引力子质量对中子星 I - Q 关系的修正

桑澳菲, 梁潇, 胡亚鹏*

南京航空航天大学理学院, 南京 210016

*联系人, E-mail: huyp@nuaa.edu.cn

收稿日期: 2020-09-05; 接受日期: 2020-10-21; 网络出版日期: 2021-01-07

国家自然科学基金(编号: 11575083, 11565017)资助项目

摘要 近年来, 研究发现中子星的转动惯量 I 和四极矩 Q 存在着一个关系式, 即 I - Q 关系. 而且, 该关系式不依赖于中子星内部的物态方程, 与引力理论相关. 因此, 对该关系式的研究可用来检验引力理论. de Rham-Gabadadze-Tolley (dRGT) massive gravity是一种自洽的引力子静止质量不为零的修正引力理论, 是目前国际引力理论研究的热点. 本论文主要基于该修正引力理论, 在慢速旋转近似下, 利用多方指数 $n=0$ 的物态方程, 计算了dRGT massive gravity中牛顿极限下的 I - Q 关系. 我们将dRGT massive gravity与爱因斯坦引力中的 I - Q 关系进行比较, 发现引力子质量不会影响 I 与 Q 的平方之间无量纲化后的正比关系, 但会改变其比例系数.

关键词 中子星, I - Q 关系, 修正引力, 牛顿极限, 多方过程

PACS: 97.60.Jd, 04.50.Kd, 04.25.Nx, 26.60.Kp

1 引言

在1932年查德威克(Chadwick)发现中子后不到两年, 巴德(Baade)和茨威基(Zwicky)首次预言中子星的存在^[1]. 而根据现代天文学理论, 中子星是恒星演化末期的可能归宿之一. 恒星是自引力系统, 若内部的压力不足以抗衡引力时就会坍缩. 在恒星演化到后期时, 内部的燃料燃烧殆尽, 燃烧产生的辐射压不足以抵抗引力, 于是在引力的作用下, 天体本身的物质将不可阻挡地向着内核坍缩. 可以继续阻止引力坍缩的是电子的简并压, 由电子简并压抵抗引力的恒星是白矮星. 但是, 若其质量大于钱德拉塞卡极限(即1.4倍太阳质

量), 白矮星就不可能处于平衡. 在这种情况下, 恒星的归宿不可能是白矮星, 恒星将继续坍缩. 其中一种可能是恒星发生超新星爆炸, 最终形成中子星, 而中子星是由中子简并压与引力抗衡. 中子星的概念被提出的30多年后, 1967年休伊什(Hewish)和贝尔(Bell)探测到一种具有稳定周期的脉冲信号, 这类信号的发射源被命名为脉冲星. 后被证实, 脉冲星就是早已被预言的中子星^[2].

对于小质量中子星, 用牛顿力学来描写已经足够. 而对于大质量中子星, 引力场一般很强, 其内部和外部时空的性质, 需利用爱因斯坦的广义相对论. 1939年, 托尔曼(Tolman)、奥本海默(Oppenheimer)和沃尔科夫

引用格式: 桑澳菲, 梁潇, 胡亚鹏. 引力子质量对中子星 I - Q 关系的修正. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2021, 51: 020401

Sang A-F, Liang X, Hu Y-P. I - Q relation of neutron star affected by massive graviton (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2021, 51: 020401, doi: 10.1360/SSPMA-2020-0350

(Volkoff)利用广义相对论, 并假设中子星内部物质可用理想流体来简单描述, 建立了静态球对称中子星内部的平衡方程, 即著名的TOV方程^[3]:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{M(r)}{r^2} \rho \left(1 + \frac{p}{\rho} \right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{M(r)} \right) \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right)^{-1}. \quad (1)$$

此处, 我们采用自然单位制, 即取 $c=G=1$ (本文后面也均采用自然单位制). TOV方程和物态方程可以组成星体内部结构的完备方程组, 这也是第一个中子星的模型. TOV方程在牛顿极限, 也就是弱场低速近似 ($p(r) \ll \rho(r)$, $r^3 p(r) \ll M(r)$, $M(r) \ll r$) 下, 可简化为牛顿力学中理想流体静力学平衡方程^[3]:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{M(r)}{r^2} \rho. \quad (2)$$

中子星的发现为人类探索自然开辟了新的领域, 它的密度很大, 广义相对论效应不可忽略, 是检验强引力和其他基本相互作用的最佳实验室之一. 至今为止, 脉冲星的观测已经给出了广义相对论的一些检验. 但是, 在研究中子星内部性质时, 人们常常遇到一个问题, 即目前中子星内部物质的物态方程还没有公认合理的模型. 因为中子星的密度在 10^{17} kg/m^3 量级, 与原子核的密度相当, 并且越靠近内核, 物质密度越大, 而在地球实验室无法达到如此高的密度. 目前中子星结构的最简单模型是多方球模型, 该模型中中子星的物态方程具有多方过程的形式^[3]:

$$p = K\rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad (3)$$

其中, n 为整数, 称为多方指数; K 是一个常数. 此外, $n=0$ 时, 多方过程代表星体内部均匀, 即 $\rho=\rho_c$.

后来人们又建立了各种其他的物态方程, 比如APR, Sly, LS220, Shen等^[4,5]. 目前, 对X射线爆发和低质量X射线双中子星的观测使得我们可以在10%的精确度内同时测得中子星的半径和质量^[6]; 对双脉冲星的观测(比如J0737-3039^[6])可以在一定精确度内测得中子星的转动惯量^[7]; 利用第二代地面引力波探测器(如Adv.LIGO, Adv.Virgo)对双中子星旋进的引力波的观测, 使得我们可能测量出潮汐Love数^[8-10]. 但现有的中子星的观测结果也不足以确定物态方程. 在这种情况下, 如何利用中子星的相关天文观测数据来检验引力理论成为难题, 因为在很多情况下引力理论和内部物态方程对天文观测结果产生的影响难以区分.

解决上述难题的一种方法是, 在中子星的相关物理性质中, 寻找与物态方程无关的普适性关系. 在2013年, Yagi和Yunes^[11,12]分别在*Science*和*Physical Review D*上发表了两篇文章, 发现慢速旋转的中子星的转动惯量 I 和质量(或引力)四极矩 Q 之间存在一个关系, 即 I - Q 关系. 他们发现对不同的中子星物态方程, 这个关系是普适的, 也就是与具体的物态方程无关, 这也是 I - Q 关系式最重要的性质.

在此之后, 各种不同情况下的 I - Q 关系被研究. Yagi等人的讨论中采用了慢速旋转近似, 但实际上的中子星转速可能会很快, 于是Doneva等人^[13]随后研究了在快速旋转情况下的 I - Q 关系, 将 I - Q 关系看作旋转频率的函数, 他们发现, 这种情况下似乎 I - Q 关系不再与物态方程无关, 失去了普适性. 但Chakrabarti等人^[14]进一步的研究发现, 将一些物理量做适当的无量纲化之后, 仍然可以得到与物态方程无关的 I - Q 关系. 另外, 很多不同的修正引力, 例如 $f(R)$ 引力、ungravity引力理论等, 其中的 I - Q 关系也被计算^[15,16], 这些修正引力中计算出的 I - Q 关系都与物态方程无关. 而有些修正引力中通过数值求得的 I - Q 关系图线会偏离爱因斯坦引力中得到的图线, 通过观察这些区别, 我们也可以检验引力理论或给出一些对修正引力的限制^[12].

众所周知, 广义相对论是一种引力子静止质量为零的引力理论. 一个很自然的想法是, 有没有一种修正引力可以描述引力子静止质量不为零的引力, 即massive gravity. 给一个自旋为2的引力场构造非零的引力子是一个很老的想法, 早在1939年菲尔兹(Fierz)和泡利(Pauli)就使用了相应的方法, 但在处理一个有质量引力理论时, 大多数massive gravity都会遇到问题. 比如产生鬼场(Ghost Field), 而鬼场会导致真空不稳定性等问题^[17,18]. 经过多年探索, 在2010年, de Rham等人^[18]提出了一种新的引力子静止质量不为零的引力理论, 即dRGT massive gravity理论. 由于该引力理论定义良好(Well-Defined)且不含鬼场, 故dRGT massive gravity理论在国际上迅速引起了广泛的关注和研究. 本文将考虑dRGT massive gravity理论下中子星的 I - Q 关系, 并研究非零引力子质量对该关系的影响.

本文的结构如下, 第2节简单介绍了中子星牛顿极限下转动惯量 I 和四极矩 Q 的定义, 并回顾了Yagi等人关于中子星 I - Q 普适性关系的结果; 第3节在得到dRGT massive gravity理论中的中子星内部流体

静力学平衡方程后, 我们定量计算了dRGT massive gravity下中子星的 I - Q 关系, 并与爱因斯坦引力中的结果做了简单对比. 最后, 对本文结果我们进行了总结和展望.

2 中子星牛顿极限下的 I - Q 关系式

本文仅考虑匀速旋转的中子星, 而且转速很慢的情形. 在该情形下, 人们可以对静态球对称中子星解做相关微扰近似来简单处理. 对于大多数观测到的脉冲星, 除了在其诞生后一个极短的时间内或后期由于吸积加速变成毫秒脉冲星外, 慢旋转的近似都是很适用的^[19]. 在慢旋转近似下, 中子星的转动惯量 I 和四极矩 Q 也依然比较复杂, 一般不具有解析结果, 通常只能数值求解. 但在牛顿极限, 即弱场低压近似下, I 和 Q 是可以解析求解的^[12,20]. 为了进一步方便后面的计算与解析比较, 我们也主要考虑中子星在牛顿极限下的 I - Q 关系式.

牛顿极限下中子星转动惯量 I 的定义与牛顿力学中一样. 根据牛顿力学, 将中子星看作绕固定轴旋转的刚体, 则刚体对固定轴的转动惯量表达式为

$$I = \int_V r_{\perp}^2 dm, \quad (4)$$

其中 $r_{\perp}$ 代表质量微元 dm 到固定轴的距离. 若星体的密度 ρ 只是半径 r 的函数, 则半径为 R_* 的球体转动惯量为

$$I^N = \frac{8\pi}{3} \int_0^{R_*} r^4 \rho(r) dr, \quad (5)$$

其中, 上标 N 表示牛顿极限下的结果. 需要注意的是, 中子星一般不能视为刚性球体, 一般为椭球体. 但是, 在慢旋转近似时, 将中子星看作一个刚性球体来计算其转动惯量 I 是合适的. 因为转动惯量在没有旋转的情况下是一个比较大的量, 而慢旋转对转动惯量的影响可以看作一种微扰. 因此, 在慢旋转近似下, 旋转对中子星的球体转动惯量的影响(很小的偏心率)可以忽略, 即人们依然可用式(5)来计算慢速旋转情形下中子星的转动惯量. 为便于后面的分析, 对其进行无量纲化处理^[11], 得到无量纲化后的转动惯量 I^N 为

$$I^N = \frac{I^N}{M_*^3}, \quad (6)$$

其中 M_* 代表中子星的总质量, 物理量上加“ $-$ ”表示无

量纲化后的物理量. 注意到, 在本文的自然单位制 $c=G=1$ 下, 质量与长度具有相同的量纲. 因此, 转动惯量的量纲为质量的三次方, 故一种较为简便的无量纲化处理方法即式(6).

另一方面, 球体的四极矩 Q 为零. 由于旋转的中子星不是一个严格的球体, 才会有非零的四极矩. 因此, 不同于中子星的转动惯量 I , 中子星的旋转对其四极矩 Q 带来的影响是不可忽略的. 定义中子星的四极矩 Q 可参照电动力学中电四极矩的定义方法. 先考虑一个质量任意分布的星体, 以质心为坐标原点建立坐标系. 在牛顿引力下, 星体外部的引力势 $\Phi(\mathbf{x})$ 可写成

$$\Phi(\mathbf{x}) = - \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} d^3\mathbf{x}', \quad (7)$$

其中, $\mathbf{x}'$ 代表星体内部的点, $\mathbf{x}$ 代表物体外部的点. 将上式中的 $\frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}$ 在 $\mathbf{x}' = 0$ 处展开得

$$\Phi = -\frac{M}{r} - \frac{3}{2r^5} x_a x_b \int_V \left(x'_a x'_b - \frac{r'^2}{3} \delta_{ab} \right) \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad (8)$$

其中, $a, b = 1, 2, 3$; $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{\delta_{ab} x_a x_b}$. 上式可简写为

$$\Phi = -\frac{M}{r} - \frac{3}{2} \frac{Q_{ab} x_a x_b}{r^5} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad (9)$$

其中四极张量 Q_{ab} 的定义为

$$Q_{ab} = \int_V \left(x'_a x'_b - \frac{r'^2}{3} \delta_{ab} \right) \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'. \quad (10)$$

如果星体的密度分布满足轴对称, 及假设 z 方向为对称轴, 则势函数就可以进一步简化为

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{M}{r} - \frac{Q P_2(\cos\theta)}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (11)$$

而四极张量可以简化为

$$\mathbf{Q}_{ab} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}Q & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}Q & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}Q \end{pmatrix}, \quad (12)$$

其中, 式(11)中的 $\cos\theta = \frac{z}{r}$, P_2 代表勒让德多项式, 具体

形式为 $P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$. 根据式(10)和(12)可以得到, 轴对称星体在牛顿极限下的四极矩 Q 为^[12]

$$Q^N = \int_V \rho(r') r'^2 P_2(\cos\theta') d^3\mathbf{x}' \\ = 2\pi \int_0^\pi \int_0^{r'(\theta)} \rho(r') r'^4 P_2(\cos\theta') \sin\theta' dr' d\theta', \quad (13)$$

其中 $r(\theta)$ 为轴对称星体表面的函数. 为了后文表达方便与简洁, 式(13)中的数学量不再加撇, 故中子星的四极矩 Q 表示为^[11]

$$Q^N = 2\pi \int_0^\pi \int_0^{r'(\theta)} \rho(r) r^4 P_2(\cos\theta) \sin\theta dr d\theta. \quad (14)$$

与无量纲的中子星转动惯量式(6)一样, 对四极矩进行无量纲化处理, 得到^[12]

$$\bar{Q}^N = -\frac{Q^N}{M_*^3 \chi^2}, \quad (15)$$

其中 χ 是一个描述旋转的参数, 定义为 $\chi \equiv \frac{J}{M_*^2}$, 其中 $J = I\Omega$ 为中子星的角动量, Ω 为中子星的转动角速度. 在慢旋转近似下, 该旋转参数满足 $\chi \ll 1$. 注意到, 在式(15)的无量纲化处理时, 不仅考虑了自然单位制, 而且还考虑与其他文献的结果一致^[12].

至此, 在慢旋转近似下, 已给出中子星在牛顿极限下转动惯量 I 和四极矩 Q 的定义. 下面我们简单回顾在爱因斯坦引力中, 慢速旋转的中子星在牛顿极限下的 I - Q 关系^[11,12]. 需要注意的是, 这里的 I 和 Q 只适用于慢速旋转的星体, 并且是牛顿极限下的结果. 对于旋转速度比较快的中子星, 上述定义是不合适的. 比如, 四极矩的定义需要用其他的方法^[21]. 在爱因斯坦引力中, 利用中子星内部的物态方程, 中子星在牛顿极限下的 I - Q 关系已在文献[12]中具体给出.

在多方指数为 $n=0$ 和 $n=1$ 对应的物态方程情形下, 中子星的 I 和 Q 能完全解析求出. 对于 $n=0$ 时, 中子星的 I^N 和 $\bar{Q}^N$ 分别为

$$I^N = \frac{2}{5} \frac{1}{C^2} \text{ 和 } \bar{Q}^N = \frac{25}{8} \frac{1}{C}.$$

而对于 $n=1$ 情形, 则无量纲的转动惯量和四极矩为

$$I^N = \frac{2(\pi^2-6)}{3\pi^2} \frac{1}{C^2} \text{ 和 } \bar{Q}^N = \frac{3\pi^2(\pi^2-15)}{4(\pi^2-6)^2} \frac{1}{C}, \quad (16)$$

其中 $C \equiv \frac{M_*}{R_*}$ 是一个描述中子星致密程度的物理量,

M_* 为中子星的总质量, R_* 为中子星的平均半径.

对比发现, 在两种多方过程中, 所求得的 I - Q 关系都满足转动惯量与四极矩的平方成正比, 即

$$I^N \propto [\bar{Q}^N]^2, \quad (17)$$

并且重要的是 Yagi 等人^[12] 发现两种情况下的比例系数大致相等. 因此, 他们认为式(17)是不依赖于中子星内部物态方程的普适性关系式, 及该式为中子星牛顿极限下的 I - Q 关系式^[11,12].

3 dRGT massive gravity 的中子星牛顿极限下的 I - Q 关系式

3.1 dRGT massive gravity 中的流体静力学平衡方程

dRGT massive gravity 是一种修正引力, 通过赋予引力子非零的静止质量对爱因斯坦的广义相对论进行修正. 考虑 4 维 dRGT massive gravity 的作用量^[18,22]:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R + m^2 \sum_i^4 c_i U_i(\mathbf{g}, \mathbf{f}) \right], \quad (18)$$

其中 R 为曲率标量, $\mathbf{g}$ 为度规行列式; $\mathbf{f}$ 是一个固定的对称张量, 通常称之为参考度规, c_i 为常数, m 是引力子质量参数, U_i 为对称多项式, 它的具体定义可参照文献[22]. 由上面的作用量, 可以得到一般含物质场的引力场方程为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + m^2 \chi_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (19)$$

方程中 $\chi_{\mu\nu}$ 是一个与参考度规相关的对称张量, 具体定义形式亦可见文献[22].

考虑静态球对称中子星的内部解, 并将中子星内部物质简单视为理想流体, 即内部解度规的一般形式为

$$ds^2 = -a(r)dt^2 + b(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (20)$$

及理想流体的能动张量为

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}. \quad (21)$$

由 $g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -1$, 得到静止流体的四速

$$u_\mu = (-\sqrt{a(r)}, 0, 0, 0).$$

取参考度规为 $\mathbf{f}_{\mu\nu} = \text{diag}(0, 0, c_0^2, c_0^2 \sin^2\theta)$, 计算出 $\chi_{\mu\nu}$,

并将(20)和(21)式带入场方程(19)及利用物质场的能动张量守恒, 可得到三个独立方程为

$$b^2(1 + c_0^2 c_2 m^2 + c_0 c_1 m^2 r - 8\pi r^2 \rho) + r b' = b, \quad (22)$$

$$b(1 + c_0^2 c_2 m^2 + c_0 c_1 m^2 r + 8\pi r^2 p) = 1 + \frac{r a'}{a}, \quad (23)$$

$$\frac{a'}{a} = -\frac{2p'}{p + \rho}. \quad (24)$$

上述三个独立方程和物态方程构成完备方程组. 通过式(22), 我们可以得到 $b(r)$ 的形式解, 再将 $b(r)$ 的形式解带入式(23)可得到 $a(r)$ 的表达式. 它们的具体表达式为

$$b(r) = \left(1 - \frac{2M(r)}{r} + m^2 c_0^2 c_2 + \frac{1}{2} m^2 c_0 c_1 r\right)^{-1}, \quad (25)$$

$$a(r) = \exp \left\{ \int \frac{2(M + 4\pi p r^3 + m^2 c_0 c_1 r^2 / 4)}{r^2 (1 - 2M/r + c_0^2 c_2 m^2 + c_0 c_1 m^2 r / 2)} dr \right\}. \quad (26)$$

再将 $a(r)$ 和 $b(r)$ 代入式(24), 可以得到dRGT massive gravity中星体内部的平衡方程:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} + \left(c_0^2 c_2 m^2 + \frac{1}{2} c_0 c_1 m^2 r \right) \frac{dp}{dr} \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right)^{-1} \\ = -\frac{M(r)}{r^2} \rho \left(1 + \frac{p}{\rho} \right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{M(r)} + \frac{c_0 c_1 m^2 r^2}{4M(r)} \right) \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (27)$$

其中

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi \rho r^2. \quad (28)$$

式(27), (28)和物态方程 $p = p(\rho)$ 构成了dRGT massive gravity中描述中子星内部结构的一组新的完备方程组. 可以发现引力子质量参数 m 为零的情况下, 式(27)就回到TOV方程(1)式. 在牛顿极限下(即弱场低速条件下), 有 $p(r) \ll \rho(r)$, $r^3 p(r) \ll M(r)$, $M(r) \ll r$, 故式(27)简化为

$$\frac{dp}{dr} + \left(c_0^2 c_2 m^2 + \frac{1}{2} c_0 c_1 m^2 r \right) \frac{dp}{dr} = -\frac{M(r)}{r^2} \rho \left(1 + \frac{c_0 c_1 m^2 r^2}{4M(r)} \right). \quad (29)$$

而 $a(r)$ 也可进一步简化为

$$a(r) = \exp \left\{ \int \frac{2(M(r) + m^2 c_0 c_1 r^2 / 4)}{r^2 (1 + c_0^2 c_2 m^2 + c_0 c_1 m^2 r / 2)} dr \right\}. \quad (30)$$

3.2 dRGT massive gravity中的 I - Q 关系式

在得到上述基本方程后, 为简单起见, 这一部分我们采用多方指数 $n=0$ 的多方过程计算dRGT massive gravity中牛顿极限下的 I - Q 关系. 此外, 为了得到解析解, 我们考虑一种计算比较简单的 $c_1 = 0$ 情形.

在 $n=0$ 的多方过程中, dRGT massive gravity与爱因斯坦引力一样, 中子星内部密度均匀, 即中子星内部的物态方程为

$$\rho_M = \rho_c = \frac{3M_*}{4\pi R_*^3}. \quad (31)$$

注意在这一部分中, 我们采用下标 M 表示dRGT massive gravity中的相关物理量, 其中 ρ_c 为中子星的密度. 将式(31)带入式(5)并根据式(6)无量纲化后, 得到无量纲的中子星转动惯量为

$$I^N = \frac{2}{5} \frac{R_*^2}{M_*^2} = \frac{2}{5} \frac{1}{C^2}. \quad (32)$$

可以发现, 对 $n=0$ 的多方过程, 由于中子星密度都是均匀的, 故不同引力中无量纲的中子星转动惯量都是一样的.

对于密度均匀并均速旋转的中子星, 我们可采用麦克劳林椭球体模型来计算中子星的四极矩^[12,23,24]. 在麦克劳林椭球体模型中, 旋转的星体为一个椭球, 其椭球面方程为 $\frac{x^2+y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 其中 b , c 分别为椭球的长轴和短轴. 对于这种具有椭球状的星体, 其牛顿极限下的四极矩 Q^N 为^[12]

$$Q^N = -\frac{4\pi}{15} \rho_c b^4 c \left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right) = -\frac{4\pi}{15} \rho_c b^4 c e^2, \quad (33)$$

其中 e 为椭球的偏心率.

为进一步得到牛顿极限下无量纲化的中子星四极矩 $\bar{Q}^N$, 我们需得到偏心率 e 与中子星转动角速度 Ω 的关系. 在 $n=0$ 的情况下, 根据式(28)我们可以得到

$$M(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_M. \quad (34)$$

因此, 在 $c_1 = 0$ 的情形下, 将式(34)代入式(30)中

$a(r)$ 的表达式, 我们可以得到牛顿极限下星体内部($r < R$)的度规函数:

$$a(r) = \exp \left\{ \int_r \frac{2M(r)}{(1+c_0^2 c_2 m^2) r^2} dr \right\}. \quad (35)$$

显然, 当引力子的质量参数 m 为零时, $a(r)$ 回到爱因斯坦引力情形下星体内部在牛顿极限下的解^[3]:

$$a(r) = \exp \left\{ \int_r \frac{2GM(r)}{c^2 r^2} dr \right\} \approx 1 - \left(\frac{3M_*}{R} - \frac{M(r)}{r} \right) \frac{G}{c^2}. \quad (36)$$

注意在牛顿极限下 $\int_r \frac{2GM(r)}{c^2 r^2} dr$ 一般很小, 故式(35)可以做进一步近似, 式(36)的积分常数已考虑到牛顿引力情形下无穷远为引力势能零点. 因此, 对比(35)和(36)式, 我们发现引力子质量对星体内部的影响可直接等效为修改万有引力常数 G 为 $\frac{G}{1+c_0^2 c_2 m^2}$. 考虑到引力势函数正比于万有引力常数 G , 故对应的内部引力势函数也可直接变为

$$\Phi_M = \frac{1}{1+c_0^2 c_2 m^2} \Phi, \quad (37)$$

其中 Φ 为爱因斯坦引力情形下星体内部牛顿极限下的引力势. 根据麦克劳林椭球体模型, 星体内部引力势函数可重新写为^[23,24]

$$\Phi_M = -\frac{1}{1+c_0^2 c_2 m^2} \pi \rho (A - A_1 x^2 - A_2 y^2 - A_3 z^2), \quad (38)$$

其中,

$$A = \frac{2b^2 \sqrt{1-e^2}}{e} \arcsine, \quad A_1 = A_2 = \frac{A}{2(ae)^2} - \frac{1-e^2}{e^2},$$

$$A_3 = \frac{2}{e^2} - \frac{A}{(ae)^2}.$$

考虑到牛顿引力下流体力学的欧拉方程:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi,$$

及星体内部静平衡方程(27)式, 我们可得到dRGT massive gravity下对应的流体力学欧拉方程为

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho_M} \nabla p_M - \frac{1}{\rho_M} c_0^2 c_2 m^2 \nabla p_M - \nabla \Phi_M, \quad (39)$$

其中 $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$. 采用与爱因斯坦引力中类似的方法^[12,23,24], 下面我们将式(38)和椭球星体内部压强的形

式解 $p_M = p_c \left(1 - \frac{x^2+y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right)$ 代入式(39)并利用星体

绕 z 轴旋转时 $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})}{dt} = -\Omega^2 (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y)$, 可得到 z 方向分量为

$$0 = \frac{2p_c}{\rho c^2} (1 + c_0^2 c_2 m^2) - \frac{2}{1 + c_0^2 c_2 m^2} \pi \rho A_3, \quad (40)$$

x (或 y 方向)方向分量为

$$-\Omega^2 = \frac{2p_c}{\rho b^2} (1 + c_0^2 c_2 m^2) - \frac{2}{1 + c_0^2 c_2 m^2} \pi \rho A_1. \quad (41)$$

(40), (41)两式联立可得

$$p_c = \frac{\pi c^2 \rho^2 A_3}{(1 + c_0^2 c_2 m^2)^2}, \quad \Omega^2 = \frac{2\pi \rho}{(1 + c_0^2 c_2 m^2)} \left(A_1 - \frac{c^2}{b^2} A_3 \right), \quad (42)$$

其中 p_c 为星体内部中心点的压强. 将 A_1 和 A_3 代入上式, 可得dRGT massive gravity下中子星转动角速度 Ω 与偏心率 e 的关系式:

$$\Omega = \sqrt{\frac{8\pi}{15(1+c_0^2 c_2 m^2)}} \rho_c e + O(e^3). \quad (43)$$

类似于爱因斯坦引力情形^[12], 由于中子星慢速旋转, 偏心率 e 接近零为小量, 故在下面具体计算时可忽略偏心率二次以上的项. 而且, 容易发现当引力子质量参数 m 为零时, 该式回到爱因斯坦引力情形下的结果.

将中子星转动角速度 Ω 与偏心率 e 的关系式(43)代入式(32), 得到牛顿极限下的四极矩为

$$Q^N = -\frac{1+c_0^2 c_2 m^2}{2} R_*^5 \Omega^2 + O(\Omega^4). \quad (44)$$

再根据式(15), 可得到无量纲化的中子星四极矩 $\bar{Q}^N$ 为

$$\bar{Q}^N = \frac{25(1+c_0^2 c_2 m^2)}{8} \frac{1}{C}. \quad (45)$$

比较(32)和(45)式, 我们得到在 $n=0$ 的多方过程情形下, 中子星牛顿极限下的 I - Q 关系为

$$I^N = C^{(n=0)} (\bar{Q}^N)^2,$$

其中,

$$C^{(n=0)} = \frac{128}{3125} (1 + c_0^2 c_2 m^2)^2. \quad (46)$$

容易发现, 在参数 $c_1 = 0$ 的dRGT massive gravity情形下, $n=0$ 的多方过程所对应的 I^N 和 Q^N 仍然满足 I^N 与 Q^N 的平方成正比. 但是, 与爱因斯坦引力情形相比, dRGT massive gravity中的比例系数 $C^{(n=0)}$ 与引力子质量参数 m 相关.

4 结论

我们首先回顾了爱因斯坦引力情形下, 慢旋转中子星在牛顿极限下的转动惯量 I 和四极矩 Q 的定义, 并重点简介慢旋转中子星牛顿极限下的 I - Q 关系式, 即中子星牛顿极限下无量纲化后的转动惯量 I^N 与四极矩 Q^N 的平方成正比. 已有研究表明该 I - Q 关系式是与中子星的物态方程无关的, 从而可利用该 I - Q 关系式来检验各种引力理论.

作为一种引力子静止质量非零的修正引力理论, 自洽性很好的dRGT massive gravity理论是当前的研究热点. 因此, 本文重点研究dRGT massive gravity下的中子星 I - Q 关系, 并与爱因斯坦引力下的结果进行比较. 为得到解析解从而便于比较, 我们考虑了dRGT massive gravity中 $c_1 = 0$ 这种情况下的 I - Q 关系. 采用 $n=0$ 的多方过程, 解析计算出了该情形下中子星牛顿极限下的 I - Q 关系式(45). 我们发现, 该情形下中子星牛顿极限下的 I - Q 关系与爱因斯坦引力情形下一样, 仍然满足 I^N 与 Q^N 的平方成正比. 不过, 非零的引力子质量改变了比例系数, 并且引力子质量为零时, 该比例系数可退化到爱因斯坦引力中的结果.

需要注意的是, 在dRGT massive gravity计算中子星的 I - Q 关系时, 只考虑 $c_1 = 0$ 的情况, 并采用 $n=0$ 的多方过程计算出解析结果. 在该解析结果中, 引力子质量的影响可等效为修改万有引力常数 G 为 $\frac{G}{1+c_0^2 c_2 m^2}$. 因此, 我们也许可在太阳系内通过相关实验精确测量万有引力常数来对该引力子质量项进行限制. 不过在

dRGT massive gravity中, 目前关于 c_0, c_1, c_2 的取值并没有很好的物理解释. 因此, $c_1 = 0$ 有可能并不是真实的情况, 还需考虑一些其他的情况. 而对于其他情况, 我们也有一些初步探究. 比如, 对于 $n=1$ 的情况, 我们发现转动惯量计算出的结果与爱因斯坦引力一致, 即

$$(16) \text{式中的 } I^N = \frac{2(\pi^2 - 6)}{3\pi^2} \frac{1}{C^2},$$

但由于这种情况下中子星密度不是均匀的, 星体内部引力势函数无法利用麦克劳林椭圆球体模型中的引力势函数表示, 因此利用这种方法求解无量纲化的四极矩 Q^N 存在困难. 不过对于密度不均匀情形, 一般可先求出中子星的潮汐Love数, 再利用潮汐Love数与 Q^N 的关系来求取中子星无量纲化的四极矩 Q^N [12]. 关于中子星潮汐Love数的计算, 我们也正在考虑中. 而通过该情形的计算结果, 我们也可判断dRGT massive gravity情形下中子星的 I - Q 关系是否依然不依赖于物态方程. 对于 $c_1 \neq 0, n=0$ 的情况, 由于星体仍然是密度均匀的, 故约化转动惯量 I^N (式(32))、四极矩 Q (式(33))的形式也与爱因斯坦引力中 $n=0$ 的情况一致. 但是, 在这种情况下由于受非零的引力子质量影响, 较难通过麦克劳林椭圆球体模型得到中子星转动角速度 Ω 与偏心率 e 的关系, 故如何求解此种情况下无量纲化的四极矩 Q^N 依然是一个待解决的问题. 对于 $c_1 \neq 0, n=1$ 的情况, 我们发现利用星体内部平衡方程和物态方程求解出的密度解析表达式很复杂, 导致中子星转动惯量 I (式(5))的积分都比较难以解析求出. 因此, 对于这些情形的进一步研究也是下一步的工作.

除此之外, 本文计算的前提是慢速旋转的中子星. 事实上, 中子星的转速是可以很快的. 在快速旋转的情况下, 中子星的外部解和内部解都难以解析计算, 比如目前还没有找到dRGT massive gravity下解析的转动黑洞解. 因此, 相关的数值计算值得进一步考虑. 最后, 如何将本文的相关结果与目前的天文观测联系起来也是值得探究的问题.

参考文献

- 1 Xiang S P. Introduction to Astrophysics (in Chinese). Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2005 [向守平. 天体物理概论. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2008]
- 2 Zhao K H. New Concept Physics Tutorial Heat (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2005 [赵凯华. 新概念物理教程热学. 北京: 高等

教育出版社, 2005]

- 3 Liu L. General Relativity (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2004 [刘辽. 广义相对论. 北京: 高等教育出版社, 2004]
- 4 Akmal A, Pandharipande V R, Ravenhall D G. Equation of state of nucleon matter and neutron star structure. *Phys Rev C*, 1998, 58: 1804–1828, arXiv: [nucl-th/9804027](#)
- 5 Douchin F, Haensel P, Meyer J. Nuclear surface and curvature properties for SLy Skyrme forces and nuclei in the inner neutron-star crust. *Nucl Phys A*, 2000, 665: 419–446
- 6 Burgay M, D’Amico N, Possenti A, et al. An increased estimate of the merger rate of double neutron stars from observations of a highly relativistic system. *Nature*, 2003, 426: 531–533, arXiv: [astro-ph/0312071](#)
- 7 Lattimer J M, Schutz B F. Constraining the equation of state with moment of inertia measurements. *Astrophys J*, 2005, 629: 979–984, arXiv: [astro-ph/0411470](#)
- 8 Flanagan É É, Hinderer T. Constraining neutron-star tidal Love numbers with gravitational-wave detectors. *Phys Rev D*, 2008, 77: 021502, arXiv: [0709.1915](#)
- 9 Hinderer T, Lackey B D, Lang R N, et al. Tidal deformability of neutron stars with realistic equations of state and their gravitational wave signatures in binary inspiral. *Phys Rev D*, 2010, 81: 123016, arXiv: [0911.3535](#)
- 10 Damour T, Nagar A, Villain L. Measurability of the tidal polarizability of neutron stars in late-inspiral gravitational-wave signals. *Phys Rev D*, 2012, 85: 123007, arXiv: [1203.4352](#)
- 11 Yagi K, Yunes N. I -Love- Q : Unexpected universal relations for neutron stars and quark stars. *Science*, 2013, 341: 365–368, arXiv: [1302.4499](#)
- 12 Yagi K, Yunes N. I -Love- Q relations in neutron stars and their applications to astrophysics, gravitational waves, and fundamental physics. *Phys Rev D*, 2013, 88: 023009, arXiv: [1303.1528](#)
- 13 Doneva D D, Yazadjiev S S, Stergioulas N, et al. Breakdown of I -LOVE- Q universality in rapidly rotating relativistic stars. *Astrophys J*, 2013, 781: L6, arXiv: [1310.7436](#)
- 14 Chakrabarti S, Delsate T, Gürlebeck N, et al. I - Q relation for rapidly rotating neutron stars. *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 201102, arXiv: [1311.6509](#)
- 15 Doneva D D, Yazadjiev S S, Kokkotas K D. I - Q relations for rapidly rotating neutron stars in $f(R)$ gravity. *Phys Rev D*, 2015, 92: 064015, arXiv: [1507.00378](#)
- 16 Mariji H, Bertolami O. Neutron stars, ungravity, and the I -Love- Q relations. *Phys Rev D*, 2017, 96: 084042, arXiv: [1706.06372](#)
- 17 Boulware D G, Deser S. Can gravitation have a finite range? *Phys Rev D*, 1972, 6: 3368–3382
- 18 de Rham C, Gabadadze G, Tolley A J. Resummation of massive gravity. *Phys Rev Lett*, 2011, 106: 231101, arXiv: [1011.1232](#)
- 19 Wu X J. Perturbation method for slowly rotating star structure (in Chinese). *Chin Astron Astrophys*, 1996, 37: 254–266 [吴雪君. 慢旋转星体结构的微扰方法. 天文学报, 1996, 37: 254–266]
- 20 Hartle J B. Slowly rotating relativistic stars. I. Equations of structure. *Astrophys J*, 1967, 150: 1005–1029
- 21 Laarakkers W G, Poisson E. Quadrupole moments of rotating neutron stars. *Astrophys J*, 1999, 512: 282–287, arXiv: [gr-qc/9709033](#)
- 22 Cai R G, Hu Y P, Pan Q Y, et al. Thermodynamics of black holes in massive gravity. *Phys Rev D*, 2015, 91: 024032, arXiv: [1409.2369](#)
- 23 Chandrasekhar S. Ellipsoidal Figures of Equilibrium. Newhaven: Yale University Press, 1969
- 24 Shapiro S, Teukolsky S. Black Hole, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects. Weinheim: Wiley-VCH, 1983

I - Q relation of neutron star affected by massive graviton

SANG Ao-Fei, LIANG Xiao & HU Ya-Peng^{*}

College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China

Recently, it has been found that there is a relationship between the moment of inertia I and gravitational quadrupole moment Q of a neutron star, which is well-known as the I - Q relation of a neutron star. Specifically, the I - Q relation is found to be independent of the state equation of matter inside a neutron star and is only related to gravitational theories. Therefore, this I - Q relation can be used to test gravitational theories. The dRGT massive gravity is a well-defined modified gravity with massive graviton, which has attracted considerable attention. In this study, we mainly investigate the I - Q relation of a neutron star affected by massive graviton in the dRGT massive gravity. By focusing on a slow rotational neutron star, and using the state equation of matter inside the star with $n=0$ case in the polytropic process, we analytically obtain the I - Q relation under the Newtonian limit of neutron stars in the dRGT massive gravity. We compare our results with those in Einstein gravity, and obtain that the I - Q relation still holds in the presence of massive graviton. However, the proportional coefficient of the I - Q relation is dependent on the graviton mass parameter m .

neutron star, I - Q relation, dRGT massive gravity, Newtonian limit, polytropic process

PACS: 97.60.Jd, 04.50.Kd, 04.25.Nx, 26.60.Kp

doi: [10.1360/SSPMA-2020-0350](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2020-0350)