中国科学: 数学 2023 年 第 53 卷 第 10 期: 1287～1302

SCIENTIA SINICA Mathematica

综 述

几何变分问题近期发展

王童瑞[1], 周鑫[2*]

1. 浙江西湖高等研究院 (西湖大学) 理论科学研究院, 杭州 310024;
2. Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca 14850, USA
E-mail: wangtongrui@westlake.edu.cn, xinzhou@cornell.edu

收稿日期: 2023-04-11; 接受日期: 2023-07-18; 网络出版日期: 2023-09-07; * 通信作者
中国博士后科学基金 (批准号: 2022M722844)、美国国家科学基金 (批准号: DMS-1945178) 和斯隆基金资助项目

摘要 本文回顾与平均曲率相关的几何变分理论的最新研究进展, 主要讨论极小超曲面的 Morse 理论, 并重点介绍常平均曲率 (constant mean curvature, CMC) 曲面的变分理论、重数一猜想、极小超曲面的典范空间分布、自由边界极小曲面的变分理论及在等变情形下的推广.

关键词 几何变分理论 极小 (超) 曲面 CMC (超) 曲面

MSC (2020) 主题分类 53-02, 53A10, 53C42

1 引言

在几何学中一类重要的研究课题是考虑长度泛函、面积泛函及体积泛函在一些约束条件下的变分问题, 并研究相应的临界子流形. 而一个子流形能否成为这类变分问题的一阶临界点往往与子流形的平均曲率这一几何量密切相关. 其中最显著的例子包括极小曲面、常平均曲率 (constant mean curvature, CMC) 曲面及更一般的带有预定平均曲率 (prescribed mean curvature, PMC) 的曲面, 它们的平均曲率函数分别为 0、等于常数, 或由背景函数预定. 自 1762 年 Lagrange 在极小曲面上的工作以来, 数学家们对这类问题的研究已经广泛地持续了两个多世纪, 开发并使用了多种不同的方法, 包括但不限于复分析、变分法、偏微分方程和几何测度论. 这些变分问题中的临界子流形不仅蕴含了丰富的数学之美, 有关它们的研究也推动了其他各个领域的发展进步, 例如, 拓扑学、分析学和物理学的许多基本问题中都有着它们的深刻应用. 更多有关其历史背景的介绍 1)可参见文献 [12,71,75].

本文重点关注面积或体积变分问题下的临界曲面. 在过去的十年中, 几何变分理论取得了惊人的发展, 在极小曲面、CMC 曲面和 PMC 曲面的存在性方面得到了许多深刻的新成果. 其中最引人瞩目的成果包括丘成桐教授关于存在无穷多个闭极小曲面的著名猜想, 已经可以通过 Marques 和 Neves[67] 和 Song[91] 的工作得以证明, 而 Zhou 和 Zhu[109,110] 及 Cheng 和 Zhou[10] 则分别建立了 CMC 闭曲面和

1) Zhou X. Mean curvature and variational theory. ICM 2022 proceedings, 2023, to appear

英文引用格式: Wang T R, Zhou X. Recent progress on geometric variational theory (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 1287–1302, doi: 10.1360/SSM-2023-0077

PMC 闭曲面存在性的一般性结论. 此外, 对于这些曲面之间的联系也有着令人惊喜的新发现, Zhou[108] 也由此证明了极小超曲面的重数一猜想 (the multiplicity one conjecture). 同时, 在一些对称性的约束下, 这类结论也有着许多自然的等变推广, 其中 Wang[96–98] 及 Wang 和 Wu[99] 共同完成了等变极小曲面和等变 CMC 闭曲面的一般存在性结果与相关应用. 本文将介绍有关这些研究的前沿成果.

首先从 3 维空间中极小曲面的变分构造开始讨论, 并进一步在背景空间维数高于 3 维的一般情形下讨论极小超曲面的构造. 液体的表面张力使得肥皂膜的面积最小化, 而在数学中描述这类曲面的模型就是极小曲面. 根据面积泛函的第一变分公式可知, 这类曲面的平均曲率需要处处为 0. 更一般地, 平均曲率恒为 0 的曲面被称为极小曲面, 等价地, 极小曲面就是面积泛函的驻点. 关于如何在 3 维 Euclid 空间中找到给定边界的面积最小曲面 (area-minimizing surfaces) 这一问题, 最早由 Lagrange 提出, 并在 Joseph Plateau 于 19 世纪用肥皂膜进行了系统性试验后被正式命名为 Plateau 问题. 1930 年, Douglas[22] 和 Radó[80] 使用映射的方法分别独立地解决了 Plateau 问题. 从那之后, 众多研究涌现, 尝试将该存在性结果推广到 Euclid 空间或者 Riemann 空间中的高维和高余维子流形. 特别地, 在许多杰出的数学家们的发展和推动下, 几何测度论 (geometric measure theory) 应运而生. 通过结合 Federer 和 Fleming[24]、De Giorgi[17]、Almgren[4]、Federer[23] 及 Simons[89] 的研究工作, 数学家们已经熟知余一维的面积最小流动型 (current) 在一个至少余 7 维的奇点集之外是处处光滑嵌入的. (对于高余维的面积最小流动型的正则性可参见文献 [18].)

基于 Plateau 问题, 一个自然的问题是考虑闭 Riemann 流形中是否存在闭的极小曲面. 当背景流形满足一定的拓扑条件时, 依然可以使用映射的方法或者几何测度论构造面积最小曲面. 当背景流形 M^n 中包含一个不可压缩 (incompressible) 的曲面 $f: S_g \to M$ 时 (S_g 是一个亏格为 g 的曲面), Schoen 和 Yau[87] 及 Sacks 和 Uhlenbeck[83] 通过研究 Dirichlet 能量泛函 $E(f) = \int_{S_g} |\nabla f|^2 d\sigma$ 得到了对应极小曲面的存在性. 他们首先在所有的映射类里面最小化能量泛函 $E(f)$, 并进一步在共形结构的 Teichmüller 空间最小化 $E(f)$, 从而在 f 的共轭类中构造了面积最小曲面. Meeks III 等[73] 通过在 3 维流形的非平凡同痕类中作面积的最小化, 得到了光滑嵌入的极小曲面. 更一般地, 如果同调群 $H_{n-1}(M^n, \mathbb{Z})$ 中存在非平凡的元素 $c \neq 0$, 则根据几何测度论 (geometric measure theory, GMT) 可知, c 中一定存在面积最小的整流动型 (integral current) $\Sigma \in c$, 其支集在一个余 7 维的奇点集之外是光滑嵌入的.

如何在一般的情形下构造闭的极小超曲面这一问题更加有趣, 同时也更具有挑战性. 作为一维的极小子流形, 闭测地线在 2 维球面中的构造方法在 20 世纪初已被发现 (参见文献 [7,62]). 而这些早期的研究启发 Almgren[2,3] 开创了一项数学理论, 旨在构造任意维数和余维数的闭极小子流形. 对于任意的闭 Riemann 流形 M^n 和任意整数 $1 \leqslant k \leqslant n-1$, Almgren 设计了一个非常一般化的极小极大理论 (min-max theory), 并通过在一族整闭链 (integral cycles) 上应用该理论, 证明了存在非平凡的 k 维第一变分为零 (stationary) 的整泛簇 (integral varifolds). 随后, Pitts[77] 在一项开创性的研究中进一步完善了 Almgren 的方法. 他利用 Schoen 等[86] 著名的稳定极小超曲面的曲率估计结果, 在 $3 \leqslant n \leqslant 6$ 的情形下证明了余一维 ($k = n-1$) 的极小极大泛簇 (min-max varifolds) 其支集是光滑嵌入的. 而当 Schoen 和 Simon[85] 进一步推广了曲率估计的结果后, 他们随即在更一般的高维情形下 ($n \geqslant 7$) 得到了余一维极小极大泛簇奇点集至少余 7 维的正则性理论. 综合以上的结果, 闭极小曲面的第一个一般存在性定理如下:

定理 1.1 在任意维数 n 大于等于 3 的闭 Riemann 流形 (M^n, g) 中, 存在着非平凡的第一变分为零 (stationary) 的 $n-1$ 维整泛簇 (integral $(n-1)$-varifold) V, 其支集在一个余 7 维的奇点集之外是光滑嵌入的. 特别地, 若 $3 \leqslant n \leqslant 7$, 则 V 的支集是一个光滑嵌入的闭极小超曲面 Σ.

注意到, 当 M^n 有非平凡的高阶同伦群时, Sacks 和 Uhlenbeck[83] 使用扰动的方法以及 Banach

流形上的经典 Morse 理论发展了另一套极小极大理论, 构造了分歧 (branched) 浸入的 2 维极小球面. 近期, Colding 和 Minicozzi [14] 在证明 Ricci 流有限时间消失时, 利用调和替换的方法给出了 Sacks-Uhlenbeck 结果的一个新证明. 关于高亏格极小曲面的极小极大构造, 可参见文献 [81,106,107].

受到这些结果和闭测地线理论的启发, Yau [104] 提出了一个著名的猜想, 断言每个 3 维闭 Riemann 流形中都存在无限多个不同的光滑浸入的闭极小曲面. 近期, Marques 和 Neves [67] 及 Song [91] 的工作解决了这一猜想, 同时也将极小曲面理论的发展推向了一个新的巅峰. 大约在同一时间, 面积泛函的 Morse 理论也得以建立 (参见文献 [64,66,68,108]), 进一步还有许多关于极小超曲面在空间中分布性质的惊奇结果被揭示出来 (参见文献 [44,69,92]). 而所有的这些结果均是通过在高维参数空间中应用 Almgren-Pitts 极小极大理论实现的 (深受 Marques 和 Neves [65] 对 Willmore 猜想证明的影响). 有关内容将在第 3 和 4 节中展开详细的讨论和介绍.

在上述关于极小超曲面的研究结果中, 一个核心的困难在于极小极大泛簇是带有整数重数的, 也即极小极大泛簇可能是带有整数重数的极小超曲面. 因此, 对于参数空间维数不同的整闭链族, 应用极小极大理论所构造的极小超曲面可能仅是重数不同. 在经典 Morse 理论的启发下, Marques 和 Neves [68] 提出了重数一猜想:

猜想 1.1 对于光滑典范 (generic) 的 Riemann 度量, 在维数 $3 \leqslant n \leqslant 7$ 的流形 M^n 中, 所有极小极大泛簇均由重数一的嵌入极小超曲面所诱导.

受到 CMC/PMC 超曲面 [109,110] 存在性研究的启发, 猜想 1.1 在文献 [108] 中得到了证实. 第 3 节介绍该猜想的证明概要. 值得一提的是, Chodosh 和 Mantoulidis [11] 在 3 维时证明了相变设定下 (the phase transition setting) 重数一猜想的相应结果 (参见文献 [30,34]).

由于极小曲面方程的非线性性, 构造这些变分临界曲面的具体实例十分困难, 而对称性往往是降低这类问题复杂度的一项有效手段, 如在 $\mathbb{R}^3$ 中有着 Scherk 曲面 [84] 等具有周期性的完备极小曲面及 S^3 中的 Lawson 曲面 [52] 等. 更一般地, Hsiang 和 Lawson [43] 考虑了有紧 Lie 群 G 等距作用的 Riemann 流形 M, 并通过在轨道空间 M/G 中利用轨道的体积函数对诱导度量作加权 (共形变换), 将 M 中 G- 等变子流形的面积变分问题转化为 M/G 中加权度量下的变分问题, 进而结合对轨道空间中加权度量下测地线常微分方程的研究, 在 S^n 等对称空间中构造了闭极小子流形 (参见文献 [38,39]). 而这一套由 Hsiang 开发的方法也称为等变微分几何 (equivariant differential geometry), 在闭极小曲面、自由边界极小曲面 [29] 和 CMC 曲面 [40] 的构造中都发挥了重要的作用. 特别地, Hsiang [41] 证明了在一些高维球面 S^n 中存在着非赤道的嵌入极小超球面, 解决了 "球面 Bernstein 问题", 并进一步在 $n \geqslant 3$ 的球面中构造了无穷多个非全等的嵌入闭极小曲面 [42].

将对称性与几何测度论相结合, Lawson [53] 首先提出并研究了等变约束下的 Plateau 问题. 而随着 Almgren-Pitts 极小极大理论的发展和应用, 一类自然的问题是, 在一般的具有一定对称性 (有紧 Lie 群 G 等距作用) 的闭 Riemann 流形 M 上是否存在对称 (G- 等变) 的闭极小超曲面和对称的 CMC 闭超曲面? 等变的极小超曲面是否有无穷多个? 又有着怎样的分布性质与 Morse 指标估计? 在一系列的工作中, Wang [96–98] 实现了 Almgren-Pitts 设定下的等变极小极大理论, Wang 和 Wu [99] 则完成了等变 CMC 闭超曲面的一般存在性结果, 第 6 节中将对此展开详细的介绍.

2 CMC (超) 曲面和 PMC (超) 曲面

常平均曲率 (CMC) 的曲面给出了肥皂泡的数学模型. 在理想状态下, 表面张力促使曲面在包裹

空气体积不变的条件下实现面积的最小化. 这样的曲面必定是面积泛函在具有体积约束条件下的驻点, 因此根据第一变分公式, 该曲面一定是常平均曲率的. CMC 曲面是微分几何中的经典研究课题, 它在等周问题 (isoperimetric problems)、聚合物界面理论 (interface theory for polymers) 和广义相对论等许多领域都发挥着重要作用. 自 Aleksandrov [1] 的开创性工作以来, 有关 $\mathbb{R}^3$ 以及其他 3 维齐次流形中如何对 CMC 曲面进行分类一直是一个经典问题. 对这一方面的研究可参见文献 [72]. 本文着重介绍一般流形中 CMC 曲面的存在性理论.

首先简要回顾有关 CMC 曲面存在性问题的研究背景. 在 $\mathbb{R}^3$ 中, Heinz [36] 和 Hildebrandt [37] 首先提出了满足 Plateau 边界条件的预定常值平均曲率曲面的存在性. 之后, Rellich 猜想断言 CMC Plateau 问题的解至少有两个, 而这一猜想后来被 Brezis 和 Coron [9] 及 Struwe [93] 所解决. 对于闭的 CMC 超曲面, 我们熟知等周区域 (isoperimetric regions) 的边界是奇点集至少余 7 维的光滑嵌入 CMC 超曲面 (参见文献 [5,74]). 同时, 对于非退化的极小超曲面或严格低维的极小子流形, 还可以通过扰动的方法, 在其附近构造由闭 CMC 超曲面所组成的叶状结构 (foliation), 对此可参见 Ye [105] 和 Mahmoudi 等 [63] 的工作. 而 Kapouleas [8,47] 则开创了一套黏接的构造方法, 成功地在 Euclid 空间中构造了完备以及紧致 CMC 曲面的许多重要例子. 此外, 对于 CMC 曲面的构造还有 Rosenberg 和 Smith [82] 的度数理论 (degree theory) 等方法. 然而, 所有的这些工作都未能解决一个基本而重要的问题, 即如何在一般的流形中构造任意给定常值平均曲率的闭超曲面?

Zhou 和 Zhu [109] 建立了如下的一般存在性理论, 从而解决了这个问题.

定理 2.1 [109] 设 M^n 是维数 $3 \leqslant n \leqslant 7$ 的闭 Riemann 流形. 对于任意给定的常数 $c \in \mathbb{R}$, 存在一个非平凡的、光滑的、闭的、几乎嵌入的 (almost embedded) 超曲面 Σ, 满足平均曲率为 c.

注 2.1 一个光滑的几乎嵌入的超曲面是一个光滑浸入超曲面, 满足在自相交点处可以分解为若干个彼此相切的叶片. 这样的超曲面是 Alexandrov 嵌入的.

为了证明此定理, 可以在极小极大理论中考虑添加体积项的面积泛函, 进而将 Almgren-Pitts 的理论推广到更一般的 CMC 设定下.

需要注意的是, 由于使用了整流动型作为总的变分空间, 因此并不清楚定理 2.1 中所给出的 CMC 超曲面是否存在着拓扑上的控制. 与此相对地, Simon 和 Smith (参见文献 [90]) 给出了 Almgren-Pitts 理论的一个变体, 并证明了在任意 3 维 Riemann 球中都存在着嵌入的 2 维极小球面. 通过考虑 Heegaard 分裂并生成类扫描族 (sweepout), Colding 和 De Lellis [13] 进一步地将这个结果推广到了任意的 3 维闭流形 M 中, 并且对于此方法构造出的极小极大曲面满足亏格被 M 的 Heegaard 亏格所控制 (参见文献 [19,50]). 此外, 基于调和映照方法的极小极大理论 [14,81,83,106,107] 也自然地生成满足亏格控制的分歧浸入极小曲面. 考虑到这些对比, 一个非常有吸引力的问题是如何在 3 维流形中构造满足预定常值平均曲率以及亏格控制 (由背景流形的 Heegaard 亏格控制) 的闭 CMC 曲面. 特别地, 文献 [82, 第 3 页] 提出了如下的猜想: "对于任意 $H \geqslant 0$ 以及 S^3 中正截面曲率的度量 g, 存在一个以 H 为常值平均曲率的从 S^2 到 S^3 的嵌入映射". 然而, 根据 Torralbo [95] 和 Meeks III 等 [70] 的工作可知, 在某些正曲率的齐性 3 维球中存在着一些常数 H, 使得以 H 为常平均曲率的 2 维球总有自相交点. 受到极小曲面映射构造方法的启发, 一个自然的想法是将 Rosenberg-Smith 猜想中的 "嵌入" 修改为 "分歧浸入".

Cheng 和 Zhou [10] 使用映射的方法重新设计了极小极大理论的构造并解决了此修改后的猜想.

定理 2.2 [10] 对于任意非负 Ricci 曲率的 3 维 Riemann 球面 (S^3, g) 和任意的常值 H, 存在着非平凡的、以 H 为常值平均曲率的分歧浸入 2 维球面.

注 2.2 事实上, 文献 [10] 证明了只要 (S^3, g) 满足 $\mathrm{Ric}_g > -\frac{H^2}{2} g$ 就有分歧浸入的 H-CMC 2- 球面. 而当 (S^3, g) 没有曲率限制时, 上述结论对 (Lebesgue 测度意义下) 几乎所有的 H 都成立.

对于 M^n 中的超曲面 Σ^{n-1} 以及函数 $h: M \to \mathbb{R}$, 若 Σ^{n-1} 的平均曲率处处等于 h, 则称其为以 h 为 PMC 的超曲面. PMC 超曲面不仅是 CMC 超曲面的自然推广, 也是不同液体之间临界面的数学模型 (参见文献 [25, 第 1.6 小节]). 在 Plateau 边界条件以及图形情形下, PMC 超曲面的局部存在性已经有了十分清晰的了解 (参见文献 [110]). 然而, 除了预定函数为常值的情形外, PMC 超曲面的整体理论以及闭 PMC 超曲面的存在性问题在很大程度上是开放的. 在 3 维闭流形中, 闭 PMC 曲面的整体存在性问题是丘成桐教授于 20 世纪 80 年代提出的一个猜想 (根据个人交流, 在 $\mathbb{R}^3$ 中的猜想内容可参见文献 [104, 问题 59]).

Zhou 和 Zhu [110] 将文献 [109] 中的 CMC 极小极大理论进一步推广到非常值的预定函数情形. 特别地, 对于一类典范的 (generic) 光滑预定函数, 闭 PMC 超曲面的存在性已被解决.

定理 2.3 [110] 令 M^n 为维数 $3 \leqslant n \leqslant 7$ 的闭 Riemann 流形. 存在 (光滑拓扑下的) 开稠集 $\mathcal{S} \subset C^\infty(M)$, 使得对于任意预定函数 $h \in \mathcal{S}$ 都存在以 h 为预定平均曲率的、非平凡的、光滑的、闭的、几乎嵌入的超曲面, 即 $H_\Sigma = h\,|_\Sigma$.

在定理 2.1 和 2.3 的证明中, 极小极大理论的构造均基于一维参数空间中的类扫描族. 这些结果后来被 Zhou [108] 推广到高维参数情形的极小极大构造, 并进一步获得 Morse 指标的上界控制. 同时, Zhou [108] 在证明重数一猜想的过程中, 定理 2.3 及其推广形式 [108] 起到了至关重要的作用.

最后值得注意的是, 对于非负 Lipschitz 的预定函数, Bellettini 和 Wickramasekera [6] 还通过相变 (phase transition) 的方法解决了 PMC 超曲面的存在性问题.

3 面积变分理论与重数

本节介绍近期取得了巨大进展的面积泛函 Morse 理论, 同时给出关于重数一猜想的证明概要. 为方便起见, 下文将使用 n 表示超曲面 Σ^n 的维数, 并用 $n+1$ 表示背景流形 M^{n+1} 的维数.

Morse 理论的原理是将全空间的拓扑结构与其中泛函的临界点集相关联. 这里选择模 -2 的 n- 闭链 (cycles) 空间作为定义面积泛函的全空间, 并将其记作 $\mathcal{Z}_n(M, \mathbb{Z}_2)$. 该空间中的元素可以粗略地理解为具有有限 n 维 Hausdorff 测度的开集边界. Almgren [2] 计算了 $\mathcal{Z}_n(M, \mathbb{Z}_2)$ 的所有同伦群, 并证明了如下的定理:

定理 3.1 $\mathcal{Z}_n(M, \mathbb{Z}_2)$ 弱同伦等价于 $\mathbb{RP}^\infty$.

这里 $\mathbb{RP}^\infty$ 表示无穷维实射影空间. 此定理表明 $\mathcal{Z}_n(M, \mathbb{Z}_2)$ 的 $\mathbb{Z}_2$- 上同调环是多项式环, 进而用 $\bar{\lambda}$ 表示其生成元, 即 $H^*(\mathcal{Z}_n(M, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\bar{\lambda}]$. 受到此拓扑结构的启发, Gromov [31,32]、Guth [35] 及 Marques 和 Neves [67] 在 $\mathcal{Z}_n(M, \mathbb{Z}_2)$ 中引入了面积泛函的体积谱这一概念作为 Laplace 谱的非线性版本. 接下来, 令 X 为任意有限维的参数空间, 例如 X 可以为一个方体复形 (cubical complex).

定义 3.1 (体积谱) 设 $k \in \mathbb{N}$, 若连续映射 $\Phi: X \to \mathcal{Z}_n(M, \mathbb{Z}_2)$ 满足 $\Phi^*(\bar{\lambda}^k) \neq 0 \in H^k(X, \mathbb{Z}_2)$, 则称 Φ 为一个 k- 类扫描族. 定义第 k 体积谱 (k-th volume spectrum) 或 k- 宽度 (k-width) 为如下的极小极大值:

$$\omega_k(M) = \inf_{\Phi: k\text{-类扫描族}} \sup_{x \in \mathrm{dmn}(\Phi)} \mathrm{Area}(\Phi(x)),$$

其中 $\mathrm{dmn}(\Phi)$ 为 Φ 的定义域.

根据文献 [31,32,35,67] 中的结果可知, 当 $k \to \infty$ 时, 体积谱序列 $\{\omega_k(M)\}$ 满足非线性的增长速率 $k^{\frac{1}{n+1}}$. 更进一步地, 该序列满足如下的 Weyl 定律:

定理 3.2 [60] 存在只依赖于 n 的常数 $a(n)>0$, 使得对于任意紧 Riemann 流形 M^{n+1}, 都有

$$\lim_{k\to\infty}\omega_k(M)k^{-\frac{1}{n+1}}=a(n)\operatorname{Vol}(M)^{\frac{n}{n+1}}.$$

这里需要注意的是, Almgren-Pitts 极小极大理论需要被应用在一个同伦类中的 k- 类扫描族上, 而体积谱的定义中则需要考虑所有满足上同调条件的 k- 类扫描族. 为了将它们联系在一起, Marques 和 Neves [66] 系统地研究了 Almgren-Pitts 理论中生成的极小超曲面的 Morse 指标. 特别地, 他们证明了如下形式的极小极大定理 (min-max theorem):

定理 3.3 令 M^{n+1} 为维数 $3\leqslant n+1\leqslant 7$ 的闭 Riemann 流形. 对于任意 $k\in\mathbb{N}$, 存在若干个互不相交的、连通的、闭的、光滑嵌入的极小超曲面 $\{\Sigma_i^k: i=1,\dots,l_k\}$ 和整数重数 $\{m_i^k: i=1,\dots,l_k\}\subset\mathbb{N}$, 使得

$$\omega_k(M)=\sum_{i=1}^{l_k}m_i^k\cdot\operatorname{Area}(\Sigma_i^k),\quad \sum_{i=1}^{l_k}\operatorname{Ind}(\Sigma_i^k)\leqslant k,$$

其中 $\operatorname{Ind}(\Sigma)$ 表示 Σ 的 Morse 指标, 即其面积二阶变分中的负特征值个数.

自 20 世纪 80 年代 Almgren-Pitts 极小极大理论创立之初, 可能存在重数大于 1 的特性就成为了阻碍该理论进一步应用的一大主要障碍. 例如, 在将定理 3.3 应用于每个 $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 时, 重数大于 1 可能导致反复出现相同的极小超曲面. 此外, 对于高重数的极小极大泛簇也无法使用 Marques 和 Neves [68] 的构造方法来获得 Morse 指标的下界控制 (另参见文献 [64]). 对此, Marques 和 Neves [68] 提出了如下的著名猜想.

猜想 3.1 (重数一猜想) 对于 $3\leqslant n+1\leqslant 7$ 的闭流形 M^{n+1}, 在多凸 (bumpy) 度量下总存在一族满足定理 3.3 的极小超曲面 $\{\Sigma_i^k\}$, 使得 Σ_i^k 的每个连通分支都是双面的 (two-sided) 重数一的.

注 3.1 对于任意超曲面, 若其法丛平凡, 则称其为双面的. 在一个 Riemann 度量下, 如果每个浸入的闭极小超曲面都是面积泛函的非退化临界点, 则称该度量是多凸度量. White [102, 103] 证明了所有多凸度量构成的集合在 Baire 范畴意义下是典范的.

此猜想得到了 Zhou [108] 的证实.

定理 3.4 [108] 猜想 3.1 为真.

对于任意 $k\in\mathbb{N}$, 结合定理 3.4 以及 Marques 和 Neves [68] 发展出的一套用于估计 Morse 指标下界的方法, 可以证明存在 Morse 指标为 k 且面积为 $\omega_k(M)$ 的闭极小超曲面. 以上工作共同为面积泛函建立了一个令人满意的整体 Morse 理论. 近期, Marques 等 [64] 证明了面积泛函的 Morse 不等式, 进而由此建立了局部的 Morse 理论.

根据 Sharp [88] 的极小超曲面紧性定理, 定理 3.4 中的结论在正 Ricci 曲率的度量下同样成立. 同时, 对于典范度量 (generic metric) 下极小极大超曲面的重数和 Morse 指标, 我们还能得到如下的结果:

定理 3.5 [108] 在定理 3.3 中, 每个不是退化稳定的连通分支 Σ_j^k 均为双面的且 $m_j^k=1$, 满足 $\sum_{\Sigma_j^k:\text{双面的}}\operatorname{Ind}(\Sigma_j^k)\leqslant k$.

注 3.2 这里称一个闭极小超曲面 Σ 为退化稳定 (degenerate stable) 的, 若其面积泛函的二阶变分非负定且以 0 为特征值. 同时, 定理 3.5 中的结果已被 Li [57] 部分推广至更高维 $n+1>7$ 的情形.

对于非多凸度量, 一个长时期被该领域专家关注的问题是高重数的极小曲面是否会真正在极小极大理论中出现. 当背景流形 M^{n+1} 有乘积结构, 即 $M^{n+1}=N^n\times S^1$ 时, 如果 S^1 因子的长度很大, 则一个平凡的事实是单参数的极小极大泛簇可以是任意一个截面 $N^n\times\{t\}$ 的两倍. 同时, 也可以手动将这个两重的全测地超曲面分成两个互不相交的超曲面 $N^n\times\{t_1\}$ 和 $N^n\times\{t_2\}$. 基于这个例子, 在很

长时间里, 专家相信重数一猜想的结论对于非多凸度量也成立, 即总可以找到重数一的极小超曲面来实现极小极大的宽度 (width). Wang 和 Zhou[101] 首次发现了重数一猜想结论不成立的例子. 具体地, 有如下定理.

定理 3.6[101] 在 $n+1$ 维球面 S^{n+1} $(3 \leqslant n+1 \leqslant 7)$ 上, 存在 (无穷多) Ricci 曲率非负的度量 g, 使得在此度量下, 第二体积谱 $\omega_2(S^{n+1}, g)$ 只能由两重的退化稳定的 (degenerate stable) 极小 n 维球面 (S^n) 实现.

注 3.3 此结论验证了重数一猜想 (定理 3.4) 和其推论 3.5 都是最优的. 同时, 文献 [101] 还给出了 $\omega_1(M, g)$ 只能由两重的单面的 (1-sided) 超曲面实现的例子.

定理 3.4 的证明 在文献 [108] 中, 证明的主要想法是考虑 PMC 极小极大理论中所使用的加权 $\mathcal{A}^h$- 泛函 (参见文献 [110]), 并用 $\mathcal{A}^h$- 泛函逼近面积泛函. 这里 $\mathcal{A}^h$ 泛函定义为 $\mathcal{A}^h(\Omega) = \mathrm{Area}(\partial\Omega) - \int_\Omega h dM$, 其中 Ω 为 Caccioppoli 集, $h \in C^\infty(M)$. $\mathcal{A}^h$- 泛函的光滑临界点是一个 Caccioppoli 集 Ω, 其边界为光滑的超曲面 $\Sigma = \partial\Omega$, 满足 Σ 关于外法方向的平均曲率为 $h \llcorner \Sigma$. 在证明中有两处关键点. 首先, 对于给定的多凸度量, 可以在极小极大理论的构造中使用 Caccioppoli 集的边界生成类扫描族, 并使构造出的极小超曲面满足面积等于给定的体积谱 $\omega_k(M)$. 其次还需注意到, 同样在多凸度量的假设下, 当使用泛函序列 $\{\mathcal{A}^{\epsilon_k h}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 逼近面积泛函 Area 时 $(\epsilon_k \to 0)$, 可以通过选取恰当的函数 $h: M \to \mathbb{R}$ 使得对应于 $\mathcal{A}^{\epsilon_k h}$- 泛函的极小极大 PMC 超曲面, 以及它们的极限极小超曲面均为双面的且重数一的.

(1) 给定多凸度量, 由文献 [66] 可知, 对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在着映射 $\Phi: X \to \mathcal{Z}_n(M, \mathbb{Z}_2)$ 的自由同伦类 Π, 使得其极小极大值 (min-max value) $\boldsymbol{L} := \inf_{\Phi\in\Pi} \max_{x\in X} \mathrm{Area}(\Phi(x))$ 等于 $\omega_k(M)$, 其中 X 为一个固定的 k 维参数空间. 选取 $\Phi_0 \in \Pi$ 使得 $\max_{x\in X} \mathrm{Area}(\Phi_0(x))$ 充分接近 $\boldsymbol{L}$. 由于 Caccioppoli 集组成的空间是 $\mathcal{Z}_n(M, \mathbb{Z}_2)$ 的双叶复叠, 其复叠映射由边界映射 $\partial: \Omega \to [\partial\Omega]$ 给出 (参见文献 [68]), 因此可以将 Φ_0 提升为 $\widetilde{\Phi}_0: \widetilde{X} \to \mathcal{C}(M)$, 其中 $\pi: \widetilde{X} \to X$ 同样为一个双叶复叠. 记 $\mathcal{S}$ 为满足 $\mathrm{Area} \leqslant \boldsymbol{L}+1$ 和 $\mathrm{Ind} \leqslant k$ 的嵌入闭极小超曲面所组成的集合. 令 Y 为 X 的子集, 其中包含了所有满足 $\Phi_0(x)$ ϵ- 接近于 $\mathcal{S}$ 的 $x \in X$, 再令 $Z = \overline{X \setminus Y}$. 由文献 [88] 可知, 在多凸度量下 $\mathcal{S}$ 为有限集, 故 Y 具有平凡拓扑, 进而可知 $\widetilde{Y} = \pi^{-1}(Y)$ 为 Y 的两个同胚副本的不交并, 即 $\widetilde{Y} = Y^+ \bigsqcup Y^-$ 且 $Y \simeq Y^+ \simeq Y^-$. 同时, 由于 $\Phi_0(Z)$ 中不存在接近于正则的元素, 由此可以基于 Pitts 的组合性讨论将 $\Phi_0|_Z$ 进行形变, 使得

$$\max_{x\in Z} \mathrm{Area}(\Phi_0(x)) < \boldsymbol{L}. \tag{3.1}$$

接下来考虑由 $\widetilde{\Phi}_0$ 生成的 $(\widetilde{X}, \widetilde{Z})$- 相对同调类 $\widetilde{\Pi} = \{\Psi: \widetilde{X} \to \mathcal{C}(M): \Psi|_{\widetilde{Z}} = \widetilde{\Phi}_0|_{\widetilde{Z}}\}$, 有如下引理:

引理 3.1 (参见文献 [108, 引理 5.8]) $\widetilde{\Pi}$ 的极小极大值 $\widetilde{\boldsymbol{L}}$ 满足

$$\widetilde{\boldsymbol{L}} := \inf_{\Psi\in\widetilde{\Pi}} \max_{x\in\widetilde{X}} \mathrm{Area}(\partial\Psi(x)) \geqslant \boldsymbol{L} = \omega_k(M).$$

因此根据 (3.1), 得到非平凡的条件 $\widetilde{\boldsymbol{L}} > \max_{x\in Z} \mathrm{Area}(\Phi_0(x))$.

证明 假设结论不真. 根据 $\max_{x\in\widetilde{Z}} \mathrm{Area}(\partial\widetilde{\Phi}_0(x)) = \max_{x\in Z} \mathrm{Area}(\Phi_0(x)) < \boldsymbol{L}$ 可知, 可以在 $\widetilde{Y}$ 中对 $\widetilde{\Phi}_0$ 进行形变使得面积的最大值严格小于 $\boldsymbol{L}$. 然而, 由于 Y^+ 与 Y^- 互不相交, 在 Y^+ (或 Y^-) 中的形变可通过商映射给出 $\Phi_0|_Y$ 在 $\mathcal{Z}_n(M, \mathbb{Z}_2)$ 中的形变. 再注意到所有的映射均在 Z 中不变, 故 Φ_0 在形变后的面积最大值严格小于 $\boldsymbol{L}$, 与 $\boldsymbol{L}$ 的选取矛盾. □

(2) 定理中的主要结论来自于如下的结果.

定理 3.7 (参见文献 [108, 定理 4.1]) 在上述记号下, 若 g 为多凸度量, 则 $\widetilde{\boldsymbol{L}}$ 可以被一个重数一的、嵌入的、双面的闭极小超曲面的面积实现.

为了得到定理 3.4, 首先注意到根据 Φ_0 的选取可知 $\widetilde{\boldsymbol{L}}$ 非常接近于 $\boldsymbol{L}$. 又由于 g 为多凸度量, 所以当它们充分接近时, $\widetilde{\boldsymbol{L}}$ 的值应当恰好达到 $\boldsymbol{L}$.

定理 3.7 的证明 为简化记号, 证明中省去所有的波浪号. 给定光滑函数 $h: M \to \mathbb{R}$ 和 $\epsilon > 0$, 可以使用 $\mathcal{A}^{\epsilon h}$- 泛函的极小极大值

$$\boldsymbol{L}^{\epsilon h} = \inf_{\Psi \in \Pi} \max_{x \in X} \mathcal{A}^{\epsilon h}(\partial \Psi(x))$$

逼近 $\boldsymbol{L}$, 即当 $\epsilon \to 0$ 时, $\boldsymbol{L}^{\epsilon h} \to \boldsymbol{L}$. 注意我们要求对于任意 $\Psi \in \Pi$ 都有 $\Psi|_Z = \Phi_0|_Z$. 于是, 根据 $\boldsymbol{L} > \max_{x\in Z} \mathrm{Area}(\partial\Phi_0(x))$ 的事实以及 $\mathcal{A}^{\epsilon h}(\Omega)$ 中的 $\epsilon\int_\Omega h dM$ 项充分小不难看出, 当 $\epsilon > 0$ 充分小时, 总有

$$\boldsymbol{L}^{\epsilon h} > \max_{x \in Z} \mathcal{A}^{\epsilon h}(\Psi(x)). \tag{3.2}$$

通过将文献 [110] 中 1 维参数版本的 PMC 极小极大理论推广至高维参数空间, 进而可以对典范选取的函数 h 应用该理论构造得到 $\Omega_\epsilon \in \mathcal{C}(M)$, 使得

(1) $\Sigma_\epsilon = \partial\Omega_\epsilon$ 为几乎嵌入的超曲面;

(2) 平均曲率 (相对于外法方向) 满足 $H_{\Sigma_\epsilon} = \epsilon h|_{\Sigma_\epsilon}$;

(3) $\mathcal{A}^{\epsilon h}(\Omega_\epsilon) = \boldsymbol{L}^{\epsilon h}$;

(4) Morse 指标 (相对于 $\mathcal{A}^{\epsilon h}$- 泛函) 满足 $\mathrm{Ind}(\Sigma_\epsilon) \leqslant k$.

令 $\epsilon \to 0$, 根据 (2)–(4) 和文献 [108, 定理 2.6] 可知, 存在子列 Σ_ϵ 在除去有限个点外局部光滑地收敛到一个带有整数重数 $m \in \mathbb{N}$ 的嵌入的闭极小超曲面 Σ_0 (不失一般性, 可假设 Σ_0 为连通的). 因此 $\boldsymbol{L} = m\,\mathrm{Area}(\Sigma_0)$, 故只需再证明 Σ_0 为双面的 (此处省略) 以及 $m = 1$.

根据收敛性可知, Σ_ϵ 可以局部地分解为 $\Sigma_0 \setminus \mathcal{W}$ 上的 m 个函数图像, 记这些函数为 $u_\epsilon^1 \leqslant u_\epsilon^2 \leqslant \cdots \leqslant u_\epsilon^m$. 由 (1) 可知, Ω_ϵ 的单位外法向量在这些函数图像的叶片上交替地改变定向. 接下来可根据 m 的奇偶性分别进行证明.

断言 3.1 若 $m \geqslant 3$ 为奇数, 则 Σ 是退化的, 因而得到矛盾.

证明 由于 m 为奇数, 位于最上层和最下层的图像有相同的定向, 因此将这两层图像所满足的 PMC 方程相减可得 $L(u_\epsilon^m - u_\epsilon^1) + o(u_\epsilon^m - u_\epsilon^1) = \epsilon(h(x, u_\epsilon^m) - h(x, u_\epsilon^1)) = o(u_\epsilon^m - u_\epsilon^1)$, 其中 L 为 Σ 二阶变分所对应的 Jacobi 算子. 经过重新单位化后, 高度差函数 $u_\epsilon^m - u_\epsilon^1$ 将存在子列收敛到一个定义在 $\Sigma \setminus \mathcal{W}$ 上的正的 Jacobi 场, 进而可根据标准的技巧将其延拓至整个 Σ 上. □

断言 3.2 若 m 为偶数, 则方程 $L\varphi = 2h|_{\Sigma_0}$ 存在不变号的解.

证明 此时位于最上层和最下层的图像有相反的定向. 故

$$L(u_\epsilon^m - u_\epsilon^1) + o(u_\epsilon^m - u_\epsilon^1) = \pm\epsilon(h(x, u_\epsilon^1) + h(x, u_\epsilon^m)).$$

注意到 $u_\epsilon^m - u_\epsilon^1 > 0$, 再次使用重新单位化的过程后, 要么可以得到一个正的 Jacobi 场 (矛盾), 要么得到正函数 φ 满足 $L\varphi = 2h|_{\Sigma_0}$ 或 $L\varphi = -2h|_{\Sigma_0}$. □

如下的关键性引理表明, 通过恰当地选取 h 可使得断言 3.2 无法成立. 由此即可完成定理 3.7 的证明. □

引理 3.2 在一个满足 $\mathrm{Area} \leqslant C$ 且 $\mathrm{Ind} \leqslant k$ 的嵌入闭极小超曲面上, 对于恰当选取的函数 h, 方程 $L\varphi = 2h|_\Sigma$ 的解必定改变符号.

证明 由文献 [88] 中的紧性定理可知, 满足 Area $\leqslant C$ 和 Ind $\leqslant k$ 的嵌入闭极小超曲面只有有限个, 将其记为 $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_N\}$. 选取它们互不相交的邻域 $U_j^{\pm} \subset \Sigma_j$ 以及一个定义在 $\bigcup U_j^{\pm}$ 上的紧支光滑函数 f 使得, (1) $f|_{U_j^+}$ 非负且存在严格大于 0 的点; (2) $f|_{U_j^-}$ 非正且存在严格小于 0 的点. 之后将 Lf 延拓为 $h_0 \in C^\infty(M)$, 并选取典范的 h 充分接近 h_0 使其满足我们的要求. 则对每个 Σ_j, 方程 $L\varphi = 2h|_{\Sigma_j}$ 的任意解将接近 $2f$, 因而必定改变符号. $\square$

4 典范稠密性、等度分布性与割痕性质

在证明丘成桐猜想以及建立面积泛函 Morse 理论的过程中, 我们还在典范的光滑度量下观察到了一些关于闭极小超曲面空间分布性质的惊人结果. 这些结果表明, 闭极小超曲面在空间分布上有着类似 Laplace 特征函数对应的 L^2- 密度稠密的性质. 例如, 两者均表现出等度分布 (equidistribution) 和割痕 (scarring) 的现象. 我们参考文献 [92] 给出此类比的综述.

利用体积谱的 Weyl 定律 (定理 3.2), Irie 等 [44] 得到了一个关于闭极小超曲面在典范度量意义下稠密分布的惊人结果, 并由此在典范情形解决了丘成桐的猜想. (对于高维情形的推广可参见文献 [58].)

定理 4.1 [44] 令 M^{n+1} 为维数 $3 \leqslant n+1 \leqslant 7$ 的闭流形. 对于 C^∞- 典范 Riemann 度量, 所有光滑嵌入闭极小超曲面的并集在 M 中稠密.

这个结论随后被 Marques 等 [69] 量化为如下的关于闭极小超曲面等度分布的结果.

定理 4.2 [69] 令 M^{n+1} 为维数 $3 \leqslant n+1 \leqslant 7$ 的闭流形. 对于 C^∞- 典范 Riemann 度量, 存在 M 中的一列等度分布 (equidistributed) 的光滑嵌入闭极小超曲面 $\{\Sigma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, 即对于任意 $f \in C^\infty(M)$, 都有

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{\sum_{j=1}^q \operatorname{Area}(\Sigma_j)} \sum_{j=1}^q \int_{\Sigma_j} f d\Sigma_j = \frac{1}{\operatorname{Vol}(M,g)} \int_M f dM.$$

这些结果背后的关键想法在于, 通过在一点 $p \in M$ 附近的邻域 U 中扰动度量 (例如, 作共形变换) 使得其多凸, 之后可进一步结合 Weyl 定律得知极小极大理论必然会生成一个与 U 相交的闭极小超曲面.

Song [91] 在一般 (非典范) 度量下证明丘成桐猜想时, 引入了体积谱的一个局部化的版本 $\{\widetilde{\omega}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, 被称为圆柱形体积谱 (cylindrical volume spectrum). 圆柱形体积谱是一类具有 Lipschitz 度量的特殊非紧流形上的体积谱, 而这类非紧流形则是通过在具有稳定极小边界的紧流形上黏接无界圆柱所得到的. 与标准体积谱的次线性增长不同, Song [91] 证明了圆柱形体积谱 $\{\widetilde{\omega}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 关于 k 线性增长. 进一步地, 通过将文献 [69] 中的想法延伸到圆柱体积谱, Song 和 Zhou [92] 在典范度量下得到了闭极小超曲面的割痕性质. 具体而言, 在典范意义下, 任意稳定极小超曲面的附近都定量地围绕着若干个面积与 Morse 指标充分大的嵌入闭极小超曲面. 而这种现象就称为割痕 (scarring).

定理 4.3 (典范割痕 [92]) 令 M^{n+1} 为维数 $3 \leqslant n+1 \leqslant 7$ 的闭 Riemann 流形. 对于 C^∞- 典范 Riemann 度量, 有如下结论: 任给 M 中连通的、闭的、嵌入的、双面的和稳定的极小超曲面 S, 存在着一列嵌入的闭极小超曲面 $\{\Sigma_k\}$ 使得

(1) $\Sigma_k \cap S = \emptyset$;

(2) $\lim_{k\to\infty} \|\Sigma_k\| = \infty$;

(3) $\lim_{k\to\infty} \operatorname{Ind}(\Sigma_k)\|\Sigma_k\|^{-1} = \|S\|^{-1}$;

(4) $\boldsymbol{F}(\frac{[S]}{\|S\|}, \frac{[\Sigma_k]}{\|\Sigma_k\|}) \leqslant 1/\log(\|\Sigma_k\|)$.

其中, $[\Sigma]$ 为对应于 Σ 的泛簇, $\|\Sigma\|$ 为其面积, 而 $\boldsymbol{F}$ 为泛簇的距离函数.

当维数为 $n+1=3$ 时, 通过探索 3 维流形的拓扑与其中的稳定极小曲面, 文献 [92] 进一步证明了典范割痕性质在除去球商流形外的任意 3 维流形上都存在.

5 自由边界极小曲面及其应用

上述的所有结果均在带有光滑边界 ∂M 的紧流形 M 中有着对应的结论. 而对于带边紧流形 $(M,\partial M)$ 中的变分问题, 本节主要考虑满足边界 $\partial\Sigma$ (可能为空) 落在背景流形边界 ∂M 中的子流形 $\Sigma\subset M$, 即 $\partial\Sigma\subset\partial M$. 面积泛函在这类约束条件下的变分临界点是满足沿着边界 $\partial\Sigma$ 与背景流形边界 ∂M 垂直相交的极小子流形, 通常称为自由边界极小子流形 (minimal submanifolds with free boundary). 除了 Gergonne 在 1816 年以及 Schwarz 在 1890 年的早期工作之外, Courant 是第一位系统性地研究自由边界极小曲面的数学家 (参见文献 [16, 第 VI 章]). 有关这类问题的简要研究历史可参见文献 [56]. 近期, Fraser 和 Schoen [27] 揭示了极大 (extremal) Steklov 特征值问题与单位球体中自由边界极小曲面理论之间的深层联系, 而这一开创性的工作也使得有关自由边界极小曲面的研究竞相迸发. 我们建议读者参考文献 [55] 中的出色介绍以了解这类问题之间的联系及单位球体中自由边界极小曲面的各种构造示例.

本节在一般带边紧流形中重点关注余维一情形下的问题, 即自由边界极小超曲面 (free boundary minimal hypersurfaces, FBMHs). 而对于高余维的情形则可参见文献 [28, 59]. 随着闭流形中丘成桐猜想及面积泛函 Morse 理论得以解决和发展的同时, 这类问题在自由边界情形下也取得了同样丰硕的成果. 在极小极大理论的建立之初, Almgren [2] 就已经将背景流形 $(M,\partial M)$ 紧致带边的情形囊括在内. 他在系数 $G=\mathbb{Z}$ 或 $G=\mathbb{Z}_2$ 的情形下研究了相对闭链空间 $\mathcal{Z}_{\mathrm{rel}}(M,\partial M,G)$, 即 M 中满足边界紧支于 ∂M 的整流动型或 flat chains 所组成的空间. 因此有望利用极小极大理论在 3 至 7 维的紧流形上构造光滑嵌入的 FBMHs. 事实上, Jost 和 Grüter [46] 及 Jost [45] 在 20 世纪 80 年代的研究以及 De Lellis 和 Ramic [20] 近期的工作已经在 ∂M 凸性的额外假设下证实了这一结论. 而在不假设边界凸性的一般情形下, Li [54] 首先在 3 维情形尝试解决此问题, 随后 Li 和 Zhou [56] 在维数为 3 至 7 时完整地建立了 FBMHs 的存在性和正则性理论, 并由此在自由边界设定下解决了 Almgren 理论的第一步.

在边界非凸的一般情形下, 自由边界问题中存在着一个微妙的困难, 即 FBMH 的内部可能与 ∂M 相切, 这种现象通常称为切触 (touching phenomenon). 文献 [56] 则证明了即使极小极大泛簇在 ∂M 上有平凡的支集, 它也依然是光滑嵌入的, 即极小极大 FBMHs 可能与 ∂M 沿着任意的集合相切. 这项研究已经在 Guang 等 [33] 的努力下得到了进一步的发展, 并获得了 FBMHs 的 Morse 指标上界控制及典范情形下的稠密性结果. 最近, Wang [100] 基于 Song [91] 的证明思想解决了丘成桐猜想的自由边界版本, 从而证明了任意紧致带边流形 $(M,\partial M)$ 中存在无穷多个 FBMHs. 同时, 基于文献 [108] 中的方法, 重数一猜想在自由边界情形的推广也已经在文献 [94] 中得以证实. 作为一项必不可少的工具, 文献 [94] 还建立了 CMC/PMC 超曲面的自由边界极小极大理论.

此外, 对于在非紧空间或奇性空间中构造极小超曲面的问题, 带边背景流形中的变分理论也有着潜在的应用价值. 这里的想法是, 首先使用具有光滑边界的紧致区域穷竭这类空间, 之后再对其中构造的自由边界 FBMHs 取极限. 基于这样的想法, 文献 [94] 给出了其在 Gauss 空间中的一项应用, 并在该空间中构造了任意大 Gauss 面积的极小超曲面 (参见文献 [51]). 值得注意的是, 这些极小超曲面均为平均曲率流的自收缩解 (self-shrinking solutions) (参见文献 [15]). 在未来, 我们希望能看到这个想法的更多应用, 例如应用在具有奇点的紧空间中.

6　等变约束下的变分理论与应用

当背景流形有一定的对称性时, 一个自然的问题是, 能否在对称性的约束下实现上述的研究结论. 此时, 用紧 Lie 群 G 的等距作用表示背景流形 M 上的对称性, 并考虑 M 中的等变子流形, 即在群 G 作用下不变的子流形. 尽管只考虑了等变的变分而非任意变分, 但根据 Palais [76] 的对称临界原理 (principle of symmetric criticality) 或 Hsiang 和 Lawson [43] 的结果可知, 面积泛函在等变约束下的变分临界点是在群作用下不变的极小子流形, 即等变极小子流形 (equivariant minimal submanifolds). 在对称性的帮助下, 面积变分临界曲面的许多新例得以发现. 例如, 当轨道空间维数为 1 时, 可将闭流形 M 中的每个轨道都视为一个等变闭超曲面, 其中的面积最大元即为等变极小闭超曲面 (参见文献 [61]). 而当轨道空间维数为 2 时, 利用 Hsiang 的等变微分几何方法, 通过研究轨道空间中的测地线常微分方程, 可以实现许多闭极小曲面 [38,39,41–43]、CMC 曲面 [40] 和自由边界极小曲面 [29] 的构造.

接下来重点关注轨道空间维数大于等于 3 的情形. 随着文献 [2,6,76] 实现了闭极小超曲面的一般存在性理论, Pitts 和 Rubinstein [78,79] 首先结合 Simon 和 Smith (参见文献 [90]) 的极小极大构造方法给出了 S^3 在一些特定有限群等距作用下的等变极小曲面, 并进一步断言这种等变极小极大理论 (equivariant min-max theory) 的构造方法具有普适性, 即可以在任意具有有限群等距作用的 3 维闭流形上构造出满足亏格控制和指标估计的等变闭极小曲面. 遗憾的是, Pitts 和 Rubinstein [78,79] 并未在原文中给出具体的构造过程, 直至最近, 这个断言才被 Ketover [49] 证实. 受到 Ketover 工作的启发, Liu [61] 随后基于 De Lellis 和 Tansnady [21] 的光滑设定极小极大理论, 在一般维数的闭流形上结合紧 Lie 群的等距作用研究了等变极小超曲面的一般存在性, 在轨道空间维数大于等于 3 的条件下得到了奇点集至少余 7 维的等变闭极小超曲面. 而在 Almgren-Pitts 的设定下, Wang [96] 首先结合 Almgren [2] 的方法推广了同构定理 3.1, 得到了 $\pi_1(\mathcal{Z}_n^G(M,\mathbb{Z}_2))\cong H_{n+1}(M^{n+1};\mathbb{Z}_2)$, 其中 $\mathcal{Z}_n^G(M,\mathbb{Z}_2)$ 为 G- 等变的模 -2 的 n- 闭链空间 (或等变 Caccioppoli 集的边界空间). 在随后研究等变 Almgren-Pitts 理论的过程中, 一个潜在的技术困难是轨道的法向指数映照一般没有一致的单射半径正下界. 为了处理这个困难, Wang [96] 使用了一个技术性的假设条件, 随后又受到 Li 和 Zhou [56] 处理边界问题的启发, 在文献 [97] 中引入了轨道类型分层的技巧, 去掉了原本的技术性限制, 并最终得到了如下的等变闭极小超曲面一般存在性理论.

定理 6.1 (群 G 有限 [49]、光滑极小极大设定 [61] 和 Almgren-Pitts 设定 [96])　设 M^{n+1} 为闭 Riemann 流形, G 为等距作用于 M 上的紧 Lie 群且使得 $\operatorname{codim}(G\cdot p)\geqslant 3$ 对于任意 $p\in M$ 成立, 则存在一个非平凡的、奇点集至少余 7 维的等变闭极小超曲面 $\Sigma\subset M$, 即 $G\cdot\Sigma=\Sigma$.

同时, Wang [96] 还将等变极小极大理论推广到了高维参数空间中, 用类似于定义 3.1 的方式定义了等变体积谱 (equivariant volume spectrum), 也称作 (G,k)- 宽度 ((G,k)-width), 记作 $\{\omega_k^G(M)\}$, 并结合 Guth [35] 的 "bend-and-cancel" 技巧得到了等变体积谱的非线性增长速率 $k^{\frac{1}{\dim(M/G)}}$. 更进一步地, 推广了 Marques 和 Neves [67] 的结论, 在正 Ricci 曲率的条件下实现了等变情形的丘成桐猜想:

定理 6.2 [96]　设 M^{n+1} 为正 Ricci 曲率的闭 Riemann 流形, G 为等距作用于 M 上的紧 Lie 群且使得 $3\leqslant\operatorname{codim}(G\cdot p)\leqslant 7$ 对于任意 $p\in M$ 成立, 则 M 中存在无穷多个光滑嵌入的等变闭极小超曲面.

此外, 等变极小极大理论还有许多后续的应用. 例如, 基于 Marques 和 Neves [66] 的技巧, Wang [98] 实现了定理 3.3 的等变版本 (参见文献 [98, 推论 1.5]), 使得在 $3\leqslant\operatorname{codim}(G\cdot p)\leqslant 7$ 的条件下, 流形 M 的第 k 等变体积谱 $\omega_k^G(M)$ 可以由若干个满足 $\sum_{i=1}^{l_k}\operatorname{Ind}_G(\Sigma_i^k)\leqslant k$ 的带有整数重数 $\{m_i^k: i=1,\dots,l_k\}\subset\mathbb{N}$ 的等变极小超曲面 $\{\Sigma_i^k: i=1,\dots,l_k\}$ 的面积 $\sum_{i=1}^{l_k} m_i^k\cdot\operatorname{Area}(\Sigma_i^k)$ 实现, 其中 $\operatorname{Ind}_G(\Sigma)$

表示 Σ 的等变 Morse 指标, 即 Σ 面积二阶变分中等变负特征空间的维数. 后续, 我们希望能延续这一思路, 解决等变极小极大理论中的重数一问题, 实现等变约束下的面积泛函 Morse 理论, 乃至面积泛函的等变 Morse-Bott 理论.

对于等变的 CMC 超曲面, Wang 和 Wu [99] 首先在与文献 [96] 相同的技术性条件下, 完成了定理 2.1 在等变情形下的推广:

定理 6.3 [99] 设 M^{n+1} 为维数 $3 \leqslant n+1 \leqslant 7$ 的闭 Riemann 流形, G 为等距作用于 M 上的紧 Lie 群且使得 $\operatorname{codim}(G \cdot p) \geqslant 3$ 对于任意 $p \in M$ 成立. 若 M 中非主轨道的并集 $M \setminus M^{\text{prin}}$ 为不超过 $n-2$ 维的嵌入闭子流形, 则对于任意的常数 $c \in \mathbb{R}$, 存在非平凡的、以 c 为常值平均曲率的、光滑的、几乎嵌入的等变闭超曲面.

注 6.1 这里 M^{prin} 为 M 中主轨道 (principal orbits) 的并集, 是 M 中的开稠集, 其中的点具有 (在包含意义下) 最小的迷向子群共轭类. 事实上, 根据 Wang [97] 的改进, 上述结论中关于 $M \setminus M^{\text{prin}}$ 的技术性假设是不必要的.

而对于自由边界的等变极小超曲面, Ketover [48] 首先在 Simon 和 Smith (参见文献 [90]) 的设定下, 实现了 3 维 Euclid 单位球中二面体群作用下的等变自由边界极小极大理论, 并进一步研究了这些等变 FBMHs 的亏格性质. 随后, Franz [26] 延续了 Ketover 的工作, 在一般的、带有严格凸 (strictly convex) 边界的紧流形中, 考虑了有限群保定向等距作用下的自由边界极小极大理论, 并实现了这类等变 FBMHs 的等变 Morse 上界. 这里有关流形边界严格凸的假设是为了防止出现上一节中所介绍的切触现象, 以便于处理 Morse 指标. 受到 Li 和 Zhou [56] 的启发, Wang [97] 考虑了更一般维数的紧流形 ($3 \leqslant n+1 \leqslant 7$) 和更一般的紧 Lie 群等距作用 ($\operatorname{codim}(G \cdot p) \geqslant 3$), 在 Almgren-Pitts 的设定下完成了等变 FBMHs 的存在性和正则性理论, 并基于文献 [67] 中的方法在非负 Ricci 曲率和边界严格凸的条件下得到了无穷多的等变 FBMHs.

考虑到等变的极小极大理论也可以看作轨道空间这类特殊奇性空间中的极小极大理论, 我们希望能在未来看到更多有关奇性空间中极小曲面的研究.

致谢 作者在此感谢张伟平院士的撰稿邀请. 同时, 作者还希望在此表达对田刚院士的特别感谢, 也感谢王志超博士和吴志昂博士对本文的帮助.

参考文献

1 Aleksandrov A D. Uniqueness theorems for surfaces in the large. I. Amer Math Soc Transl (2), 1962, 21: 341–354

2 Almgren F J Jr. The homotopy groups of the integral cycle groups. Topology, 1962, 1: 257–299

3 Almgren F J Jr. The Theory of Varifolds. Mimeographed Notes. Princeton, 1965

4 Almgren F J Jr. Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem. Ann of Math (2), 1966, 84: 277–292

5 Almgren F J Jr. Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints. Mem Amer Math Soc, 1976, 4: 199

6 Bellettini C, Wickramasekera N. The inhomogeneous Allen-Cahn equation and the existence of prescribed-mean-curvature hypersurfaces. arXiv:2010.05847, 2020

7 Birkhoff G D. Dynamical systems with two degrees of freedom. Trans Amer Math Soc, 1917, 18: 199–300

8 Breiner C, Kapouleas N. Complete constant mean curvature hypersurfaces in Euclidean space of dimension four or higher. Amer J Math, 2021, 143: 1161–1259

9 Brezis H, Coron J M. Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture. Comm Pure Appl Math, 1984, 37: 149–187

10 Cheng D R, Zhou X. Existence of constant mean curvature 2-spheres in Riemannian 3-spheres. Comm Pure Appl Math, 2023, 76: 3374–3436

11 Chodosh O, Mantoulidis C. Minimal surfaces and the Allen-Cahn equation on 3-manifolds: Index, multiplicity, and

curvature estimates. Ann of Math (2), 2020, 191: 213–328
12 Codá Marques F. Minimal surfaces: Variational theory and applications. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul, vol. 1. Seoul: Kyung Moon Sa, 2014, 283–310
13 Colding T, De Lellis C. The min-max construction of minimal surfaces. Surv Differ Geom, 2003, 8: 75–107
14 Colding T H, Minicozzi II W P. Width and finite extinction time of Ricci flow. Geom Topol, 2008, 12: 2537–2586
15 Colding T H, Minicozzi II W P. Generic mean curvature flow I: Generic singularities. Ann of Math (2), 2012, 175: 755–833
16 Courant R. Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces. New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1977
17 De Giorgi E. Frontiere Orientate di Misura Minima. Seminario di Matematica Della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1960-61. Pisa: Editrice Tecnico Scientifica, 1961
18 De Lellis C. The size of the singular set of area-minimizing currents. In: Surveys in Differential Geometry, vol. 21. Advances in Geometry and Mathematical Physics. Somerville: International Press, 2016, 1–83
19 De Lellis C, Pellandini F. Genus bounds for minimal surfaces arising from min-max constructions. J Reine Angew Math, 2010, 644: 47–99
20 De Lellis C, Ramic J. Min-max theory for minimal hypersurfaces with boundary. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2018, 68: 1909–1986
21 De Lellis C, Tasnady D. The existence of embedded minimal hypersurfaces. J Differential Geom, 2013, 95: 355–388
22 Douglas J. Solution of the problem of Plateau. Trans Amer Math Soc, 1931, 33: 263–321
23 Federer H. The singular sets of area minimizing rectifiable currents with codimension one and of area minimizing flat chains modulo two with arbitrary codimension. Bull Amer Math Soc (NS), 1970, 76: 767–771
24 Federer H, Fleming W H. Normal and integral currents. Ann of Math (2), 1960, 72: 458–520
25 Finn R. Equilibrium Capillary Surfaces. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 284. New York: Springer-Verlag, 1986
26 Franz G. Equivariant index bound for min-max free boundary minimal surfaces. Calc Var Partial Differential Equations, 2023, 62: 201
27 Fraser A, Schoen R. Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball. Invent Math, 2016, 203: 823–890
28 Fraser A M. On the free boundary variational problem for minimal disks. Comm Pure Appl Math, 2000, 53: 931–971
29 Freidin B, Gulian M, McGrath P. Free boundary minimal surfaces in the unit ball with low cohomogeneity. Proc Amer Math Soc, 2017, 145: 1671–1683
30 Gaspar P, Guaraco M A M. The Allen-Cahn equation on closed manifolds. Calc Var Partial Differential Equations, 2018, 57: 42
31 Gromov M. Dimension, nonlinear spectra and width. In: Geometric Aspects of Functional Analysis. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1317. Berlin: Springer, 1988, 132–184
32 Gromov M. Isoperimetry of waists and concentration of maps. Geom Funct Anal, 2003, 13: 178–215
33 Guang Q, Li M M, Wang Z, et al. Min-max theory for free boundary minimal hypersurfaces II: General Morse index bounds and applications. Math Ann, 2021, 379: 1395–1424
34 Guaraco M A M. Min-max for phase transitions and the existence of embedded minimal hypersurfaces. J Differential Geom, 2018, 108: 91–133
35 Guth L. Minimax problems related to cup powers and Steenrod squares. Geom Funct Anal, 2009, 18: 1917–1987
36 Heinz E. Über die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung bei vorgegebener Berandung. Math Ann, 1954, 127: 258–287
37 Hildebrandt S. On the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature. Comm Pure Appl Math, 1970, 23: 97–114
38 Hsiang W T, Hsiang W Y. Examples of codimension-one closed minimal submanifolds in some symmetric spaces. I. J Differential Geom, 1980, 15: 543–551
39 Hsiang W T, Hsiang W Y. On the existence of codimension-one minimal spheres in compact symmetric spaces of rank 2. II. J Differential Geom, 1982, 17: 583–594
40 Hsiang W Y. Generalized rotational hypersurfaces of constant mean curvature in the Euclidean spaces. I. J Differential Geom, 1982, 17: 337–356
41 Hsiang W Y. Minimal cones and the spherical Bernstein problem, I. Ann of Math (2), 1983, 118: 61–73
42 Hsiang W Y. On the construction of infinitely many congruence classes of imbedded closed minimal hypersurfaces in $S^n(1)$ for all $n \geqslant 3$. Duke Math J, 1987, 55: 361–367
43 Hsiang W Y, Lawson H B Jr. Minimal submanifolds of low cohomogeneity. J Differential Geom, 1971, 5: 1–38

44 Irie K, Marques F C, Neves A. Density of minimal hypersurfaces for generic metrics. Ann of Math (2), 2018, 187: 963–972
45 Jost J. Existence results for embedded minimal surfaces of controlled topological type. II. Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (4), 1986, 13: 401–426
46 Jost J, Grüter M. On embedded minimal disks in convex bodies. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 1986, 3: 345–390
47 Kapouleas N. Complete constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space. Ann of Math (2), 1990, 131: 239–330
48 Ketover D. Free boundary minimal surfaces of unbounded genus. arXiv:1612.08691, 2016
49 Ketover D. Equivariant min-max theory. arXiv:1612.08692, 2016
50 Ketover D. Genus bounds for min-max minimal surfaces. J Differential Geom, 2019, 112: 555–590
51 Ketover D, Zhou X. Entropy of closed surfaces and min-max theory. J Differential Geom, 2018, 110: 31–71
52 Lawson H B Jr. Complete minimal surfaces in S^3. Ann of Math (2), 1970, 92: 335–374
53 Lawson H B Jr. The equivariant Plateau problem and interior regularity. Trans Amer Math Soc, 1972, 173: 231–249
54 Li M M C. A general existence theorem for embedded minimal surfaces with free boundary. Comm Pure Appl Math, 2015, 68: 286–331
55 Li M M C. Free boundary minimal surfaces in the unit ball: Recent advances and open questions. In: Proceedings of the International Consortium of Chinese Mathematicians. Boston: International Press, 2017, 401–435
56 Li M M C, Zhou X. Min-max theory for free boundary minimal hypersurfaces, I: Regularity theory. J Differential Geom, 2021, 118: 487–553
57 Li Y. An improved Morse index bound of min-max minimal hypersurfaces. Calc Var Partial Differential Equations, 2023, 62: 179
58 Li Y. Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in higher-dimensional closed manifolds with generic metrics. J Differential Geom, 2023, 124: 381–395
59 Lin L, Sun A, Zhou X. Min-max minimal disks with free boundary in Riemannian manifolds. Geom Topol, 2020, 24: 471–532
60 Liokumovich Y, Marques F, Neves A. Weyl law for the volume spectrum. Ann of Math (2), 2018, 187: 933–961
61 Liu Z. The existence of embedded G-invariant minimal hypersurface. Calc Var Partial Differential Equations, 2021, 60: 36
62 Lyusternik L A, Snirel'man L G. Topological methods in variational problems and their application to the differential geometry of surfaces. Uspehi Matem Nauk (NS), 1947, 2: 166–217
63 Mahmoudi F, Mazzeo R, Pacard F. Constant mean curvature hypersurfaces condensing on a submanifold. Geom Funct Anal, 2006, 16: 924–958
64 Marques F C, Montezuma R, Neves A. Morse inequalities for the area functional. J Differential Geom, 2023, 124: 81–111
65 Marques F C, Neves A. The min-max theory and the Willmore conjecture. Ann of Math (2), 2014, 179: 683–782
66 Marques F C, Neves A. Morse index and multiplicity of min-max minimal hypersurfaces. Camb J Math, 2016, 4: 463–511
67 Marques F C, Neves A. Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in positive Ricci curvature. Invent Math, 2017, 209: 577–616
68 Marques F C, Neves A. Morse index of multiplicity one min-max minimal hypersurfaces. Adv Math, 2021, 378: 107527
69 Marques F C, Neves A, Song A. Equidistribution of minimal hypersurfaces for generic metrics. Invent Math, 2019, 216: 421–443
70 Meeks III W H, Mira P, Pérez J, et al. Constant mean curvature spheres in homogeneous three-spheres. J Differential Geom, 2022, 120: 307–343
71 Meeks III W H, Pérez J. The classical theory of minimal surfaces. Bull Amer Math Soc (NS), 2011, 48: 325–407
72 Meeks III W H, Pérez J, Tinaglia G. Constant mean curvature surfaces. Surv Differ Geom, 2016, 21: 179–287
73 Meeks III W H, Simon L, Yau S T. Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature. Ann of Math (2), 1982, 116: 621–659
74 Morgan F. Regularity of isoperimetric hypersurfaces in Riemannian manifolds. Trans Amer Math Soc, 2003, 355: 5041–5052
75 Neves A. New applications of min-max theory. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul, vol. 2. Seoul: Kyung Moon Sa, 2014, 939–957

76 Palais R S. The principle of symmetric criticality. Comm Math Phys, 1979, 69: 19–30
77 Pitts J T. Existence and Regularity of Minimal Surfaces on Riemannian Manifolds. Mathematical Notes, vol. 27. Princeton: Princeton University Press, 1981
78 Pitts J T, Rubinstein J H. Applications of minimax to minimal surfaces and the topology of 3-manifolds. Proc Centre Math Appl, 1987, 12: 137–170
79 Pitts J T, Rubinstein J H. Equivariant minimax and minimal surfaces in geometric three-manifolds. Bull Amer Math Soc (NS), 1988, 19: 303–309
80 Radó T. The problem of the least area and the problem of Plateau. Math Z, 1930, 32: 763–796
81 Rivière T. A viscosity method in the min-max theory of minimal surfaces. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 2017, 126: 177–246
82 Rosenberg H, Smith G. Degree theory of immersed hypersurfaces. Mem Amer Math Soc, 2020, 265: 62
83 Sacks J, Uhlenbeck K. The existence of minimal immersions of 2-spheres. Ann of Math (2), 1981, 113: 1–24
84 Scherk H F. Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen. J Reine Angew Math, 1835, 13: 185–208
85 Schoen R, Simon L. Regularity of stable minimal hypersurfaces. Comm Pure Appl Math, 1981, 34: 741–797
86 Schoen R, Simon L, Yau S T. Curvature estimates for minimal hypersurfaces. Acta Math, 1975, 134: 275–288
87 Schoen R, Yau S T. Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature. Ann of Math (2), 1979, 110: 127–142
88 Sharp B. Compactness of minimal hypersurfaces with bounded index. J Differential Geom, 2017, 106: 317–339
89 Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. Ann of Math (2), 1968, 88: 62–105
90 Smith F R. On the existence of embedded minimal 2-spheres in the 3-sphere, endowed with an arbitrary Riemannian metric. PhD Thesis. Canberra: Australian National University, 1982
91 Song A. Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in closed manifolds. Ann of Math (2), 2023, 197: 859–895
92 Song A, Zhou X. Generic scarring for minimal hypersurfaces along stable hypersurfaces. Geom Funct Anal, 2021, 31: 948–980
93 Struwe M. Nonuniqueness in the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature. Arch Ration Mech Anal, 1986, 93: 135–157
94 Sun A, Wang Z, Zhou X. Multiplicity one for min-max theory in compact manifolds with boundary and its applications. arXiv:2011.04136, 2020
95 Torralbo F. Rotationally invariant constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds. Differential Geom Appl, 2010, 28: 593–607
96 Wang T. Min-max theory for G-invariant minimal hypersurfaces. J Geom Anal, 2022, 32: 233
97 Wang T. Min-max theory for free boundary G-invariant minimal hypersurfaces. Adv Math, 2023, 425: 109087
98 Wang T. Equivariant Morse index of min-max G-invariant minimal hypersurfaces. Math Ann, 2023, in press
99 Wang T, Wu Z. The existence of G-invariant constant mean curvature hypersurfaces. Calc Var Partial Differential Equations, 2022, 61: 145
100 Wang Z. Existence of infinitely many free boundary minimal hypersurfaces. arXiv:2001.04674, 2020
101 Wang Z, Zhou X. Min-max theory can produce minimal hypersurfaces with higher multiplicity. arXiv:2201.06154, 2022
102 White B. The space of minimal submanifolds for varying Riemannian metrics. Indiana Univ Math J, 1991, 40: 161–200
103 White B. On the bumpy metrics theorem for minimal submanifolds. Amer J Math, 2017, 139: 1149–1155
104 Yau S T. Problem section. In: Seminar on Differential Geometry, vol. 102. Princeton: Princeton University Press, 1982, 669–706
105 Ye R. Foliation by constant mean curvature spheres. Pacific J Math, 1991, 147: 381–396
106 Zhou X. On the existence of min-max minimal torus. J Geom Anal, 2010, 20: 1026–1055
107 Zhou X. On the existence of min-max minimal surface of genus $g \geqslant 2$. Commun Contemp Math, 2017, 19: 1750041
108 Zhou X. On the multiplicity one conjecture in min-max theory. Ann of Math (2), 2020, 192: 767–820
109 Zhou X, Zhu J J. Min-max theory for constant mean curvature hypersurfaces. Invent Math, 2019, 218: 441–490
110 Zhou X, Zhu J J. Existence of hypersurfaces with prescribed mean curvature I—Generic min-max. Camb J Math, 2020, 8: 311–362

Recent progress on geometric variational theory

Tongrui Wang & Xin Zhou

Abstract In this paper, we survey recent progress on the variational theory related to the area functional and the mean curvature. We mainly discuss the Morse theory of minimal hypersurfaces. In particular, we focus on the variational theory for constant mean curvature (CMC) surfaces, the multiplicity one conjecture, generic spatial distributions of minimal hypersurfaces, the variational theory for minimal surfaces with free boundary, and generalizations in the equivariant settings.

Keywords geometric variational theory, minimal (hyper)surface, CMC (hyper)surface

MSC(2020) 53-02, 53A10, 53C42

doi: 10.1360/SSM-2023-0077