochastic many-particle system. *Commun Math Res*, 2022, 40: 43–63
- 30 McKean H P Jr. Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations. In: *Stochastic Differential*

- Equations (Lecture Series in Differential Equations, Session 7). Arlington: Air Force Office Sci Res, 1967, 41–57
- 31 Nguyen Q H, Rosenzweig M, Serfaty S. Mean-field limits of Riesz-type singular flows. *Ars Inven Anal*, 2022, paper no. 4
 - 32 Oelschläger K. A martingale approach to the law of large numbers for weakly interacting stochastic processes. *Ann Probab*, 1984, 12: 458–479
 - 33 Oelschläger K. A fluctuation theorem for moderately interacting diffusion processes. *Probab Theory Related Fields*, 1987, 74: 591–616
 - 34 Rosenzweig M, Serfaty S. Global-in-time mean-field convergence for singular Riesz-type diffusive flows. *Ann Appl Probab*, 2023, 33: 754–798
 - 35 Ryu S U, Yagi A. Optimal control of Keller-Segel equations. *J Math Anal Appl*, 2001, 256: 45–66
 - 36 Serfaty S. Mean field limit for Coulomb-type flows. *Duke Math J*, 2020, 169: 2887–2935
 - 37 Sznitman A-S. Topics in propagation of chaos. In: *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1464. Berlin: Springer, 1991, 165–251
 - 38 Zeng L, Zhang Z, Zi R. Suppression of blow-up in Patlak-Keller-Segel-Navier-Stokes system via the Couette flow. *J Funct Anal*, 2021, 280: 108967

附录 A

如下两个事实在本文证明中经常被用到. 第一个是关于 Poisson 方程基本解的估计.

引理 A.1 对于任意 $p \in [1, 2)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, 存在 $C = C(p) > 0$ 使得

$$\|\nabla \Phi * g\|_{L^\infty} \leq C(\|g\|_{L^p} + \|g\|_{L^\infty}).$$

对于任意 $g \in W^{1,q}(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$, $q > 2$, 存在 C 使得 $\|\nabla \Phi * \nabla g\|_{L^\infty} \leq C(\|\nabla g\|_{L^1} + \|\nabla g\|_{L^q})$.

证明 对于任意 $x \in \mathbb{R}^2$, 可以将上述的卷积进行如下分解:

$$\nabla \Phi * g(x) = \int_{|x-y| \leq 1} \nabla \Phi(x-y)g(y)dy + \int_{|x-y| > 1} \nabla \Phi(x-y)g(y)dy.$$

注意到对于任意 $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, 有

$$|\nabla \Phi(z)| \leq C_1|z|^{-1}, \quad (\text{A.1})$$

其中 $C_1 = \frac{1}{2\pi}$, 则对于任意 $x \in \mathbb{R}^2$, 根据估计 (A.1), 有

$$\left| \int_{|x-y| \leq 1} \nabla \Phi(x-y)g(y)dy \right| \leq C_1\|g\|_{L^\infty} \int_{|z| \leq 1} |z|^{-1}dz. \quad (\text{A.2})$$

再考虑 $|x-y| > 1$ 的情形. 当 $p > 1$ 时, 有

$$\left| \int_{|x-y| > 1} \nabla \Phi(x-y)g(y)dy \right| \leq C_1\|g\|_{L^p} \left\{ \int_{|z| > 1} |z|^{\frac{-p}{p-1}} dz \right\}^{\frac{p-1}{p}} = C(p)\|g\|_{L^p}. \quad (\text{A.3})$$

当 $p = 1$ 时, 有

$$\left| \int_{|x-y| > 1} \nabla \Phi(x-y)g(y)dy \right| \leq C_1\|g\|_{L^1}. \quad (\text{A.4})$$

结合不等式 (A.2)–(A.4) 即可完成该引理第一部分的证明. 关于第二部分也可以类似证明, 其中在球 B_1 内部需要用到 Hölder 不等式. $\square$

第二个是借助全空间的二阶矩估计, 下面的引理给出了全空间的紧嵌入定理.

引理 A.2 对于任意 $w \in [1, \infty)$, 嵌入

$$H^1 \cap L^1(1 + |x|^2)(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^w \quad (\text{A.5})$$

是紧的.

证明 对于任意 $\{g_n\} \in H^1(\mathbb{R}^2)$, 有 $\{g_n\} \in H^1(B_R)$, 根据有界区域上的紧嵌入定理可知 $\{g_n\}$ 在 $L^w(B_R)$ 中是紧的. 再根据对角线原理知, 对于任意 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, 有 $\{g_n\}$ 在 $L^w(\Omega)$ 中是紧的, 即存在它的一个强收敛子列 (为方便起见, 仍用原记号), 对于任意 $\eta > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$\|g_n - g\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{\eta}{2}.$$

同时又有 $\{g_n\} \in L^1(1 + |x|^2)(\mathbb{R}^2)$, 当 R 充分大时, 有

$$\int_{\mathbb{R}^2} |g_n - g| dx \leq \int_{B_R} |g_n - g| dx + \int_{B_R^c} \frac{|x|^2}{R^2} |g_n - g| dx \leq \frac{\eta}{2} + \frac{C}{R^2} \leq \eta.$$

故 $\{g_n\}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 中紧. 则对于任意 $w \in (1, \infty)$, 根据 Gagliardo-Nirenberg 不等式有

$$\|g_n - g\|_{L^w} \leq \|g_n - g\|_{L^1}^{\frac{1}{w}} \|\nabla(g_n - g)\|_{L^2}^{1 - \frac{1}{w}}.$$

故根据 $\{g_n\}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 中的强紧性可知 $\{g_n\}$ 对任意的 $w \in (1, \infty)$ 强紧. $\square$

The mean field control problem for the two-dimensional Keller-Segel system

Zhao Wang, Yucheng Wang & Li Chen

Abstract In this paper, it is proved, by using the mean field limit theory, that the optimal control of the two-dimensional Keller-Segel system can be obtained as a limit of the corresponding control problem of the interacting stochastic particle system. In these problems, the cost functions are chosen in the same structure which includes the mean field effect. The difficulty arises from the singularity of the fundamental solution of the two-dimensional Poisson equation. Therefore we start with the control problem of a smoothed version of the particle system. In the compactness argument, the Gamma-convergence technique has been used. The important technique step is to show that the compactness of the cost functions implies strong convergence of the mean field limit. It is achieved by using a combination of the relative entropy method and the convergence in probability of the trajectory.

Keywords mean field control, optimal control of PDEs, relative entropy method, mean field limit, convergence in probability

MSC(2020) 35Q93, 60F17, 82C22, 60B10

doi: 10.1360/SSM-2024-0010