度量测度空间上多线性分数次积分算子的有界性

孟岩

中国人民大学数学学院, 北京 100872

E-mail: mengyan@ruc.edu.cn

收稿日期: 2019-01-09; 接受日期: 2019-03-03; 网络出版日期: 2019-06-12

国家自然科学基金 (批准号: 11571039) 资助项目

摘要 设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 为一个度量测度空间, 满足对于任意的 $x \in \mathcal{X}$, $\mu(B(x, r))$ 关于 r 在 $(0, \infty)$ 上连续, 或者设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是 Hytönen 意义下满足上双倍条件和几何双倍条件的度量测度空间. 在此两种背景条件下, 本文建立多线性分数次积分算子 $I_{m, \alpha}$ 在乘积 Lebesgue 空间上的端点估计、在乘积 Morrey 空间上的有界性以及弱型端点估计.

关键词 度量测度空间 多线性分数次积分算子 Lebesgue 空间 Morrey 空间

MSC (2010) 主题分类 42B20, 42B35

1 引言

在 Calderón-Zygmund 理论的发展中, 底空间上的测度满足双倍条件始终是一个重要的假设条件. 所谓双倍条件是指, 存在正常数 C_μ 使得对任意的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $r \in (0, \infty)$, 有

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C_\mu \mu(B(x, r)), \quad (1.1)$$

其中 $B(x, r) := \{y \in \mathcal{X} : d(x, y) < r\}$. 然而, 随着近三十年来 Calderón-Zygmund 理论不断发展, 人们发现很多 Calderón-Zygmund 理论的经典结果在底空间上的测度不满足双倍条件 (1.1) 的情形下仍然成立. 此时, 或者底空间为 Euclid 空间且其上的测度满足多项式增长条件 (参见文献 [1]), 或者为更一般的度量测度空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 满足几何双倍条件且测度满足上双倍条件 (参见文献 [2]). 在这两种背景下, 关于 Calderón-Zygmund 理论的研究成果参见文献 [3–6] 和专著 [7] 等.

设 $m \in \mathbb{N}$ 且 $\alpha \in (0, m)$. 核函数 K_α 满足存在正常数 C 使得对于任意的 $x, y_1, \dots, y_m \in \mathcal{X}$, 有

$$|K_\alpha(x, y_1, \dots, y_m)| \leq \frac{C}{[\sum_{i=1}^m \mu(B(x, 12d(x, y_i)))]^{m-\alpha}}. \quad (1.2)$$

定义 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 上的多线性分数次积分算子 $I_{m, \alpha}$: 对于任意的 $f_i \in L_b^\infty(\mu)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $x \in \mathcal{X}$, 有

$$I_{m, \alpha}(f_1, \dots, f_m)(x) := \int_{\mathcal{X}^m} K_\alpha(x, y_1, \dots, y_m) f_1(y_1) \cdots f_m(y_m) d\mu(y_1) \cdots d\mu(y_m), \quad (1.3)$$

英文引用格式: Meng Y. Boundedness of multilinear fractional integrals on metric measure spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 503–512, doi: 10.1360/N012019-00016

其中 $L_b^\infty(\mu)$ 表示由所有具有有界支集的 $L^\infty(\mu)$ 函数全体组成的集合. 当 $m = 1$ 时, 简记 $I_{m,\alpha}$ 为 I_α . 显然, 当 $(\mathcal{X}, d, \mu) = (\mathbb{R}^n, |\cdot|, dx)$, $m = 1$ 且 $K_\alpha(x, y) = \frac{1}{|x-y|^{n(1-\alpha)}}$ 时, 算子 $I_{m,\alpha}$ 即为经典 Euclid 空间上的分数次积分算子 I_β , 其中 $\beta = n\alpha$. 分数次积分算子是调和分析领域中的一类重要算子, 尤其在函数可微性和光滑性的研究中有显著的作用, 因此得到了人们的广泛关注和研究. 后来, Kenig 和 Stein^[8] 引入了经典 Euclid 空间上的多线性分数次积分算子并获得了该算子在乘积 Lebesgue 空间上的有界性 (也可参见文献 [9]). 最近, Zhao 等^[10] 讨论并建立了一般度量测度空间上的多线性分数次积分算子在乘积 Lebesgue 空间上的有界性. 本文得到一般度量测度空间上的多线性分数次积分算子的弱型端点估计. 本文始终假设对于任意的 $x \in \mathcal{X}$ 和任意的 $r > 0$, 有 $0 < \mu(B(x, r)) < \infty$.

定理 1.1 设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 满足对于任意的 $x \in \mathcal{X}$, $\mu(B(x, r))$ 关于 r 在 $(0, \infty)$ 上连续. 设 $0 < \alpha < m$, K_α 满足 (1.2), 多线性分数次积分算子 $I_{m,\alpha}$ 如 (1.3) 所定义且 $1/q = m - \alpha$, 那么存在正常数 C 使得对于任意的 $\lambda > 0$, 有

$$\mu(\{x \in \mathcal{X} : |I_{m,\alpha}(f_1, \dots, f_m)(x)| > \lambda\}) \leq C \left[\frac{\prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^1(\mu)}}{\lambda} \right]^{1/q}.$$

容易验证, 经典 Euclid 空间上的 Lebesgue 测度、齐型空间上满足体积正则性条件的测度和 Euclid 空间上的 Gaussian 测度等均满足 $\mu(B(x, r))$ 关于 r 在 $(0, \infty)$ 上连续. 然而, 并非所有的 Radon 测度都满足该条件. Hytönen^[2] 引入了一类特殊的度量测度空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 使得 $(\mathcal{X}, d)$ 满足几何双倍条件 (即满足存在正整数 N_0 使得对于所有的球 $B(x, r) \subset \mathcal{X}$, 存在 $B(x, r)$ 的一个有限球覆盖 $\{B(x_i, r/2)\}_i$, 使得覆盖球的基数至多为 N_0) 且其上的测度 μ 满足上双倍条件, 即存在一个控制函数 $\lambda : \mathcal{X} \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 和一个正常数 C_λ , 依赖于 λ , 使得对于每一个 $x \in \mathcal{X}$, $r \rightarrow \lambda(x, r)$ 不降且对于所有的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $r \in (0, \infty)$, 有

$$\mu(B(x, r)) \leq \lambda(x, r) \leq C_\lambda \lambda\left(x, \frac{r}{2}\right). \quad (1.4)$$

此类度量测度空间被称为非齐型度量测度空间. 显然, 此时的测度 μ 并不一定满足对于任意的 $x \in \mathcal{X}$, $\mu(B(x, r))$ 关于 r 在 $(0, \infty)$ 上连续. 在非齐型度量测度空间背景下, Fu 等^[11] 引进了分数次积分算子 $\tilde{I}_\alpha$: 对于任意的 $f \in L_b^\infty(\mu)$ 和任意的 $x \in \mathcal{X}$, 有

$$\tilde{I}_\alpha(f)(x) := \int_{\mathcal{X}} \frac{f(y)}{[\lambda(x, d(x, y))]^{1-\alpha}} d\mu(y),$$

并证明了如果 $\epsilon \in (0, \min\{\alpha, 1 - \alpha\})$ 且控制函数 λ 满足所谓 ϵ -弱逆双倍条件: 对于任意的 $r \in (0, 2\text{diam}(\mathcal{X}))$, $a \in (1, 2\text{diam}(\mathcal{X})/r)$, 存在实数 $C(a) \in [1, \infty)$ 使得对于任意的 $x \in \mathcal{X}$, 有 $\lambda(x, ar) \geq C(a)\lambda(x, r)$ 且 $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{[C(a^k)]^\epsilon} < \infty$, 那么 $\tilde{I}_\alpha$ 映 $L^p(\mu)$ 到 $L^q(\mu)$ 有界, 其中 $1 < p < 1/\alpha$ 且 $1/q = 1/p - \alpha$ 以及映 $L^1(\mu)$ 到 $L^{1/(1-\alpha), \infty}(\mu)$ 有界. 由 (1.4), 容易验证算子 $\tilde{I}_\alpha$ 的核函数 $\frac{1}{[\lambda(x, d(x, y))]^{1-\alpha}}$ 满足 $m = 1$ 时的核条件 (1.2). 我们将 Fu 等^[11] 的结果推广到多线性的情形, 并改进他们的结果, 即此时 ϵ -弱逆双倍条件可以移去, 具体结论如下:

定理 1.2 设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 为非齐型度量测度空间, $0 < \alpha < m$, K_α 满足 (1.2), 多线性分数次积分算子 $I_{m,\alpha}$ 如 (1.3) 所定义且 $1/q = m - \alpha$, 那么存在正常数 C 使得对于任意的 $\lambda > 0$, 有

$$\mu(\{x \in \mathcal{X} : |I_{m,\alpha}(f_1, \dots, f_m)(x)| > \lambda\}) \leq C \left[\frac{\prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^1(\mu)}}{\lambda} \right]^{1/q}.$$

本文将讨论如 (1.3) 定义的多线性分数次积分算子在乘积 Morrey 空间上的有界性. 为此, 首先介绍一般度量测度空间上 Morrey 空间和弱 Morrey 空间的定义.

定义 1.1 ^[12] 设 $1 < \kappa < \infty$ 且 $0 < q \leq p < \infty$. Morrey 空间 $M_q^p(\kappa, \mu)$ 定义为

$$M_q^p(\kappa, \mu) := \{f \in L_{\text{loc}}^q(\mu) : \|f\|_{M_q^p(\kappa, \mu)} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{M_q^p(\kappa, \mu)} := \sup \left\{ [\mu(\kappa B)]^{1/p-1/q} \left[\int_B |f(y)|^q d\mu(y) \right]^{1/q} : B \subset \mathcal{X} \text{ 为球} \right\}.$$

在非齐型度量测度空间上 Morrey 空间 $M_q^p(\kappa, \mu)$ 并不依赖于参数 $1 < \kappa < \infty$ 的选取, 参见文献 [13, 14]. 然而, 在一般度量测度空间 (X, d, μ) 上 Morrey 空间 $M_q^p(\kappa, \mu)$ 是否依赖于 $1 < \kappa < \infty$ 的选取仍然未知. 下面引入一般度量测度空间上的弱 Morrey 空间.

定义 1.2 设 $1 < \kappa < \infty$ 且 $0 < q \leq p < \infty$. 弱 Morrey 空间 $WM_q^p(\kappa, \mu)$ 定义为

$$WM_q^p(\kappa, \mu) := \{f \in L_{\text{loc}}^q(\mu) : \|f\|_{WM_q^p(\kappa, \mu)} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{WM_q^p(\kappa, \mu)} := \sup \left\{ [\mu(\kappa B)]^{1/p-1/q} \sup_{\lambda > 0} [\lambda^q \mu(\{x \in B : |f(x)| > \lambda\})]^{1/q} : B \subset \mathcal{X} \text{ 为球} \right\}.$$

由定义 1.1 和 1.2 可知, 对于任意的 $0 < q \leq p < \infty$ 和 $1 < \kappa < \infty$, 有 $M_q^p(\kappa, \mu) \subset WM_q^p(\kappa, \mu)$. 此外, Sawano 和 Tanaka ^[13] 证明了在底空间 $\mathcal{X}$ 为 Euclid 空间且其上的测度满足多项式增长条件的情形下弱 Morrey 空间 $WM_q^p(\kappa, \mu)$ 并不依赖于参数 $1 < \kappa < \infty$ 的选取. 而在一般度量测度空间 (X, d, μ) 上弱 Morrey 空间 $WM_q^p(\kappa, \mu)$ 是否依赖于 $1 < \kappa < \infty$ 的选取仍不清楚. 我们关于多线性分数次积分算子在乘积 Morrey 空间上的有界性结果如下:

定理 1.3 设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 为非齐型度量测度空间或者满足对于任意 $x \in \mathcal{X}$, $\mu(B(x, r))$ 关于 r 在 $(0, \infty)$ 上连续. 又设 $0 < \alpha < m$, K_α 满足 (1.2), 多线性分数次积分算子 $I_{m, \alpha}$ 如 (1.3) 所定义. 设 $1 \leq q_i \leq p_i < \infty$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $1/p = \sum_{i=1}^m 1/p_i$, $1/q = \sum_{i=1}^m 1/q_i$, $1/t = 1/q - \alpha$ 且 $p < 1/\alpha$.

(i) 若 $q_i > 1$, $i \in \{1, \dots, m\}$, 则存在正的常数 C 使得对于任意的 $f_i \in L_b^\infty(\mu)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, 有

$$\|I_{m, \alpha}(f_1, \dots, f_m)\|_{M_t^{p/(1-p\alpha)}(6, \mu)} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(2, \mu)};$$

(ii) 若 $k \in [1, m) \cap \mathbb{N}$, $\alpha \in [k, m)$, $q_1 = \dots = q_k = 1$, $q_{k+1}, \dots, q_m \in (1, \infty)$, 则存在正的常数 C 使得对于任意的 $f_i \in L_b^\infty(\mu)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, 有

$$\|I_{m, \alpha}(f_1, \dots, f_m)\|_{M_t^{p/(1-p\alpha)}(6, \mu)} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(2, \mu)};$$

(iii) 若 $q_i = 1$, $i \in \{1, \dots, m\}$, 则存在正的常数 C 使得对于任意的 $f_i \in L_b^\infty(\mu)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, 有

$$\|I_{m, \alpha}(f_1, \dots, f_m)\|_{WM_t^{p/(1-p\alpha)}(6, \mu)} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M_1^{p_i}(2, \mu)}.$$

注 1.1 (i) Tang ^[15] 获得了在经典 Euclid 空间上多线性分数次积分算子在乘积 Morrey 空间上的有界性以及当某些或全部 q_i 等于 1 时映乘积 Morrey 到弱 Morrey 空间上的有界性. Lin 和 Yang ^[16] 将 Tang 的结果推广到了测度满足多项式增长的 Euclid 空间 $\mathbb{R}^d$ 上. 定理 1.2(i) 和 1.2(iii) 可视为文

献 [15, 16] 结果的进一步推广. 但需要指出的是, 我们证明了当只有某些 $q_i = 1$, 而并非所有 $q_i = 1$ 时, 多线性分数次积分算子映乘积 Morrey 空间 $M_{q_1}^{p_1}(2, \mu) \times \cdots \times M_{q_m}^{p_m}(2, \mu)$ 到 Morrey 空间 $M_t^{p/(1-p\alpha)}(6, \mu)$ 有界. 注意到 $M_t^{p/(1-p\alpha)}(6, \mu) \subset WM_t^{p/(1-p\alpha)}(6, \mu)$, 因此, 即使在经典 Euclid 空间同样指标条件下, 定理 1.3(ii) 也是最新的, 部分改进了上述弱型端点估计.

(ii) Sihwaningrum 和 Sawano^[12] 建立了在底空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 满足对于任意的 $x \in \mathcal{X}$, $\mu(B(x, r))$ 关于 r 在 $(0, \infty)$ 上连续的背景下分数次积分算子在 Morrey 空间上的有界性以及弱型端点估计. 定理 1.3 将他们的结果推广到了多线性的情形.

第 2 节将证明定理 1.1 和 1.2, 第 3 节给出定理 1.3 的证明. 我们对文中的一些记号给出如下说明. 在以下行文中, 用 C 表示与主要参数无关的正常数, 但其具体数值可以在不同环境中不同, 而带有下标的正常数, 如 C_1 , 则表示固定的常数, 其取值不随具体环境不同而变化. 用符号 $f \lesssim g$ 表示存在正常数 C 使得 $f \leq Cg$. 对于任意的子集 $E \subset \mathcal{X}$, 用 χ_E 表示它的特征函数. 对于任意的 $0 < q < \infty$, 用 $L_{\text{loc}}^q(\mu)$ 表示所有的 q 次 μ -局部可积函数组成的函数空间.

2 定理 1.1 和 1.2 的证明

首先回顾度量测度空间上的中心极大函数以及其在 Lebesgue 空间上的有界性. 设 $\rho \in (1, \infty)$, 定义中心极大函数 M_ρ 如下: 对于任意的 $f \in L_{\text{loc}}^1(\mu)$ 和任意的 $x \in \mathcal{X}$, 有

$$M_\rho f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x, \rho r))} \int_{B(x, r)} |f(y)| d\mu(y). \quad (2.1)$$

引理 2.1 设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 为非齐型度量测度空间或满足对于任意 $x \in \mathcal{X}$, $\mu(B(x, r))$ 关于 r 在 $(0, \infty)$ 上连续. 又设 $\rho \in [5, \infty)$, 算子 M_ρ 如 (2.1) 所定义, 则 M_ρ 映 $L^1(\mu)$ 到 $L^{1,\infty}(\mu)$ 有界.

Nazarov 等^[17] 在测度满足多项式增长的 Euclid 空间上引入算子 M_3 并且证明了 M_3 的弱 $(1, 1)$ 有界性. 而后, Terasawa^[18] 证明了当 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 满足对于任意 $x \in \mathcal{X}$, $\mu(B(x, r))$ 关于 r 在 $(0, \infty)$ 上连续且 $\rho \geq 2$ 时引理 2.1 成立. 后来, Hytönen^[2] 在 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 为非齐型度量测度空间的背景下证明了当 $\rho \geq 5$ 时引理 2.1 成立.

为了证明定理 1.1, 首先建立当 $m = 1$ 时, 分数次积分算子 I_α 的 Hedberg 型不等式. 证明思想部分来源于文献 [12, 定理 2.3] 的证明.

引理 2.2 设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 为非齐型度量测度空间或者满足对于任意 $x \in \mathcal{X}$, $\mu(B(x, r))$ 关于 r 在 $(0, \infty)$ 上连续. 又设 $0 < \alpha < 1$, K_α 满足 (1.2), 分数次积分算子 I_α 如 (1.3) 所定义, 其中 $m = 1$, 则存在正常数 C 使得对于任意的 $f \in L_b^\infty(\mu)$ 和任意的 $x \in \mathcal{X}$, 有

$$|I_\alpha(f)(x)| \leq C \|f\|_{L^1(\mu)}^\alpha [M_5(f)(x)]^{1-\alpha}. \quad (2.2)$$

证明 固定 $x \in \mathcal{X}$. 设 $s > 0$ 为一待定常数并选取 $\rho \in (5, 12)$. 对于任意的 $k \in \mathbb{Z}$, 记

$$R_k := \inf(\{R > 0 : \mu(B(x, \rho R)) > 2^k s\} \cup \{\infty\}).$$

利用 (1.2), 易知

$$|I_\alpha(f)(x)| \lesssim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{B(x, R_k) \setminus B(x, R_{k-1})} \frac{|f(y)|}{[\mu(B(x, 12d(x, y)))]^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\lesssim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\mu(B(x, 12R_{k-1}))]^{1-\alpha}} \int_{B(x, R_k) \setminus B(x, R_{k-1})} |f(y)| d\mu(y). \quad (2.3)$$

注意到对于任意的 $k \in \mathbb{Z}$, 有

$$\mu(B(x, 12R_{k-1})) > 2^{k-1}s$$

且

$$\mu(B(x, 5R_k)) \leq 2^k s.$$

由此以及 (2.3) 可知,

$$\begin{aligned} |I_\alpha(f)(x)| &\lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2^k s)^{1-\alpha}} \int_{B(x, R_k) \setminus B(x, R_{k-1})} |f(y)| d\mu(y) \\ &\lesssim \sum_{k=-\infty}^0 (2^k s)^\alpha \frac{1}{\mu(B(x, 5R_k))} \int_{B(x, R_k)} |f(y)| d\mu(y) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k s)^{1-\alpha}} \int_{B(x, R_k) \setminus B(x, R_{k-1})} |f(y)| d\mu(y) \\ &\lesssim s^\alpha M_5(f)(x) + s^{\alpha-1} \|f\|_{L^1(\mu)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

选取

$$s = \frac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{M_5(f)(x)},$$

则由 (2.4) 可知, 对于任意的 $x \in \mathcal{X}$, 有

$$|I_\alpha(f)(x)| \lesssim \|f\|_{L^1(\mu)}^\alpha [M_5(f)(x)]^{1-\alpha}.$$

这样, 我们完成了引理 2.2 的证明. $\square$

定理 1.1 的证明 由引理 2.2 和 2.1 易知, 当 $m = 1$ 时, 算子 I_α 映 $L^1(\mu)$ 到 $L^{q, \infty}(\mu)$ 有界.

当 $m \geq 2$ 时, 由齐次性可知, 不妨设对于任意的 $i \in \{1, \dots, m\}$, 有 $\|f_i\|_{L^1(\mu)} = 1$. 对于任意的 $i \in \{1, \dots, m\}$, 选取 $\alpha_i \in (0, 1)$ 使得 $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$. 对于任意的 $g \in L_b^\infty(\mu)$ 和 $x \in \mathcal{X}$, 记

$$\bar{I}_{\alpha_i}(f)(x) := \int_{\mathcal{X}} \frac{f(y)}{[\mu(B(x, 12d(x, y)))]^{1-\alpha_i}} d\mu(y),$$

那么容易验证对于任意的 $x \in \mathcal{X}$, 有

$$|I_{m, \alpha}(f_1, \dots, f_m)(x)| \lesssim \prod_{i=1}^m \bar{I}_{\alpha_i}(|f_i|)(x) \quad (2.5)$$

且引理 2.2 对算子 $\bar{I}_{\alpha_i}$ ($i \in \{1, \dots, m\}$) 仍然成立. 又取 q_i 满足 $1/q_i = 1 - \alpha_i$. 易知 $1/q = 1/q_1 + \dots + 1/q_m$. 于是, 由 (2.5)、引理 2.2 和 2.1 可得, 对于任意的 $\lambda > 0$, 有

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in \mathcal{X} : |I_{m, \alpha}(f_1, \dots, f_m)(x)| > \lambda\}) &\lesssim \mu\left(\left\{x \in \mathcal{X} : \prod_{i=1}^m \bar{I}_{\alpha_i}(|f_i|)(x) > \prod_{i=1}^m \lambda^{q/q_i}\right\}\right) \\ &\lesssim \sum_{i=1}^m \mu(\{x \in \mathcal{X} : \bar{I}_{\alpha_i}(|f_i|)(x) > \lambda^{q/q_i}\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lesssim \sum_{i=1}^m \left[\frac{\|f_i\|_{L^1(\mu)}}{\lambda^{q/q_i}} \right]^{q_i} \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda^q}. \end{aligned}$$

这样, 我们完成了定理 1.1 的证明. $\square$

定理 1.2 的证明与定理 1.1 的完全类似, 为了简洁, 我们省略定理 1.2 的证明.

3 定理 1.3 的证明

为建立多线性分数次积分算子在乘积 Morrey 空间上的有界性, 我们需要多线性分数次积分算子在乘积 Lebesgue 空间上的有界性, 参见文献 [10].

引理 3.1 设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 为非齐型度量测度空间或者满足对于任意 $x \in \mathcal{X}$, $\mu(B(x, r))$ 关于 r 在 $(0, \infty)$ 上连续. 又设 K_α 满足 (1.2), 多线性分数次积分算子 $I_{m, \alpha}$ 由 (1.3) 给出.

(i) 若 $p_1, \dots, p_m \in (1, \infty)$, $\alpha \in (0, m)$ 且 $1/q = \sum_{i=1}^m 1/p_i - \alpha > 0$, 则算子 $I_{m, \alpha}$ 映 $L^{p_1}(\mu) \times \dots \times L^{p_m}(\mu)$ 到 $L^q(\mu)$ 有界;

(ii) 若 $k \in [1, m) \cap \mathbb{N}$, $\alpha \in [k, m)$, $p_1 = \dots = p_k = 1$, $p_{k+1}, \dots, p_m \in (1, \infty)$, 且

$$\frac{1}{q} = k + \sum_{i=k+1}^m \frac{1}{p_i} - \alpha,$$

则存在正常数 C 使得对于任意的 $f_i \in L_b^\infty(\mu)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, 有

$$\|I_{m, \alpha}(f_1, \dots, f_m)\|_{L^q(\mu)} \leq C \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{L^1(\mu)} \prod_{i=k+1}^m \|f_i\|_{L^{p_i}(\mu)}.$$

定理 1.3 的证明 (i) 由 Morrey 空间的定义可知, 只需证明对于任意的 $f_i \in L_b^\infty(\mu)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, 以及任意的球 $B \subset \mathcal{X}$, 有

$$[\mu(6B)]^{1/p-\alpha-1/t} \left\{ \int_B |I_{m, \alpha}(f_1, \dots, f_m)(x)|^t d\mu(x) \right\}^{1/t} \lesssim \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(2, \mu)}. \quad (3.1)$$

对于任意的 $i \in \{1, \dots, m\}$, 记

$$f_{i,1}(x) := f_i(x)\chi_{3B}(x), \quad f_{i,2}(x) := f_i(x)\chi_{\mathcal{X} \setminus 3B}(x).$$

因此,

$$\begin{aligned} &[\mu(6B)]^{1/p-\alpha-1/t} \left[\int_B |I_{m, \alpha}(f_1, \dots, f_m)(x)|^t d\mu(x) \right]^{1/t} \\ &\lesssim [\mu(6B)]^{1/p-\alpha-1/t} \left[\int_B |I_{m, \alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{m,1})(x)|^t d\mu(x) \right]^{1/t} \\ &\quad + [\mu(6B)]^{1/p-\alpha-1/t} \left[\int_B |I_{m, \alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{m-1,1}, f_{m,2})(x)|^t d\mu(x) \right]^{1/t} \\ &\quad + \dots + [\mu(6B)]^{1/p-\alpha-1/t} \left[\int_B |I_{m, \alpha}(f_{1,2}, \dots, f_{m,2})(x)|^t d\mu(x) \right]^{1/t} \end{aligned}$$

$$=: \sum_{l=1}^{2^m} G_l.$$

注意到 $1/t = 1/q - \alpha$ 且 $1/q = 1/q_1 + \cdots + 1/q_m$. 故由引理 3.1(i) 可得

$$\begin{aligned} G_1 &\lesssim [\mu(6B)]^{1/p-\alpha-1/t} \prod_{i=1}^m \|f_{i,1}\|_{L^{q_i}(\mu)} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^m [\mu(6B)]^{1/p_i-1/q_i} \left[\int_{3B} |f_i(x)|^{q_i} d\mu(x) \right]^{1/q_i} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(2,\mu)}. \end{aligned}$$

下面估计 G_l , $l \in \{2, \dots, 2^m\}$. 记球 B 的半径为 r . 对于任意取定的 $x \in B$, 记 $B_x := B(x, 2r)$, 易知 $B \subset B_x \subset 3B$. 又对于任意的正整数 j , 记

$$S_j := \sup\{R > 0 : \mu(B(x, 5R)) < 2^j \mu(6B_x)\}, \quad (3.2)$$

并记 $A_j := B(x, S_j) \setminus B(x, S_{j-1})$ 和 $A_0 := B_x$. 那么,

$$\mu(A_j) \leq \mu(B(x, S_j)) \leq 2^j \mu(6B_x). \quad (3.3)$$

另一方面, 对于任意的 $y \in A_j$, 有 $d(x, y) \geq S_{j-1}$. 于是,

$$\mu(B(x, 12d(x, y))) \geq \mu(B(x, 6S_{j-1})) \geq 2^{j-1} \mu(6B_x).$$

对于任意的 $i \in \{1, \dots, m\}$, 选取 $\alpha_i \in (0, 1)$ 使得 $p_i < 1/\alpha_i$ 且 $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$. 于是, 由 (1.2)、(3.2)、(3.3) 和 Hölder 不等式可知, 对任意的 $\sigma \in \{1, \dots, m-1\}$ 和任意的 $x \in B$, 有

$$\begin{aligned} &|I_{m,\alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{\sigma,1}, f_{\sigma+1,2}, \dots, f_{m,2})(x)| \\ &\lesssim \prod_{i=1}^{\sigma} \int_{3B} |f_i(y_i)| d\mu(y_i) \int_{(\mathcal{X} \setminus B_x)^{m-\sigma}} \frac{\prod_{i=\sigma+1}^m |f_i(y_i)|}{[\sum_{i=\sigma+1}^m \mu(B(x, 12d(x, y_i)))]^{m-\alpha}} d\mu(y_1) \cdots d\mu(y_m) \\ &\lesssim \prod_{i=1}^{\sigma} \left[\int_{3B} |f_i(y_i)|^{q_i} d\mu(y_i) \right]^{1/q_i} [\mu(3B)]^{1-1/q_i} \\ &\quad \times \prod_{i=\sigma+1}^m \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_{A_j} |f_i(y_i)|^{q_i} d\mu(y_i) \right]^{1/q_i} \frac{[\mu(A_j)]^{1-1/q_i}}{[2^{j-1} \mu(6B_x)]^{\frac{\sigma - \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i}{m-\sigma} + (1-\alpha_i)}} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^{\sigma} \left[\int_{3B} |f_i(y_i)|^{q_i} d\mu(y_i) \right]^{1/q_i} [\mu(6B)]^{1/p_i-1/q_i+1-1/p_i} \\ &\quad \times \prod_{i=\sigma+1}^m \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_{B(x, S_j)} |f_i(y_i)|^{q_i} d\mu(y_i) \right]^{1/q_i} \frac{[\mu(B(x, 6S_j))]^{1-1/q_i}}{[2^{j-1} \mu(6B_x)]^{\frac{\sigma - \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i}{m-\sigma} + (1-\alpha_i)}} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^{\sigma} \|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(2,\mu)} [\mu(6B)]^{1-1/p_i} \prod_{i=\sigma+1}^m \|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(2,\mu)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[\mu(B(x, 6S_j))]^{1-1/p_i}}{[2^{j-1} \mu(6B_x)]^{\frac{\sigma - \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i}{m-\sigma} + (1-\alpha_i)}} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^{\sigma} \|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(2,\mu)} [\mu(6B)]^{1-1/p_i} \prod_{i=\sigma+1}^m \|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(2,\mu)} \frac{1}{[\mu(6B_x)]^{\frac{\sigma - \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i}{m-\sigma} + (1/p_i - \alpha_i)}} \end{aligned}$$

$$\lesssim \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(2,\mu)} [\mu(6B)]^{\alpha-1/p}, \quad (3.4)$$

其中用到了 $B \subset B_x$, 从而, $6B \subset 6B_x$, $\mu(6B) \leq \mu(6B_x)$. 由 (3.4) 易得, 对于任意的 $i \in \{2, \dots, 2^m\}$, 有

$$G_l \lesssim \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(2,\mu)}.$$

这样, 我们就证明了 (3.1), 从而完成了 (i) 的证明.

(ii) 我们仍然沿用 (i) 的证明中的记号. 为了证明 (3.1), 需要估计 G_l , 其中 $l \in \{1, \dots, 2^m\}$. 一方面, 由引理 3.1(ii) 可得

$$G_1 \lesssim \prod_{i=1}^m [\mu(6B)]^{1/p_i-1/q_i} \left[\int_{3B} |f_i(x)|^{q_i} d\mu(x) \right]^{1/q_i} \lesssim \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(2,\mu)}.$$

另一方面, 注意到点态估计 (3.4) 对于某些 $q_i = 1$ 时仍成立, 所以, 对于任意的 $i \in \{2, \dots, 2^m\}$, 有

$$G_l \lesssim \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(2,\mu)}.$$

因此, (3.1) 成立, 从而完成了 (ii) 的证明.

(iii) 我们还是采用 (i) 的证明中的记号. 由弱 Morrey 空间的定义可知, 只需证明对于任意的 $f_i \in L_b^\infty(\mu)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, 以及任意的球 $B \subset \mathcal{X}$, 有

$$[\mu(6B)]^{1/p-\alpha-1/t} \sup_{\lambda>0} \{\lambda^t \mu(\{x \in B : |I_{m,\alpha}(f_1, \dots, f_m)(x)| > \lambda\})\}^{1/t} \lesssim \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M_1^{p_i}(2,\mu)}. \quad (3.5)$$

记

$$\begin{aligned} & [\mu(6B)]^{1/p-\alpha-1/t} \sup_{\lambda>0} \{\lambda^t \mu(\{x \in B : |I_{m,\alpha}(f_1, \dots, f_m)(x)| > \lambda\})\}^{1/t} \\ & \lesssim [\mu(6B)]^{1/p-\alpha-1/t} \sup_{\lambda>0} \{\lambda^t \mu(\{x \in B : |I_{m,\alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{m,1})(x)| > \lambda\})\}^{1/t} \\ & \quad + [\mu(6B)]^{1/p-\alpha-1/t} \sup_{\lambda>0} \{\lambda^t \mu(\{x \in B : |I_{m,\alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{m-1,1}, f_{m,2})(x)| > \lambda\})\}^{1/t} \\ & \quad + \dots + [\mu(6B)]^{1/p-\alpha-1/t} \sup_{\lambda>0} \{\lambda^t \mu(\{x \in B : |I_{m,\alpha}(f_{1,2}, \dots, f_{m,2})(x)| > \lambda\})\}^{1/t} \\ & =: \sum_{i=1}^{2^m} H_i. \end{aligned}$$

由定理 1.1 可知,

$$H_1 \lesssim [\mu(6B)]^{1/p-\alpha-1/t} \prod_{i=1}^\infty \|f_{i,1}\|_{L^1(\mu)} \lesssim \prod_{i=1}^\infty [\mu(6B)]^{1/p_i-1} \int_{3B} |f_i(x)| d\mu(x) \lesssim \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M_1^{p_i}(2,\mu)}.$$

下面估计 H_2 . 注意到

$$H_2 \lesssim [\mu(6B)]^{1/p-\alpha-1/t} \sup_{\lambda>0} \left\{ \lambda^t \int_B \left[\frac{|I_{m,\alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{m-1,1}, f_{m,2})(x)|}{\lambda} \right]^t d\mu(x) \right\}^{1/t}$$

$$\lesssim [\mu(6B)]^{1/p-\alpha-1/t} \left\{ \int_B |I_{m,\alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{m-1,1}, f_{m,2})(x)|^t d\mu(x) \right\}^{1/t}. \quad (3.6)$$

与 (3.4) 的证明完全类似, 可知对任意的 $x \in B$, 有

$$|I_{m,\alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{m-1,1}, f_{m,2})(x)| \lesssim \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M_1^{p_i}(2,\mu)} [\mu(6B)]^{\alpha-1/p}.$$

由上式和 (3.6) 可得

$$H_2 \lesssim \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M_1^{p_i}(2,\mu)}.$$

与 H_2 的估计完全相同, 可以得到: 对于任意的 $l \in \{3, \dots, 2^m\}$, 有

$$H_l \lesssim \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M_1^{p_i}(2,\mu)}.$$

综合所有 H_l ($l \in \{1, \dots, 2^m\}$) 的估计即可得到 (3.5). 这样, 我们完成了 (iii) 的证明. $\square$

致谢 对审稿人为本文提供的宝贵意见表示由衷的感谢!

参考文献

- 1 Tolsa X. BMO, H^1 , and Calderón-Zygmund operators for non doubling measures. *Math Ann*, 2001, 319: 89–149
- 2 Hytönen T. A framework for non-homogeneous analysis on metric spaces, and the RBMO space of Tolsa. *Publ Mat*, 2010, 54: 485–504
- 3 Nazarov F, Treil S, Volberg A. The Tb -theorem on non-homogeneous spaces. *Acta Math*, 2003, 190: 151–239
- 4 Tolsa X. The space H^1 for nondoubling measures in terms of a grand maximal operator. *Trans Amer Math Soc*, 2003, 355: 315–348
- 5 Hytönen T, Yang D, Yang D. The Hardy space H^1 on non-homogeneous metric spaces. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 2012, 153: 9–31
- 6 Hytönen T, Martikainen H. Non-homogeneous Tb theorem and random dyadic cubes on metric measure spaces. *J Geom Anal*, 2012, 22: 1071–1107
- 7 Yang D, Yang D, Hu G. The Hardy Space H^1 with Non-Doubling Measures and Their Application. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 2084. Berlin: Springer-Verlag, 2013
- 8 Kenig C E, Stein E M. Multilinear estimates and fractional integration. *Math Res Lett*, 1999, 6: 1–15
- 9 Grafakos L, Kalton N. Some remarks on multilinear maps and interpolation. *Math Ann*, 2001, 319: 151–180
- 10 Zhao Y, Lin H, Meng Y. Endpoint estimates for multilinear fractional integral operators on metric measure spaces. *Ann Funct Anal*, 2019, 10: 337–349
- 11 Fu X, Yang D, Yuan W. Generalized fractional integrals and their commutators over non-homogeneous metric measure spaces. *Taiwanese J Math*, 2014, 18: 509–557
- 12 Sihwaningrum I, Sawano Y. Weak and strong type estimates for fractional integral operators on Morrey spaces over metric measure spaces. *Eurasian Math J*, 2013, 4: 76–81
- 13 Sawano Y, Tanaka H. Morrey spaces for non-doubling measures. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2005, 21: 1535–1544
- 14 Cao Y, Zhou J. Morrey spaces for nonhomogeneous metric measure spaces. *Abstr Appl Anal*, 2013, 2013: 196459
- 15 Tang L. Endpoint estimates for multilinear fractional integrals. *J Aust Math Soc*, 2008, 84: 419–429
- 16 Lin H, Yang D. Endpoint estimates for multilinear fractional integrals with non-doubling measures. *Acta Math Appl Sin Engl Ser*, 2014, 30: 755–764
- 17 Nazarov F, Treil S, Volberg A. Weak type estimates and Cotlar inequalities for Calderón-Zygmund operators on nonhomogeneous spaces. *Int Math Res Not IMRN*, 1998, 1998: 463–487
- 18 Terasawa Y. Outer measures and weak type $(1, 1)$ estimates of Hardy-Littlewood maximal operators. *J Inequal Appl*, 2006, 2006: 15063

Boundedness of multilinear fractional integrals on metric measure spaces

Yan Meng

Abstract Let $(\mathcal{X}, d, \mu)$ be a metric measure space satisfying the upper doubling condition and the geometrically doubling condition in the sense of Hytönen or let $(\mathcal{X}, d, \mu)$ be a metric measure space such that for any fixed $x \in \mathcal{X}$, $\mu(B(x, r))$ is a continuous function with respect to $r \in (0, \infty)$. In the above two settings, we prove that the multilinear fractional integrals map from $L^1(\mu) \times \cdots \times L^1(\mu)$ into $L^{q, \infty}(\mu)$, where $0 < \alpha < m$, $1/q = m - \alpha$. We also establish the boundedness of the multilinear fractional integrals on the products of Morrey spaces and some weak type endpoint estimates.

Keywords metric measure space, multilinear fractional integral, Lebesgue space, Morrey space

MSC(2010) 42B20, 42B35

doi: 10.1360/N012019-00016