次线性期望下独立随机变量列的大偏差和中偏差

高付清*, 徐明周

武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072

E-mail: fgao@whu.edu.cn, mingzhouxu2001@yahoo.com.cn

收稿日期: 2009-11-08; 接受日期: 2011-03-10; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10871153) 资助项目

摘要 本文研究在次线性期望下的独立随机变量列的大偏差和中偏差原理. 利用次可加方法, 我们得到次线性期望下的大偏差原理. 与次线性期望下的中心极限定理相应的中偏差原理也被建立.

关键词 次线性期望 大偏差 中偏差

MSC (2000) 主题分类 60F10

1 引言

受金融中的风险度量及统计中的模型不确定性等问题的推动, Peng^[1, 2] 建立了 G -期望和 G -正态分布等概念. Maccheroni 和 Marinacci^[3, 4] 研究了容度下的大数定律. Peng^[5, 6] 证明了在次线性期望下的相应的大数定律和中心极限定理. 关于 G -期望下的随机分析, 参阅文献 [1, 2, 7]. G -期望下的随机微分方程小扰动问题的大偏差在文献 [8] 中被研究.

本文研究在次线性期望下的独立随机变量列的大偏差和中偏差原理. 在第 2 节, 利用次可加方法我们得到了独立随机变量列部分和的大偏差原理. 在第 3 节, 我们给出文献 [6] 中的中心极限定理相应的中偏差原理. 应用该中心极限定理, 我们获得次线性期望下的一般中偏差下界; 通过截尾方法和 Laplace 渐进积分方法, 在相应的尾容度指数收敛条件下, 我们证明了在次线性期望下独立随机变量列部分和的中偏差上界.

下面介绍关于次线性期望的有关术语和结果.

我们先回顾对应于次线性期望的容度的概念和术语 (参阅文献 [9, 2, 6]). 对一个给定的正整数 d , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示在 $\mathbb{R}^d$ 上的内积且 $|x| = \langle x, x \rangle^{1/2}$. $\mathbb{S}(d)$ 表示所有 $d \times d$ 阶对称矩阵组成的集合, $\mathbb{S}_+(d)$ 表示在 $\mathbb{S}(d)$ 中的所有非负定矩阵组成的集合. 对任意 $R, Q \in \mathbb{S}(d)$, 令 $\langle R, Q \rangle = \text{tr}[RQ]$.

设 Ω 是一完备可分度量空间, 其 Borel σ -代数记为 $\mathcal{B}(\Omega)$. 令 $\mathcal{H}$ 为定义在 Ω 上的实函数组成的线性空间, 它满足以下条件: $C_b(\Omega) \subset \mathcal{H}$ 且若 $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{H}$, 则对每个 $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{H}$, 其中, $C_b(\mathbb{R}^n)$ 表示有界连续函数组成的线性空间. 这里 $\mathcal{H}$ 就是 Ω 上的“随机变量”组成的空间. 设 $C_{l, \text{Lip}}(\mathbb{R}^n)$ 表示满足下面条件的局部 Lipschitz 函数 φ 组成的线性空间:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C(1 + |x|^m + |y|^m)|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $C > 0$ 是依赖 $m \in \mathbb{N}$ 和 φ 的常数.

$\mathcal{H}$ 上的一个次线性期望 $\mathbb{E}$ 是一个从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathbb{R}$ 的泛函, 且满足以下条件:

英文引用格式: Gao F Q, Xu M Z. Large deviations and moderate deviations for independent random variables under sublinear expectations (in Chinese). Sci Sin Math, 2011, 41(4): 337–352, doi: 10.1360/012009-879

- (a) 单调性: 若 $X \geq Y$, 则 $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$;
- (b) 常数不变性: $\mathbb{E}[c] = c$, 对所有的 $c \in \mathbb{R}$;
- (c) 次可加性: $\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X - Y]$;
- (d) 正齐性: $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X]$, 对所有的 $\lambda \geq 0$.

称三元组 $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ 为一个次线性期望空间. 若仅 (c) 和 (d) 成立, 则称 $\mathbb{E}$ 为一个次线性泛函.

设 X_1 和 X_2 分别为次线性期望空间 $(\Omega_1, \mathcal{H}_1, \mathbb{E}_1)$ 和 $(\Omega_2, \mathcal{H}_2, \mathbb{E}_2)$ 上的两个 d -维随机变量. 称它们同分布, 并记为 $X_1 \sim X_2$, 若对所有的 $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathbb{E}_1[\varphi(X_1)] = \mathbb{E}_2[\varphi(X_2)].$$

在一个次线性期望空间 $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ 上, 称随机向量 $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, $Y_i \in \mathcal{H}$ 与另一随机向量 $X = (X_1, \dots, X_m)$, $X_i \in \mathcal{H}$ 在 $\mathbb{E}[\cdot]$ 下独立, 若对每一函数 $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, 有

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(x, Y)]_{x=X}].$$

称映射 $G: \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}(d) \mapsto \mathbb{R}$ 是一个关于 $A \in \mathbb{S}(d)$ 单调的次线性函数, 若对每个 $p, \bar{p} \in \mathbb{R}^d$ 和 $A, \bar{A} \in \mathbb{S}(d)$, 有

$$\begin{cases} G(p + \bar{p}, A + \bar{A}) \leq G(p, A) + G(\bar{p}, \bar{A}), \\ G(\lambda p, \lambda A) = \lambda G(p, A), & \text{对所有的 } \lambda \geq 0, \\ G(p, A) \geq G(p, \bar{A}), & \text{若 } A \geq \bar{A}. \end{cases} \quad (1.1)$$

设 $G: \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}(d) \mapsto \mathbb{R}$ 是一个在 $(0, 0)$ 点连续的关于 $A \in \mathbb{S}(d)$ 单调的次线性函数. 称一对分量都在 $\mathcal{H}$ 上的 d -维随机变量 (X, Y) 在次线性期望 $\mathbb{E}[\cdot]$ 下是 G -正态分布的, 若对每个 $\varphi \in C_{l, \text{Lip}}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, $\varphi(x + \sqrt{t}X, y + tY) \in \mathcal{H}$, 且函数

$$u(t, x, y) := \mathbb{E}(\varphi(x + \sqrt{t}X, y + tY)), \quad t \geq 0, (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,$$

满足在 $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上的 G -热方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - G(D_y u, D_x^2 u) = 0, \quad u(0, x, y) = \varphi(x, y),$$

其中 $D_y = (\partial_{y_i})_{i=1}^d$, $D_x^2 = (\partial_{x_i x_j}^2)_{i,j=1}^d$.

由 [6] 中的推论 4.9, 若 (X, Y) 和 $(\bar{X}, \bar{Y})$ 都是具有相同 G 的 G -正态分布的, 即:

$$G(p, A) = \mathbb{E} \left(\langle p, Y \rangle + \frac{1}{2} \langle AX, X \rangle \right) = \mathbb{E} \left(\langle p, \bar{Y} \rangle + \frac{1}{2} \langle A\bar{X}, \bar{X} \rangle \right), \quad \text{对所有的 } (p, A) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}(d),$$

则 $(X, Y) \sim (\bar{X}, \bar{Y})$. 设 (X, Y) 是 G -正态分布的, 则由 [6] 中的命题 4.1, 存在一个有界子集 $\Theta \in \mathbb{S}_+(d)$ 使得

$$\frac{1}{2} \mathbb{E}(\langle AX, X \rangle) = G(0, A) = \frac{1}{2} \sup_{Q \in \Theta} \text{tr}(AQ), \quad A \in \mathbb{S}(d). \quad (1.2)$$

记 X 的分布为 $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, \Theta)$.

在本文中, 我们总假定 $\mathbb{E}$ 是正则的, 即

$$\text{对所有的 } \{X_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}, X_n(\omega) \downarrow 0, \omega \in \Omega \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = 0.$$

令 $\mathcal{M}$ 表示在 Ω 上的所有概率测度组成的全体. 由 [6] 中的引理 2.4 和 [9] 中的定理 5, 存在 $\mathcal{M}$ 中的一个相对紧子集 $\mathcal{P}$ 使得

$$\mathbb{E}(X) = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P(X), \quad \text{对所有的 } X \in \mathcal{H}.$$

注 1.1 设 $G: \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}(d) \mapsto \mathbb{R}$ 是一个在 $(0, 0)$ 点连续的关于 $A \in \mathbb{S}(d)$ 单调的次线性函数. 则由文献 [9, 6], 存在一个正则的次线性期望空间 $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ 和一个定义在 $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ 上的服从 G -正态分布的随机向量 (X, Y) .

对任意 Borel 可测函数 X , 定义

$$\bar{\mathbb{E}}(X) = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P(X), \quad c(A) = \bar{\mathbb{E}}(I_A), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\Omega) \quad (1.3)$$

和

$$\mathbb{L}^1 = \{X \in \mathcal{B}(\Omega); \bar{\mathbb{E}}(|X|) < \infty\}.$$

则 $c(\cdot)$ 是一个 Choquet 容度 (参阅文献 [10, 9]).

称定义在 Ω 上的取值于一个拓扑空间的函数 X 是拟连续的, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在满足 $c(O) < \varepsilon$ 的开集 O 使得 $X|_{O^c}$ 是连续的. 称集合 A 是极集, 若 $c(A) = 0$. 称性质“拟几乎处处” (q.s.) 成立, 若它在一个极集外都成立.

令 $\mathcal{L}^1(\Omega)$ 是 $\mathcal{H}$ 关于半范数 $\mathbb{E}(|\cdot|)$ 的拓扑完备化空间. 则 $\mathbb{E}$ 可唯一地被延拓为从 $\mathcal{L}^1(\Omega)$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射, 仍记该映射为 $\mathbb{E}$. 令 $\mathbb{L}_c^1$ 表示 $\mathcal{L}^1(\Omega)$ 关于拟几乎处处相等关系的商空间, 则 $(\mathbb{L}_c^1, \mathbb{E}(|\cdot|))$ 是一个 Banach 空间 (参阅文献 [9]).

$$\mathbb{L}_c^1 = \left\{ X \in \mathbb{L}^1; X \text{ 是拟连续的且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{E}}(|X| I_{\{|X| > n\}}) = 0 \right\},$$

且对任意的 $X \in \mathbb{L}_c^1$,

$$\mathbb{E}(X) = \bar{\mathbb{E}}(X). \quad (1.4)$$

下列单调收敛定理同样成立 (参阅文献 [9]):

$$X_n \in \mathbb{L}_c^1, \quad X_n \downarrow X, \text{ q.s.} \implies \mathbb{E}(X_n) \downarrow \bar{\mathbb{E}}(X). \quad (1.5)$$

由 $\bar{\mathbb{E}}$ 的定义, 下列结果显然成立:

$$X_n \in \mathcal{B}(\Omega), \quad X_n \uparrow X, \text{ q.s.}, \quad E_P(X_1) > -\infty, \quad \text{对所有的 } P \in \mathcal{P} \implies \bar{\mathbb{E}}(X_n) \uparrow \bar{\mathbb{E}}(X). \quad (1.6)$$

本节最后我们给出一个后面要用到的逼近结果.

引理 1.1 设次线性期望空间 $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ 上的 d -维随机变量列 $\{X_i, i = 1, \dots, m\}$ 满足条件: 对任意的 $i = 1, \dots, m-1$, X_{i+1} 与 $(X_1, \dots, X_i)$ 独立.

(1) 若 $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ 是从 $\mathbb{R}^d \mapsto [0, +\infty)$ 的下半连续函数, 则

$$\bar{\mathbb{E}}(\varphi_1(X_1) \cdots \varphi_m(X_m)) = \bar{\mathbb{E}}(\varphi_1(X_1)) \cdots \bar{\mathbb{E}}(\varphi_m(X_m)).$$

(2) 设 $\psi_1, \dots, \psi_m$ 是从 $\mathbb{R}^d \mapsto [0, +\infty)$ 的上半连续函数. 若存在一个连续函数 Ψ , 使得 $\Psi(X_i) \in \mathbb{L}_c^1$, $\psi_i \leq \Psi$, 对任意的 $i = 1, \dots, m$, 则

$$\bar{\mathbb{E}}(\psi_1(X_1) \cdots \psi_m(X_m)) = \bar{\mathbb{E}}(\psi_1(X_1)) \cdots \bar{\mathbb{E}}(\psi_m(X_m)).$$

证明 (1) 选择 $\varphi_{i,n} \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $i = 1, \dots, m$, $n \geq 1$ 使得, 对任意的 $i = 1, \dots, m$, $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\varphi_{i,n}(x) \geq 0, \quad \varphi_{i,n}(x) \uparrow \varphi_i(x).$$

则由 (1.6),

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}(\varphi_1(X_1) \cdots \varphi_m(X_m)) &= \bar{\mathbb{E}}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{1,n}(X_1) \cdots \varphi_{m,n}(X_m)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{E}}(\varphi_{1,n}(X_1) \cdots \varphi_{m,n}(X_m)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{E}}(\varphi_{1,n}(X_1)) \cdots \bar{\mathbb{E}}(\varphi_{m,n}(X_m)) = \bar{\mathbb{E}}(\varphi_1(X_1)) \cdots \bar{\mathbb{E}}(\varphi_m(X_m)). \end{aligned}$$

(2) 选择 $\varphi_{i,n} \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $i = 1, \dots, m$, $n \geq 1$, 使得对任意的 $i = 1, \dots, m$, $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\varphi_{i,n}(x) \geq 0, \quad \varphi_{i,n}(x) \uparrow \Psi(x) - \psi_i(x).$$

令 $\psi_{i,n} = \Psi(x) - \varphi_{i,n}(x)$. 则 $\psi_{i,n}(x)$ 是连续的, 且

$$\psi_{i,n}(x) \geq 0, \quad \psi_{i,n}(x) \downarrow \psi_i(x).$$

由 (1) 和 $\Psi(X_i) \in \mathbb{L}_c^1$, 对所有的 $i = 1, \dots, m$, 有

$$\bar{\mathbb{E}}(\psi_{1,n}(X_1) \cdots \psi_{m,n}(X_m)) = \mathbb{E}(\psi_{1,n}(X_1)) \cdots \mathbb{E}(\psi_{m,n}(X_m)) < \infty,$$

且 $\psi_{1,n}(X_1) \cdots \psi_{m,n}(X_m) \in \mathbb{L}_c^1$. 所以, 由 (1.5),

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}(\psi_1(X_1) \cdots \psi_m(X_m)) &= \bar{\mathbb{E}}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{1,n}(X_1) \cdots \psi_{m,n}(X_m)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\psi_{1,n}(X_1) \cdots \psi_{m,n}(X_m)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\psi_{1,n}(X_1)) \cdots \mathbb{E}(\psi_{m,n}(X_m)) = \bar{\mathbb{E}}(\psi_1(X_1)) \cdots \bar{\mathbb{E}}(\psi_m(X_m)). \end{aligned}$$

注 1.2 类似地, 若 $X \sim Y$, 则对任意开子集 O 和闭子集 F , 有

$$c(X \in O) = c(Y \in O), \quad c(X \in F) = c(Y \in F).$$

2 大偏差原理

在本节中我们证明在次线性期望 $\mathbb{E}$ 下的独立的 $\mathbb{R}^d$ - 值的随机变量列的大偏差原理. 本节的主要结果是下面的定理.

定理 2.1 设定义在次线性期望空间 $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ 上的一系列 d - 维随机变量 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足以下条件:

- (i) 每个 X_{i+1} 与 $(X_1, \dots, X_i)$ 独立, 且 $X_{i+1} \sim X_i$, $i = 1, 2, \dots$;
- (ii) 存在一个 $\delta > 0$, 使得 $\bar{\mathbb{E}}[e^{\delta|X_1|}] < \infty$.

则存在一个下半连续函数 $I: \mathbb{R}^d \mapsto [0, \infty]$, 使得对任意 $r \in [0, \infty)$, $\{x; I(x) \leq r\}$ 是紧的, 对任意开集 $O \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \in O\right) \geq - \inf_{x \in O} I(x),$$

且对任意闭集 $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \in F\right) \leq - \inf_{x \in F} I(x).$$

进一步, 若对所有的 $\delta > 0$, $\bar{\mathbb{E}}[e^{\delta|X_1|}] < \infty$, 则

$$I(x) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \{ \langle x, \alpha \rangle - \log \bar{\mathbb{E}}(e^{\langle \alpha, X_1 \rangle}) \}.$$

注 2.1 因为 X 是拟连续的, 对任意的 $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $e^{\langle \alpha, X \rangle}$ 同样也是拟连续的, 且对任意的 $\gamma < \delta$, $e^{\gamma|X|} \in \mathbb{L}_c^1$.

上定理的证明与 [8] 中关于 G -Brown 运动的大偏差的证明类似. 首先, 对每个开的凸集 A , 利用磨光估计法, 证明 $f_A(N) := -\log c(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \in A)$ 关于 $N \geq 1$ 是次可加函数. 然后利用标准的次可加方法 (参阅文献 [11]), 得到相应的大偏差原理. 注意到在次线性期望下 Varadhan 积分引理仍然有效 (参阅文献 [8]), 利用在次线性期望下的 Varadhan 积分引理可得到速率函数的变分表示. 对 G -正态分布的随机变量, 本文也给出了 $\log \bar{\mathbb{E}}(e^{\langle \alpha, X_1 \rangle})$ 的精确表示, 即下列结果成立.

推论 2.1 假定 $G: \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}(d) \mapsto \mathbb{R}$ 是一个在 $(0, 0)$ 点连续的关于 $A \in \mathbb{S}(d)$ 单调的次线性函数. 设 $\{(X_n, Y_n), n \geq 1\} \subset \mathcal{H}$ 是一列服从 G -正态分布的随机变量且满足对 $i = 1, 2, \dots$, (X_{i+1}, Y_{i+1}) 与 $((X_1, Y_1), \dots, (X_i, Y_i))$ 独立. 则

(1) 定理 2.1 的结论对 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i, Y_i)$ 成立, 且

$$I(x, y) = \sup_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{2d}} \{ \langle x, \alpha \rangle + \langle y, \beta \rangle - G(\beta, \alpha \alpha^\tau) \}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{2d},$$

其中 α^τ 表示列向量 α 的转置;

(2) 定理 2.1 的结论对 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i + Y_i)$ 成立, 且

$$I(x) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \{ \langle x, \alpha \rangle - G(\alpha, \alpha \alpha^\tau) \}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

特别地, 定理 2.1 的结论对 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ 成立, 且

$$I(x) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \{ \langle x, \alpha \rangle - G(0, \alpha \alpha^\tau) \}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

进一步, 若 $X_1 \sim N(0, \Theta)$, 对某固定的 $0 < \underline{\sigma}^2 \leq \bar{\sigma}^2 < \infty$, $\Theta := \{\theta \in \mathbb{S}(d)_+; \underline{\sigma}^2 I_{d \times d} \leq \theta \leq \bar{\sigma}^2 I_{d \times d}\}$, 则

$$\frac{1}{2\bar{\sigma}^2} |x|^2 \leq I(x) \leq \frac{1}{2\underline{\sigma}^2} |x|^2.$$

证明 我们知 (参阅文献 [2, 第 2229 页] 和 [6, 例 4.3]) 对任意的 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{2d}$, $k \geq 1$,

$$\mathbb{E}(|\langle \alpha, X_1 \rangle|^{2k}) \leq (2k-1)!! (2G(0, \alpha \alpha^\tau))^k, \quad \mathbb{E}(|\langle \beta, Y_1 \rangle|^k) \leq |G(\beta, 0)|^k.$$

故 $\bar{\mathbb{E}}(e^{\langle \alpha, X_1 \rangle + \langle \beta, Y_1 \rangle})$ 存在. 令 $G_n(p, A) = G(p/n, A/n)$. 假定对任意的 $i = 1, \dots, n$, $Z_i^{(n)} = (X_i^{(n)}, Y_i^{(n)})$ 是 G_n -正态分布的, 且对任意的 $i = 1, 2, \dots, n-1$, $Z_{i+1}^{(n)}$ 与 $(Z_1^{(n)}, \dots, Z_i^{(n)})$ 独立. (关于 $\{Z_i^{(n)}, i \geq 1\}$ 的存在性参阅文献 [6] 和注 1.1). 则 $Z_1^{(n)} + \dots + Z_n^{(n)} \sim (X_1, Y_1)$. 对给定的 $\alpha \in \mathbb{R}^d, \beta \in \mathbb{R}^d$, 由引理 1.1,

$$\bar{\mathbb{E}}(e^{\langle \alpha, X_1 \rangle + \langle \beta, Y_1 \rangle}) = (\bar{\mathbb{E}}(e^{\langle \alpha, X_1^{(n)} \rangle + \langle \beta, Y_1^{(n)} \rangle}))^n.$$

应用函数 e^x 在 0 点的 Taylor 展开式, 我们得到

$$\bar{\mathbb{E}}(e^{\langle \alpha, X_1^{(n)} \rangle + \langle \beta, Y_1^{(n)} \rangle}) = \bar{\mathbb{E}} \left(1 + \langle \alpha, X_1^{(n)} \rangle + \langle \beta, Y_1^{(n)} \rangle + \frac{1}{2} (\langle \alpha, X_1^{(n)} \rangle + \langle \beta, Y_1^{(n)} \rangle)^2 + R_n \right)$$

$$= \bar{\mathbb{E}} \left(1 + \langle \beta, Y_1^{(n)} \rangle + \frac{1}{2} (\langle \alpha, X_1^{(n)} \rangle + \langle \beta, Y_1^{(n)} \rangle)^2 + R_n \right),$$

其中 $R_n = e^{\langle \alpha, X_1^{(n)} \rangle + \langle \beta, Y_1^{(n)} \rangle} - (1 + \langle \beta, Y_1^{(n)} \rangle + \frac{1}{2} (\langle \alpha, X_1^{(n)} \rangle + \langle \beta, Y_1^{(n)} \rangle)^2)$, 满足

$$|R_n| \leq \frac{1}{6} |\langle \alpha, X_1^{(n)} \rangle + \langle \beta, Y_1^{(n)} \rangle|^3 \exp\{|\langle \alpha, X_1^{(n)} \rangle + \langle \beta, Y_1^{(n)} \rangle|\}.$$

容易得到

$$\mathbb{E}(|R_n|) = o(1/n)$$

和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{E}(|(\langle \alpha, X_1^{(n)} \rangle + \langle \beta, Y_1^{(n)} \rangle)^2 - \langle \alpha, X_1^{(n)} \rangle^2|) = 0.$$

再由 $\mathbb{E}(\langle \beta, Y_1^{(n)} \rangle + \frac{1}{2} \langle \alpha, X_1^{(n)} \rangle^2) = \frac{1}{n} G(\beta, \alpha \alpha^\tau)$, 我们有

$$\log \bar{\mathbb{E}}(e^{\langle \alpha, X_1 \rangle + \langle \beta, Y_1 \rangle}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 + \frac{1}{n} G(\beta, \alpha \alpha^\tau) \right) = G(\beta, \alpha \alpha^\tau).$$

因此, 由定理 2.1 可得到推论的结论.

2.1 弱大偏差

引理 2.1 对任意的 $N \in \mathbb{N}$ 和开的凸集 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, 定义

$$f_A(N) := -\log c \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \in A \right).$$

则 $f_A(\cdot)$ 是一个次可加函数, 且要么 $f_A \equiv +\infty$, 要么当 N 充分大时, $f_A(N) < +\infty$. 进一步,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} f_A(N)$$

存在.

证明 我们只需证第一个结论, 因为第二个结论是第一个结论的推论 (参阅文献 [11–13]). 对 $N \in \mathbb{N}$ 和开的凸集 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, 令

$$\bar{S}_N := \bar{S}_N^0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i, \quad \bar{S}_N^M := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_{M+k}.$$

则 $\bar{S}_{M+N} = \frac{M}{M+N} \bar{S}_M + \frac{N}{M+N} \bar{S}_N^M$. 因此, 由 A 的凸性, 有 $\{\bar{S}_M \in A\} \cap \{\bar{S}_N^M \in A\} \subset \{\bar{S}_{M+N} \in A\}$, 且由引理 1.1,

$$c(\bar{S}_M \in A) c(\bar{S}_N \in A) \leq c(\bar{S}_{M+N} \in A). \quad (2.1)$$

故 f_A 是次可加的.

剩下的只需证明 $f_A \equiv +\infty$, 或 $f_A(N) < +\infty$ 成立, 对充分大的 N . 为此, 假设对某个 M , $c(\bar{S}_M \in A) > 0$. 则 $A \neq \emptyset$ 且存在一个紧子集 $K \subset A$, 使得 $c(\bar{S}_M \in K) > 0$. 令 F 是 K 的凸闭包. 则 $F \subset A$ 也是紧的且 $c(\bar{S}_M \in F) > 0$. 令 $L = \sup_{x \in F} |x|$ 且设 $\epsilon > 0$ 使得 $\inf_{x \in F, y \in A^c} |x - y| > 2\epsilon$. 再选择 $N_0 > M$,

使得 $\alpha = \min_{1 \leq k \leq M} c(|\frac{X_1 + \dots + X_k}{N_0}| < \epsilon) > 0$ 且 $\frac{ML}{N_0} \leq \epsilon$. 事实上, 选择 $N_0 > \max\{M \frac{\log \mathbb{E}(e^{\delta|X_1|})}{\epsilon \delta}, \frac{ML}{\epsilon}\}$, 则 $\frac{ML}{N_0} \leq \epsilon$ 且

$$\max_{1 \leq k \leq M} c\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_k}{N_0}\right| \geq \epsilon\right) \leq \mathbb{E}(e^{\delta|X_1|})^M e^{-N_0 \delta \epsilon} < 1.$$

故对 $N \geq M$, 类似于 (2.1) 中的证明, 我们可得

$$c(\bar{S}_N \in A) \geq c\left(\frac{Mq_N}{N} \bar{S}_{Mq_N} \in F^\epsilon\right) c\left(\left|\frac{r_N}{N} \bar{S}_{r_N}\right| < \epsilon\right),$$

其中 $F^\epsilon = \{y; \inf_{x \in F} |x - y| < \epsilon\}$, $q_N = [N/M]$ 和 $r_N = N - [N/M]M$. 注意到对 $N \geq N_0$, 若 $\bar{S}_{Mq_N} \in F$, 则有 $\inf_{x \in F} |\frac{Mq_N}{N} \bar{S}_{Mq_N} - x| \leq \frac{r_N}{N} L < \epsilon$. 因此, 我们有

$$c\left(\frac{Mq_N}{N} \bar{S}_{Mq_N} \in F^\epsilon\right) \geq c(\bar{S}_{Mq_N} \in F) \geq (c(\bar{S}_M \in F))^{q_N}.$$

故对 $N \geq N_0$, $c(\bar{S}_N \in A) \geq \alpha(c(\bar{S}_M \in F))^{q_N} > 0$.

现在定义

$$I(x) := -\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \in B(x, \delta)\right),$$

其中 $B(x, \delta) = \{y; |x - y| < \delta\}$. 则容易推得 $I(x), x \in \mathbb{R}^d$ 是一个下半连续且凸的函数.

引理 2.2 对任意的开集 $O \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \in O\right) \geq -\inf_{x \in O} I(x),$$

和对任意的紧子集 $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \in K\right) \leq -\inf_{x \in K} I(x).$$

证明 假定 $O \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 是一个开子集. 给定 $x \in O$, 我们可选择一个开的凸集 B 使得 $x \in B \subset O$. 则有,

$$-I(x) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \in B\right) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \in O\right).$$

故

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \in O\right) \geq -\inf_{x \in O} I(x).$$

再假定 $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 为一个紧的子集. 对任意的 $\varepsilon > 0$, $x \in K$, 选择 $\delta_x > 0$ 使得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \in B(x, \delta_x)\right) \leq -I(x) + \varepsilon.$$

再选择有限个点 $x_1, \dots, x_l \in K$ 使得 $K \subset \bigcup_{i=1}^l B(x_i, \delta_{x_i})$. 因此

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \in K\right) \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left(l \left(\max_{1 \leq i \leq l} c(\bar{S}_N \in B(x_i, \delta_{x_i}))\right)\right)$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq l} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c(\bar{S}_N \in B(x_i, \delta_{x_i})) \leq - \inf_{x \in K} I(x) + \varepsilon,$$

从而得到

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \in K\right) \leq - \inf_{x \in K} I(x).$$

2.2 指数胎紧性

引理 2.3

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c(|\bar{S}_N| > \ell) = -\infty.$$

证明 由引理 1.1,

$$\bar{\mathbb{E}}(e^{\delta \sum_{k=1}^N |X_k|}) = (\bar{\mathbb{E}}(e^{\delta |X_1|}))^N.$$

因此

$$c(|\bar{S}_N| > \ell) \leq \bar{\mathbb{E}}(e^{N\delta |\bar{S}_N|}) e^{-N\delta \ell} \leq \bar{\mathbb{E}}(e^{\delta (\sum_{k=1}^N |X_k|)}) e^{-N\delta \ell} = (\bar{\mathbb{E}}(e^{\delta |X_1|}))^N e^{-N\delta \ell},$$

从而该引理结论成立.

由引理 2.2 和 2.3, 我们得到定理 2.1 中的大偏差结果, 即:

定理 2.2 对任意的 $l \in [0, \infty)$, $\{x; I(x) \leq l\}$ 是紧的, 且对任意的开子集 $O \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \in O\right) \geq - \inf_{x \in O} I(x),$$

和对任意的闭子集 $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \in F\right) \leq - \inf_{x \in F} I(x).$$

2.3 速率函数

现在我们证明, 若 $\bar{\mathbb{E}}[e^{\delta |X_1|}] < \infty$ 对所有的 $\delta > 0$, 则 $I(x) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \{\langle x, \alpha \rangle - \log \bar{\mathbb{E}}(e^{\langle \alpha, X_1 \rangle})\}$, 对所有的 $x \in \mathbb{R}^d$. 首先, 下面的引理是在次线性期望下的 Varadhan 积分引理, 它的证明与其在概率空间情形的证明完全类似 (参阅文献 [8]).

引理 2.4 设 $\{Z_N, N \geq 1\}$ 是一个 d -维随机变量列且 $I: \mathbb{R}^d \mapsto [0, \infty]$ 满足对任意的 $l \in [0, \infty)$, $\{I \leq l\}$ 是紧的.

(1) 若对 $\mathbb{R}^d$ 中的任意开子集 O , 有

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c(Z_N \in O) \geq - \inf_{x \in O} I(x),$$

则对任意下半连续函数 $\Phi: \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \bar{\mathbb{E}}(\exp \{N\Phi(Z_N)\}) \geq \sup \{\Phi(x) - I(x); \Phi(x) \wedge I(x) < +\infty\}.$$

(2) 若对 $\mathbb{R}^d$ 中的任意闭子集 F , 有

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log c(Z_N \in F) \leq - \inf_{x \in F} I(x),$$

则对任意上半连续函数 $\Phi: \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$, 如果它满足对某个 $\delta > 0$,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \bar{\mathbb{E}}(\exp\{(1+\delta)N\Phi(Z_N)\}) < \infty,$$

那么

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \bar{\mathbb{E}}(\exp\{N\Phi(Z_N)\}) \leq \sup\{\Phi(x) - I(x); x \in \mathbb{R}^d\}.$$

引理 2.5 若对所有的 $\delta > 0$, $\bar{\mathbb{E}}[e^{\delta|X_1|}] < \infty$, 则

$$I(x) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \{\langle x, \alpha \rangle - \log \bar{\mathbb{E}}(e^{\langle \alpha, X_1 \rangle})\}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

证明 由引理 1.1, 有 $\bar{\mathbb{E}}(e^{\sum_{k=1}^N \langle X_k, \alpha \rangle}) = (\bar{\mathbb{E}}(e^{\langle X_1, \alpha \rangle}))^N$. 故

$$\frac{1}{N} \log \bar{\mathbb{E}}(e^{N \langle \sum_{i=1}^N \frac{X_i}{N}, \alpha \rangle}) = \log \bar{\mathbb{E}}(e^{\langle X_1, \alpha \rangle}).$$

再利用定理 2.2 和引理 2.4, 我们有 $\log \bar{\mathbb{E}}(e^{\langle X_1, \alpha \rangle}) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \{\langle x, \alpha \rangle - I(x)\}$, 因此, 引理的结论成立.

3 中偏差原理

在本节中, 我们给出一般的中偏差下界以及在尾容度指数收敛条件下的中偏差上界. Peng^[6] 的中心极限定理和 G -正态分布的随机变量列的大偏差原理 (推论 2.1) 在下界的证明中起到重要的作用. 利用截尾方法和 Laplace 渐进积分方法, 我们证明了大偏差上界成立. 关于概率空间中的独立随机变量列的中偏差原理, 参阅文献 [14] 及其参考文献.

在本节中, 总假定 $\{(X_n, Y_n), n \geq 1\}$ 是 $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ 上的一列 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ -值随机变量. 假设

- (i) 对每个 $i = 1, 2, \dots$, $(X_{i+1}, Y_{i+1}) \sim (X_i, Y_i)$, (X_{i+1}, Y_{i+1}) 和 $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_i, Y_i)\}$ 独立;
- (ii) $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[-X_1] = 0$;
- (iii) 存在一个 $\delta \in (0, 1)$, 使得 $\bar{\mathbb{E}}[|X_1|^{2+\delta}] < \infty$ 且 $\bar{\mathbb{E}}[|Y_1|^2] < \infty$.

设 $\{a(n); n \geq 1\}$ 是一个正实数序列, 且它满足: 当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\frac{n}{a(n)} \uparrow \infty, \quad \frac{a(n)}{n^{1/2}} \uparrow \infty.$$

关于中偏差下界, 我们有下面结果.

定理 3.1 对任意开子集 $O \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^2(n)} \log c\left(\frac{1}{a(n)} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \in O\right) \geq -\inf_{x \in O} J(x), \quad (3.1)$$

其中

$$J(x) := \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \left\{ \langle x, \alpha \rangle - \mathbb{E} \left(\langle \alpha, Y_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \alpha \alpha^\tau X_1, X_1 \rangle \right) \right\}. \quad (3.2)$$

中偏差上界的主要结果是下面的定理.

定理 3.2 假定

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^2(n)} \log(nc(\max\{|X_1|, |Y_1|\} \geq a(n))) = -\infty. \quad (3.3)$$

则对在 $\mathbb{R}^d$ 中的任何闭集 F ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^2(n)} \log c \left(\frac{1}{a(n)} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \in F \right) \leq - \inf_{x \in F} J(x). \quad (3.4)$$

因为

$$\frac{1}{\log \log n} \log(nc(|X_1| \geq \sqrt{n \log \log n})) \leq \frac{1}{\log \log n} \log \frac{\bar{\mathbb{E}}(|X_1|^{2+\delta})}{n^{\delta/2}(\log \log n)^{(2+\delta)/2}} = -\infty,$$

我们得到下面的推论.

推论 3.1 对任意的 $r > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \log n} \log c \left(\frac{1}{\sqrt{n \log \log n}} \left| \sum_{i=1}^n X_i \right| > r \right) = - \inf_{|x| > r} J_0(x), \quad (3.5)$$

其中

$$J_0(x) := \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \left\{ \langle x, \alpha \rangle - \frac{1}{2} \mathbb{E}(\langle \alpha \alpha^T X_1, X_1 \rangle) \right\}. \quad (3.6)$$

注 3.1 若对 $0 < \underline{\sigma} \leq \bar{\sigma} < \infty$, 满足 $\underline{\sigma}^2 |\alpha|^2 \leq \mathbb{E}(\langle \alpha \alpha^T X_1, X_1 \rangle) \leq \bar{\sigma}^2 |\alpha|^2$, 则

$$\frac{1}{2\bar{\sigma}^2} |x|^2 \leq J_0(x) \leq \frac{1}{2\underline{\sigma}^2} |x|^2.$$

由推论 3.1, 利用标准方法可得到对每个 $r > 1$,

$$c \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{[r^n]} X_i}{\sqrt{2r^n \log \log r^n}} < \underline{\sigma} \text{ 和 } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{[r^n]} X_i}{\sqrt{2r^n \log \log r^n}} > \bar{\sigma} \right) = 0.$$

推论 3.2 若对某个 $\epsilon > 0$, $\bar{\mathbb{E}}(e^{\epsilon|X_1|}) < \infty$, $\bar{\mathbb{E}}(e^{\epsilon|Y_1|}) < \infty$, 则定理 3.1 和 3.2 的结论成立.

3.1 下界的证明

定理 3.1 的证明 令

$$S_n^{(1)} = \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_n^{(2)} = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

对固定的 $t > 0$, 令 (参阅文献 [15, 16]) $p_n := \lfloor \frac{n^2 t^2}{a^2(n)} \rfloor$, $q_n := \lfloor \frac{n}{p_n} \rfloor$, $r_n := \frac{a(n)}{t q_n}$. 则 $0 \leq n - p_n q_n \leq p_n$, $\frac{n - p_n q_n}{a^2(n)} \leq \frac{p_n}{a^2(n)} \rightarrow 0$. 对任意固定的 $x_0 \in O$, 选择 $\epsilon_0 > 0$, 使得 $x_0 \in B(x_0, \epsilon_0) := \{x; |x - x_0| < \epsilon_0\} \subset O$. 则

$$\begin{aligned} & c \left(\frac{S_n^{(1)}}{a(n)} + \frac{S_n^{(2)}}{n} \in B(x_0, \epsilon_0) \right) \\ & \geq c \left(\sum_{i=1}^{q_n} \frac{1}{t q_n} \left(\frac{S_{i p_n}^{(1)} - S_{(i-1)p_n}^{(1)}}{r_n} + \frac{t q_n (S_{i p_n}^{(2)} - S_{(i-1)p_n}^{(2)})}{n} \right) \in B(x_0, \epsilon_0/2), \right. \\ & \quad \left. \left| \frac{S_n^{(1)} - S_{p_n q_n}^{(1)}}{a(n)} \right| < \epsilon_0/4, \left| \frac{S_n^{(2)} - S_{p_n q_n}^{(2)}}{n} \right| < \epsilon_0/4 \right). \end{aligned}$$

因为 $B(x_0, \epsilon_0/2)$ 和 $tB(x_0, \epsilon_0/2)$ 都是凸的和开的, 我们有

$$c \left(\frac{S_n^{(1)}}{a(n)} + \frac{S_n^{(2)}}{n} \in B(x_0, \epsilon_0) \right)$$

$$\begin{aligned}
&\geq c \left(\sum_{i=1}^{q_n} \frac{1}{q_n} \left(\frac{S_{ip_n}^{(1)} - S_{(i-1)p_n}^{(1)}}{r_n} + \frac{tq_n(S_{ip_n}^{(2)} - S_{(i-1)p_n}^{(2)})}{n} \right) \in tB(x_0, \epsilon_0/2), \right. \\
&\quad \left. \left| \frac{S_n^{(1)} - S_{p_n q_n}^{(1)}}{a(n)} \right| < \epsilon_0/4, \left| \frac{S_n^{(2)} - S_{p_n q_n}^{(2)}}{n} \right| < \epsilon_0/4 \right) \\
&\geq c \left(\frac{S_{ip_n}^{(1)} - S_{(i-1)p_n}^{(1)}}{r_n} + \frac{tq_n(S_{ip_n}^{(2)} - S_{(i-1)p_n}^{(2)})}{n} \in tB(x_0, \epsilon_0/2), 1 \leq i \leq q_n, \right. \\
&\quad \left. \left| \frac{S_n^{(1)} - S_{p_n q_n}^{(1)}}{a(n)} \right| < \epsilon_0/4, \left| \frac{S_n^{(2)} - S_{p_n q_n}^{(2)}}{n} \right| < \epsilon_0/4 \right) \\
&= c \left(\left| \frac{S_n^{(1)} - S_{p_n q_n}^{(1)}}{a(n)} \right| < \epsilon_0/4, \left| \frac{S_n^{(2)} - S_{p_n q_n}^{(2)}}{n} \right| < \epsilon_0/4 \right) \left(c \left(\frac{S_{p_n}^{(1)}}{r_n} + \frac{tq_n S_{p_n}^{(2)}}{n} \in tB(x_0, \epsilon_0/2) \right) \right)^{q_n}.
\end{aligned}$$

由容度下的 Chebyshev 不等式可得,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} c \left(\left| \frac{S_{n-p_n q_n}^{(1)}}{a(n)} \right| > \epsilon_0/4 \right) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{16(n-p_n q_n) \bar{\mathbb{E}}(|X_1|^2)}{\epsilon_0^2 a^2(n)} = 0,$$

和

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} c \left(\left| \frac{S_{n-p_n q_n}^{(2)}}{n} \right| > \epsilon_0/4 \right) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{16(n-p_n q_n) \bar{\mathbb{E}}(|Y_1|^2)}{\epsilon_0^2 n^2} = 0.$$

故

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} c \left(\left| \frac{S_n^{(1)} - S_{p_n q_n}^{(1)}}{a(n)} \right| < \epsilon_0/4, \left| \frac{S_n^{(2)} - S_{p_n q_n}^{(2)}}{n} \right| < \epsilon_0/4 \right) = 1.$$

选择 $\{\varphi_m; 0 \leq \varphi_m \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R}^d)\}$, 对所有的 $x \in \mathbb{R}^d$ 满足 $\varphi_m(x) \uparrow I_{tB(x_0, \epsilon_0/2)}(x)$, 其中 $C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R}^d)$ 表示有界 Lipschitz 连续函数组成的线性空间. 注意到

$$\frac{n}{a^2(n)} \cdot q_n = \frac{n}{a^2(n)} \cdot \frac{n}{\left\lceil \frac{n^2 t^2}{a^2(n)} \right\rceil} \rightarrow t^{-2}, \quad r_n \sim p_n^{\frac{1}{2}},$$

由 Peng 的中心极限定理 (参阅文献 [6]), 我们可得

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n \rightarrow \infty} c \left(\frac{S_{p_n}^{(1)}}{r_n} + \frac{tq_n S_{p_n}^{(2)}}{n} \in tB(x_0, \epsilon_0/2) \right) \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\varphi_m \left(\frac{S_{p_n}^{(1)}}{r_n} + \frac{tq_n S_{p_n}^{(2)}}{n} \right) \right) \\
&\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\varphi_m \left(\frac{S_{p_n}^{(1)}}{r_n} + \frac{tq_n S_{p_n}^{(2)}}{n} \right) \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\mathbb{E}}(\varphi_m(\xi + t\zeta)) \geq \tilde{c}(\xi + t\zeta \in tB(x_0, \epsilon_0/2)),
\end{aligned}$$

其中 (ξ, ζ) 是某个正则次线性期望空间 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathbb{E}})$ 上的服从 G -正态分布的随机向量, $\tilde{c}$ 是相应于 $\tilde{\mathbb{E}}$ 的容度,

$$G(p, A) := \mathbb{E} \left(\langle p, Y_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle AX_1, X_1 \rangle \right), \quad p \in \mathbb{R}^d, \quad A \in \mathbb{S}(d).$$

因此,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^2(n)} \log c \left(\frac{S_n^{(1)}}{a(n)} + \frac{S_n^{(2)}}{n} \in B(x_0, \epsilon_0) \right) \geq \frac{\log \tilde{c}(\xi + t\zeta \in tB(x_0, \epsilon_0/2))}{t^2}.$$

设 $\{(\xi_n, \zeta_n), n \geq 1\}$ 是服从 G -正态分布的随机变量, 且满足对 $i = 1, 2, \dots, (\xi_{i+1}, \zeta_{i+1})$ 与 $((\xi_1, \zeta_1), \dots, (\xi_i, \zeta_i))$ 独立. 则 $\frac{(\xi_1, \zeta_1) + \dots + (\xi_N, \zeta_N)}{N}$ 与 $\frac{(\xi, \sqrt{N}\zeta)}{\sqrt{N}}$ 同分布. 故由推论 2.1 可得

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \tilde{c}\left(\frac{\xi + \sqrt{N}\zeta}{\sqrt{N}} \in B(x_0, \epsilon_0/2)\right)}{N} \geq - \inf_{x \in B(x_0, \epsilon_0/2)} J(x) \geq -J(x_0).$$

因此, 对任意的 $x_0 \in O$,

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^2(n)} \log c\left(\frac{1}{a(n)} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \in O\right) \\ & \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^2(n)} \log c\left(\frac{1}{a(n)} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \in B(x_0, \epsilon_0)\right) \geq -J(x_0). \end{aligned}$$

3.2 上界的证明

定理 3.2 的证明 对任意的 $1 \leq j \leq n$, 定义

$$X'_{nj} := X_j I_{\{|X_j| < n/a(n)\}}, \quad Y'_{nj} := \frac{a(n)}{n} Y_j I_{\{|Y_j| < n/a(n)\}}, \quad X''_{nj} := X_j I_{\{n/a(n) \leq |X_j| \leq a(n)\}},$$

和

$$X'''_{nj} := X_j I_{\{|X_j| > a(n)\}}.$$

注意到对任意的 $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{n}{a^2(n)} \log c\left(\frac{1}{a(n)} \sum_{j=1}^n |X_j| I_{\{|X_j| > a(n)\}} \geq \delta\right) & \leq \frac{n}{a^2(n)} \log c\left(\max_{1 \leq j \leq n} |X_j| > a(n)\right) \\ & \leq \frac{n}{a^2(n)} \log(nc(|X_1| > a(n))), \end{aligned}$$

我们得到, 对任意的 $\delta > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^2(n)} \log c\left(\frac{1}{a(n)} \sum_{j=1}^n |X'''_{nj}| \geq \delta\right) = -\infty. \quad (3.7)$$

故, 为证明 (3.4), 我们只需证明对任意的 $\delta > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^2(n)} \log c\left(\frac{1}{a(n)} \sum_{j=1}^n |X''_{nj}| \geq \delta\right) = -\infty, \quad (3.8)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^2(n)} \log c\left(\frac{1}{a(n)} \sum_{j=1}^n \left|\frac{a(n)}{n} Y_j - Y'_{nj}\right| \geq \delta\right) = -\infty, \quad (3.9)$$

和对 $\mathbb{R}^d$ 中的任意闭集 F ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^2(n)} \log c\left(\frac{1}{a(n)} \sum_{j=1}^n (X'_{nj} + Y'_{nj}) \in F\right) \leq - \inf_{x \in F} J(x). \quad (3.10)$$

因为 (3.9) 的证明与 (3.7) 和 (3.8) 的证明是一样的, 我们只证明 (3.8) 和 (3.10).

首先我们证明 (3.8). 与 [14] 中的论证类似, 设 $f(x)$ 是连接点 $(m, \frac{m^2}{a^2(m)})$, $m \geq 1$ 的折线, 且 $g(x)$ 是连接点 $(m, a^2(m))$, $m \geq 1$ 的折线. 则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在 $[1, +\infty)$ 上的严格递增连续函数且它们满足对任意正整数 m , $f(m) = \frac{m^2}{a^2(m)}$ 和 $g(m) = a^2(m)$ 成立. 取一个正整数 n_0 , 且对任意的 $n \leq n_0$ 和 $1 \leq u \leq \frac{a^2(n)}{n}$, 定义 $N = N(u, n)$ 为 $N = g^{-1}(u^2 f(n))$. 则 $n = f^{-1}(u^{-2} g(N))$. 再由单调性得

$$g^{-1}(f(n)) \leq N \leq g^{-1}\left(f(n) \frac{a^4(n)}{n^2}\right) = n, \quad N \leq n \leq f^{-1}(g(N)).$$

由上面的关系和假设 $\frac{n^2}{a^2(n)} \rightarrow \infty$ 可得, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $N(n) \rightarrow \infty$ 关于 $u \geq 1$ 是一致的. 由 $f(x)$, $g(x)$ 和 N 的定义, 我们有 $c(|X_1| \geq u \frac{n}{a(n)}) \leq c(|X_1| \geq a([N]))$. 故由条件 (3.3), 对任意的 $\lambda > 1$, 存在 $n_0(\lambda) \geq 1$, 使得对任意的 $n \geq n_0(\lambda)$,

$$[N]c\left(|X_1| \geq u \frac{n}{a(n)}\right) \leq \exp\left(-\lambda \frac{a^2([N])}{[N]}\right).$$

考虑到 $\frac{n^2}{a^2(n)}$ 是非降的, 我们易得到下面的等式:

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{a^2(n)}c\left(|X_1| \geq u \frac{n}{a(n)}\right) &\leq \frac{n^2}{a^2(n)}/[N] \cdot \exp\left(-\lambda \frac{a^2([N])}{[N]}\right) \\ &\leq \frac{f(n)}{[N]} \exp\left(-\lambda \frac{a^2([N])}{[N]}\right) \\ &\leq \frac{g(N)}{[N]} \exp\left(-\lambda \frac{a^2([N])}{[N]}\right) \\ &\leq \frac{a^2([N] + 1)}{[N]} \exp\left(-\lambda \frac{a^2([N])}{[N]}\right) \\ &= \frac{a^2([N])}{[N]} \frac{([N] + 1)^2}{[N]^2} \frac{a^2([N] + 1)/([N] + 1)^2}{a^2([N])/[N]^2} \exp\left(-\lambda \frac{a^2([N])}{[N]}\right) \\ &\leq 2 \exp\left((- \lambda + 1) \frac{a^2([N])}{[N]}\right). \end{aligned}$$

由 N 的定义, 有 $u^2 = g(N)/f(n)$. 由 $g(x)$ 和 $f(x)$ 的单调性, 我们有

$$u \leq \frac{a(n)}{n} a([N] + 1) \leq \frac{a(n)}{n} \frac{a([N] + 1)([N] + 1)^{1/2}}{[N]^{1/2}} \leq \frac{2a^2([N])}{[N]} \frac{\frac{[N]}{a([N])}}{\frac{n}{a(n)}} \leq \frac{2a^2([N])}{[N]}.$$

故对任意的 $n \geq n_0(\lambda)$, $1 \leq u \leq \frac{a^2(n)}{n}$,

$$\frac{n^2}{a^2(n)}c\left(|X_1| \geq u \frac{n}{a(n)}\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{(\lambda - 1)u}{2}\right). \quad (3.11)$$

因为对任意的 $\beta > 1$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{a(n)\beta|X_1|}{n} I_{\{n/a(n) \leq |X_1| \leq a(n)\}}\right)\right) \\ &\leq c\left(|X_1| < \frac{n}{a(n)}\right) + \sum_{k=1}^{[a^2(n)/n]} \exp((k+1)\beta)c\left(\frac{kn}{a(n)} \leq |X_1| \leq \frac{(k+1)n}{a(n)}\right), \end{aligned}$$

由 (3.11), 对任意的 $\lambda > 4\beta + 1$, $n \geq n_0(\lambda)$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{[a^2(n)/n]} \exp((k+1)\beta) c\left(\frac{kn}{a(n)} \leq |X_1| \leq \frac{(k+1)n}{a(n)}\right) \\ \leq \frac{2a^2(n)}{n^2} \sum_{k=1}^{[a^2(n)/n]} \exp((k+1)\beta) \exp\left(-\frac{(\lambda-1)k}{2}\right) \\ \leq \frac{2a^2(n)}{n^2} e^\beta \sum_{k=1}^{[a^2(n)/n]} \exp(-(\lambda-1)k/4) \leq \frac{2a^2(n)}{n^2} \frac{e^\beta e^{-(\lambda-1)/4}}{1 - e^{-(\lambda-1)/4}}. \end{aligned}$$

因此, 对任意的 $\beta > 1$,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^2(n)} \log \bar{\mathbb{E}} \left(\exp \left(\frac{a(n)\beta |X_1|}{n} I_{\{n/a(n) \leq |X_1| \leq a(n)\}} \right) \right) \\ \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^2(n)} \log \left(1 + \frac{2a^2(n)}{n^2} \frac{e^\beta e^{-(\lambda-1)/4}}{1 - e^{-(\lambda-1)/4}} \right) \\ = \frac{2e^\beta e^{-(\lambda-1)/4}}{1 - e^{-(\lambda-1)/4}} \rightarrow 0, \quad \text{当 } \lambda \rightarrow \infty \text{ 时.} \end{aligned} \quad (3.12)$$

选择 $\{\varphi_m; 0 \leq \varphi_m \in C_b(\mathbb{R}^d)\}$, 使得当 $m \uparrow \infty$ 时, $\varphi_m(x) \downarrow I_{\{n/a(n) \leq |x| \leq a(n)\}}$, 且对所有的 $x \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_m(x) \leq I_{\{|x| \leq 2a(n)\}}$. 则当 $m \uparrow \infty$ 时, $|x|\varphi_m(x) \downarrow |x|I_{\{n/a(n) \leq |x| \leq a(n)\}}$, 且 $|x|\varphi_m(x) \leq 2a(n)$. 由引理 1.1(2), 可得

$$\begin{aligned} \frac{n}{a^2(n)} \log \bar{\mathbb{E}} \left(\exp \left(\frac{a(n)\beta}{n} \sum_{j=1}^n |X_j| I_{\{n/a(n) \leq |X_j| \leq a(n)\}} \right) \right) \\ = \frac{n^2}{a^2(n)} \log \bar{\mathbb{E}} \left(\exp \left(\frac{a(n)\beta}{n} |X_1| I_{\{n/a(n) \leq |X_1| \leq a(n)\}} \right) \right). \end{aligned}$$

现在由容度下的 Chebyshev 不等式, 对任意的 $\beta > 1$,

$$\begin{aligned} \frac{n}{a^2(n)} \log c \left(\frac{1}{a(n)} \sum_{j=1}^n |X''_{nj}| \geq \delta \right) \\ \leq -\beta\delta + \frac{n}{a^2(n)} \log \bar{\mathbb{E}} \left(\exp \left(\frac{a(n)\beta}{n} \sum_{j=1}^n |X_j| I_{\{n/a(n) \leq |X_j| \leq a(n)\}} \right) \right) \\ \leq -\beta\delta + \frac{n^2}{a^2(n)} \log \bar{\mathbb{E}} \left(\exp \left(\frac{a(n)\beta}{n} |X_1| I_{\{n/a(n) \leq |X_1| \leq a(n)\}} \right) \right), \end{aligned}$$

从而利用 (3.12), 可得 (3.8).

最后, 我们证明 (3.10). 令 $Z_{nj} = X_j I_{\{|X_j| < n/a(n)\}} + \frac{a(n)}{n} Y_j I_{\{|Y_j| < n/a(n)\}}$. 则由引理 1.1(1), 对任意的 $\alpha \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \frac{n}{a^2(n)} \log \bar{\mathbb{E}} \left(\exp \left(\frac{a(n)}{n} \left\langle \alpha, \sum_{j=1}^n Z_{nj} \right\rangle \right) \right) \\ = \frac{n^2}{a^2(n)} \log \bar{\mathbb{E}} \left(\exp \left(\frac{a(n)}{n} \langle \alpha, Z_{n1} \rangle \right) \right) \\ = \frac{n^2}{a^2(n)} \log \bar{\mathbb{E}} \left(1 + \frac{a(n)}{n} \langle \alpha, X_1 I_{\{|X_1| < n/a(n)\}} \rangle \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{a^2(n)}{n^2} \left(\langle \alpha, Y_1 I_{\{|Y_1| < n/a(n)\}} \rangle + \frac{1}{2} (\langle \alpha, Z_{n1} \rangle)^2 \right) + R_n \Big),$$

其中

$$R_n = \exp \left(\frac{a(n)}{n} \langle \alpha, Z_{n1} \rangle \right) - 1 - \frac{a(n)}{n} \langle \alpha, Z_{n1} \rangle - \frac{1}{2} \frac{a^2(n)}{n^2} (\langle \alpha, Z_{n1} \rangle)^2.$$

由 $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(-X_1) = 0$, 我们有

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbb{E}}(\langle \alpha, X_1 I_{\{|X_1| \leq n/a(n)\}} \rangle)| &= |\bar{\mathbb{E}}(\langle \alpha, X_1 I_{\{|X_1| \geq n/a(n)\}} \rangle)| \\ &\leq |\alpha| \bar{\mathbb{E}}(|X_1| I_{\{|X_1| \geq n/a(n)\}}) \\ &\leq |\alpha| (\bar{\mathbb{E}}(|X_1|^{2+\delta}))^{1/(2+\delta)} \left(c \left(|X_1| \geq \frac{n}{a(n)} \right) \right)^{(1+\delta)/(2+\delta)} \\ &\leq |\alpha| \left(\frac{a(n)}{n} \right)^{1+\delta} \bar{\mathbb{E}}(|X_1|^{2+\delta}). \end{aligned}$$

利用 Taylor 展开式, 易得, 对足够大的 n ,

$$|R_n| \leq \frac{a^3(n)}{n^3} \exp(4|\alpha|) |\langle \alpha, Z_{n1} \rangle|^3 \leq \frac{a^{2+\delta/2}(n)}{n^{2+\delta/2}} \exp(4|\alpha|) |\alpha|^3 (|X_1| + 2)^{2+\delta/2}.$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^2(n)} \frac{a(n)}{n} |\bar{\mathbb{E}}(\langle \alpha, X_1 I_{\{|X_1| < n/a(n)\}} \rangle)| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^2(n)} \bar{\mathbb{E}}(|R_n|) = 0.$$

另一方面, 由

$$\begin{aligned} &\left| \left(\langle \alpha, Y_1 I_{\{|Y_1| < n/a(n)\}} \rangle + \frac{1}{2} (\langle \alpha, Z_{n1} \rangle)^2 \right) - \left(\langle \alpha, Y_1 \rangle + \frac{1}{2} (\langle \alpha, X_1 \rangle)^2 \right) \right| \\ &\leq |\alpha| |Y_1| I_{\{|Y_1| \geq n/a(n)\}} + |\alpha|^2 (|X_1| + 1) \left(|X_1| I_{\{|X_1| \geq n/a(n)\}} + \frac{a(n)}{n} |Y_1| \right), \end{aligned}$$

我们有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{E}} \left(\left| \langle \alpha, Y_1 I_{\{|Y_1| < n/a(n)\}} \rangle + \frac{1}{2} (\langle \alpha, Z_{n1} \rangle)^2 - \left(\langle \alpha, Y_1 \rangle + \frac{1}{2} (\langle \alpha, X_1 \rangle)^2 \right) \right| \right) = 0.$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^2(n)} \log \bar{\mathbb{E}} \left(\exp \left(\frac{a(n)}{n} \left\langle \alpha, \sum_{j=1}^n Z_{nj} \right\rangle \right) \right) = \mathbb{E} \left(\langle \alpha, Y_1 \rangle + \frac{1}{2} (\langle \alpha, X_1 \rangle)^2 \right).$$

利用大偏差原理的标准方法 (参阅文献 [12] 中 Gärtner-Ellis 定理的上界的证明), 我们可得对 $\mathbb{R}^d$ 中任意闭子集 F ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^2(n)} \log c \left(\frac{1}{a(n)} \sum_{j=1}^n Z_{nj} \in F \right) \leq - \inf_{x \in F} J(x), \quad (3.13)$$

即, (3.10) 得证.

参考文献

- 1 Peng S G. G -Expectation, G -Brownian motion and related stochastic calculus of Itô's type. In: Benth et al., eds. Proceedings of the 2005 Abel Symposium 2. New York: Springer-Verlag, 2006, 541–567
- 2 Peng S G. Multi-dimensional G -Brownian motion and related stochastic calculus under G -expectation. Stochastic Process Appl, 2008, 118: 2223–2253
- 3 Maccheroni F, Marinacci M. A strong law of large numbers for capacities. Ann Probab, 2005, 33: 1171–1178
- 4 Marinacci M. Limit laws for non-additive probabilities and their frequentist interpretation. J Econom Theory, 1999, 84: 145–195
- 5 Peng S G. Law of large numbers and central limit theorem under nonlinear expectations. arXiv: math.PR/0702358v1, 13 Feb 2007
- 6 Peng S G. A new central limit theorem under sublinear expectations. arXiv: 0803.2653v1[math.PR], 18 Mar 2008
- 7 Peng S G. Survey on normal distributions, central limit theorem, Brownian motion and the related stochastic calculus under sublinear expectations. Sci China Ser A, 2009, 52: 1391–1411
- 8 Gao F Q, Jiang H. Large deviations for stochastic differential equations driven by G -Brownian motion. Stochastic Process Appl, 2010, 120: 2212–2240
- 9 Denis L, Hu M S, Peng S G. Function spaces and capacity related to a sublinear expectation: application to G -Brownian motion paths. arXiv: 0802.1204v1[math.PR], 9 Feb 2008
- 10 Denis L, Martini C. A theoretical framework for the pricing of contingent claims in the presence of model uncertainty. Ann Appl Probab, 2006, 16: 827–852
- 11 Bahadur R R, Zabell S L. Large deviation of the sample mean in general vector spaces. Ann Probab, 1979, 7: 587–621
- 12 Dembo J, Zeitouni O. Large Deviations Techniques and Applications. 2nd ed. New York: Springer, 1998
- 13 Deuschel J D, Stroock D W. Large Deviations. Boston: Academic Press, Inc, 1989
- 14 Merlevède F, Peligrad M. Functional moderate deviations for triangular arrays and applications. Alea, 2009, 5: 3–20
- 15 Borovkov A A, Mogulskii A A. Probabilities of large deviations in topological spaces I. Siberian Math J, 1978, 19: 697–709
- 16 de Acosta A, Kuelbs J. Some new results on the cluster set $C(\{S_n/a_n\})$ and the LIL. Ann Probab, 1981, 11: 102–122

Large deviations and moderate deviations for independent random variables under sublinear expectations

GAO FuQing & XU MingZhou

Abstract This paper considers large deviations and moderate deviations for independent random variables under sublinear expectations. A large deviation principle is obtained by the subadditive method. A moderate deviation principle associated with Peng's CLT is presented.

Keywords: sublinear expectation, large deviations, moderate deviations

MSC(2000): 60F10, 91B30

doi: 10.1360/012009-879