中国科学 A辑: 数学 2008 年 第 38 卷 第 6 期: 620 ~ 630
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

非交换非结合背景下的 Paley-Weiner 定理

李兴民①, 彭立中②, 钱涛③

① 华南师范大学计算机学院, 广州 510631
② 北京大学数学科学学院, 北京 100871
③ 澳门大学科技学院, 澳门 3001
E-mail: lxmin57@hotmail.com, lzpeng@pku.edu.cn, fsttq@muac.mo

收稿日期: 2007-09-27; 接受日期: 2007-12-11
国家重点基础研究发展规划 (批准号: G1999075105), 国家自然科学基金 (批准号: NNSF10471002) 和国家教委博士点基金 (批准号: 20050574002) 资助项目

摘要 在非交换非结合的八元数解析函数空间证明了 Paley-Weiner 定理.

关键词 八元数指数函数 八元数 Taylor 展式 Fourier 变换 Paley-Weiner 定理

MSC(2000) 主题分类 30G35, 31B05, 35E99

设函数或信号 $f(x)\in L^2(\mathbb{R})$, 如果 $\widehat{f}(\omega)\subset[-\Omega,\Omega]$, 则称 $f(x)$ 是频带受限的. 据 Shannon 采样定理, $f(x)$ 可完全由它在点 $t_j=\frac{j\pi}{\Omega}$ $(j=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ 处的值重构. 准确地说, $f(x)$ 有如下的级数表达式:

$$f(x)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}f\left(j\frac{\pi}{\Omega}\right)\frac{\sin(\Omega x-j\pi)}{\Omega x-j\pi},$$

上式右边的级数一致收敛, 并称自然频率 $\nu=\frac{\Omega}{2\pi}$ 为 Nyquist 频率.

定义在复平面 $\mathbb{C}$ 上的整函数 $F(z)$ 称之为 $\sigma\,(\sigma>0)$ 指数型的, 如果存在常数 $C>0$, 使得对 $\forall\, z\in\mathbb{C}$, $|F(z)|\leqslant Ce^{\sigma|z|}$. 经典的 Paley-Wiener 定理告诉我们: 设 $F(x)\in L^2(\mathbb{R})$, 则 $F(x)$ 是 σ 指数型的整函数 $F(x+iy)$ 在 x 轴上的限制的充分必要条件是 $\mathrm{supp}\widehat{F}\subset[-\sigma,\sigma]$. 且上述条件有一成立, 就有

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{F}(\xi)e^{i(x+iy)}d\xi,\quad z=x+iy.$$

经典的 Paley-Wiener 定理深刻揭示了复平面上解析函数的指数增长性与它在实轴上的限制的 Fourier 变换支集的大小之间的联系. 它是 Shannon 采样定理的理论基础.

1957 年, Stein[1] 通过把高维的情形转化为一维的情形, 推广 Paley-Wiener 定理到多复变数解析函数的情形.

Paley-Wiener 定理还被推广到刻画具有紧支集的 Schwartz 试验函数类和紧支集的分布, 即 Paley-Wiener-Schwartz 定理. 应用这一定理, Malgrang 证明了: $\mathbb{R}^n$ 上常系数偏微分方程 $P(D)\delta=u$ 必存在基本解.

经典 Paley-Wiener 定理的证明用到 Phragmén-Lindelöf 定理, 它是复解析函数极大模原理从有界域到无界域的一种推广. 这需要一个基本的事实: 复解析函数的乘积仍然是复解析函数. 但这一事实在高维的复分析如四元数分析、八元数分析、Clifford 分析当中都不再成立.

四元数分析的研究始于 20 世纪 30 年代, 并在 50 年代基本完善, 但其应用日趋广泛. 最近, 四元数 Fourier 变换理论被用于彩色图像处理.

作为复分析和四元数分析的一种高维推广, Clifford 分析是 20 世纪 70 年代以后发展起来的, 它是建立在结合代数 Clifford 代数上的分析理论. 将 $\mathbb{R}^n$ 嵌入到 Clifford 代数当中, 相当于在 $\mathbb{R}^n$ 上赋予代数和复解析结构, 由此产生的 Clifford 分析的方法现已经广泛应用于数学和物理等多个方面.

2002 年, 钱涛和 Kou Kit-Ian[2] 使用 Clifford 分析的方法, 把经典的 Paley-Wiener 定理推广到 Clifford 解析函数的情形并给出了一些应用.

作为仅有的 4 种赋范可除代数 "实数、复数、四元数、八元数" 中的最大者, 关于乘法, 八元数不再要求乘法的交换律和结合律成立, 因而八元数分析理论有更大的施展空间. 然而正是八元数的非交换非结合性, 在长时期内阻碍了八元数分析理论的发展.

但很早就有人注意到八元数在数学和物理方面的作用. 1925 年, Élie Cartan[3] 首先发现了 8 维空间中的向量与旋子之间的对称关系. 1934 年, Jordan 等 [4] 关于量子力学基础的论文, 注意到了八元数与物理的潜在关系.

八元数除了在物理方面的作用, 它的重要性还在于它和一些似乎是孤立的和难以想象的代数结构联系在一起. 单 Lie 代数就是其中的一个例子. 19 世纪后期, Killing 和 Cartan 发现, 例外的单 Lie 代数共有 5 个. 当发现了它们与八元数的关系之后, 才真正清楚: 其中的 4 种源于 O, $O\otimes C$, $O\otimes H$, 和 $O\otimes O$ 的摄影平面的等距群 [5]. 最后一种就是八元数的自同构群. 另一个重要的例子就是单实 Jordan 代数的分类. 3×3 Hermite 八元数矩阵代数 $\mathcal{H}_3(O)$ 构成了例外的 Jordan 代数. 另外, 利用八元数的 "组合性", 可以给出古老的球堆积问题在 $n=8$ 时的解 [6].

Clifford 分析理论的迅猛发展, 使得发展八元数分析理论成为可能. 1995 年起, 我们开始对八元数分析做系统的研究, 并陆续完成了八元数解析函数理论的基本框架 [7–15].

八元数分析的理论和应用也逐渐引起关注. 2001 年, Baez 在文献 [5] 中指出八元数处于许多令人有兴趣的数学领域的交叉点. 文章描述了八元数与 Clifford 代数、旋子、Bott 周期性、投影和 Lorenzian 几何、Jordan 代数、例外 Lie 代数的关系, 并讨论了八元数在量子逻辑、相对论、超对称等方面的应用. 2005 年 Baez[6] 又论述了八元数在几何, 算术, 与对称方面的应用. 在文章 [5] 的最后, 作者提出 14 个在八元数上值得探索的问题. 第 1 个问题就是在八元数上建立与复分析类似的函数理论.

鉴于 Paley-Wiener 定理在数学的基础理论和信息论等多方面有重要作用, 一个自然的问题就是: 能否在具有非交换非结合背景的八元数解析函数空间建立 Paley-Wiener 定理?

为了表述八元数中的 Paley-Wiener 定理, 需首先选择定义合适的八元数指数函数: 其本身是八元数左 (右) 解析的, 且以其定义的八元数左 (右) 解析函数的 Fourier 变换仍然是八元数左 (右) 解析的. 又由于文献 [11] 中的八元数 Taylor 展式不能用于定理的证明, 我们还需要建立八元数分析中具有积分项的 Taylor 展式. 另外, 文献 [2] 中考虑的函数都是

定义于 $\mathbb{R}^n$ 取 Clifford 代数值的函数, 在许多场合都要依赖于 Clifford 代数的结合性. 如 $(fg)h = f(gh)$, $((fg)h)k = (fg)(hk) = f((gh)k)$ 等. 而对八元数值函数, 这些都不再成立. 我们的方法是把非结合性带来的困难用结合子来描述, 然后利用我们新近建立的八元数分析理论处理结合子. 这种方法是在结合代数上做分析问题所不曾遇到的. 本文最后给出八元数 Paley-Wiener 定理的一个简单应用.

1 预备知识

赋范的可除代数只有 4 种: 实数 $\mathbb{R}$, 复数 $\mathbb{C}$, 四元数 H 和八元数 O. 也就是说, 若在 $\mathbb{R}^n$ 中规定乘法运算 "·", 使对任意的 X, $Y \in \mathbb{R}^n$, 仍有 $X \cdot Y \in \mathbb{R}^n$, 且 $\|X \cdot Y\| = \|X\|\|Y\|$, 并使非零向量有逆, 则 n 只可能为 1, 2, 4, 8, 其中 $\|x\| = \sqrt{\sum_1^n x_k^2}$. 关于乘法, 四元数不满足交换律但仍满足结合律, 八元数既不满足交换律也不满足结合律. 它们满足嵌入包含关系: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq H \subseteq O$. 设 $e_0, e_1, \dots, e_6, e_7$ 是 O 上的一组基, 令 $W = \{(1,2,3), (1,4,5), (2,4,6), (3,4,7), (2,5,7), (6,1,7,), (5,3,6)\}$, 则

$$e_0^2 = e_0, \quad e_\alpha e_0 = e_0 e_\alpha = e_\alpha, \quad e_\alpha^2 = -1, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 7,$$

且对任意 $(\alpha, \beta, \gamma) \in W$, 有 $e_\alpha e_\beta = e_\gamma = -e_\beta e_\alpha$, $e_\beta e_\gamma = e_\alpha = -e_\gamma e_\beta$, $e_\gamma e_\alpha = e_\beta = -e_\alpha e_\gamma$.

八元数亦称 Caylay 数. 任一八元数 x 可以表示成 $x = \sum_{k=0}^7 x_k e_k$, $x_k \in \mathbb{R}$. 八元数是一种交错代数. 交错性是指由任何两个元素张成的子代数是结合代数. 称 $[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$ 为 x, y, z 的结合子, 则对任意 $x, y, z \in O$,

$$\begin{aligned}
&[x, y, z] = [y, z, x] = [z, x, y], \\
&[x, x, y] = 0, \\
&[x, y, z] = -[y, x, z].
\end{aligned}$$

设 $a = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_7 e_7$, $b = b_0 e_0 + b_1 e_1 + \cdots + b_7 e_7$, 其中 $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, 7$. 令 $a = a_0 + \boldsymbol{A}, b = b_0 + \boldsymbol{B}$, 则 $ab = a_0 b_0 + a_0 \boldsymbol{B} + b_0 \boldsymbol{A} + \boldsymbol{AB}$. 令

$$A_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 7,$$

则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{AB} = &-\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + e_1(A_{2,3} + A_{4,5} - A_{6,7}) + e_2(-A_{1,3} + A_{4,6} + A_{5,7}) \\
&+ e_3(A_{1,2} + A_{4,7} - A_{5,6}) + e_4(-A_{1,5} - A_{2,6} - A_{3,7}) \\
&+ e_5(A_{1,4} - A_{2,7} + A_{3,6}) + e_6(A_{1,7} + A_{2,4} - A_{3,5}) \\
&+ e_7(-A_{1,6} + A_{2,5} + A_{3,4}),
\end{aligned}$$

利用文献 [15] 的记号, 有 $\boldsymbol{AB} = -\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, 且

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{A} = 0, \quad (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{A} /\!/ \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}.$$

定义共轭运算: $\overline{e_0} = e_0$, $\overline{e_j} = -e_j$, $j = 1, 2, \dots, 7$, 则 $\overline{e_i e_j} = \overline{e_j}\,\overline{e_i}$, $i, j = 1, 2, \dots, 7$. 对任意 $x, y \in O$, 有 $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}, x\overline{x} = \overline{x}x = \sum_0^7 x_i^2 = |x|^2$. 故当 $O \ni x \neq 0$ 时, $x^{-1} = \frac{\overline{x}}{|x|^2}$.

尽管八元数关于乘法不满足结合律, 但仍然有下面的弱结合性, 即所谓的 R. Moufang 恒等式: 对任意 $u,v,x,y,z\in O,(uvu)x=u(v(ux))$, $x(uvu)=((xu)v)u$, $u(xy)u=(ux)(yu)$.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^8$ 中的连通开集, $f:\Omega\to O, f(x)=\sum_0^7 e_kf_k(x)$, 其中 $f_k(x)$ 都是实值函数. 定义 Dirac D- 算子及其伴随算子 $\overline{D}$ 为 $C^\infty(\Omega,O)$ 上的一阶微分算子 $D=\sum_0^7 e_k\frac{\partial}{\partial x_k}$, $\overline{D}=\sum_0^7\overline{e_k}\frac{\partial}{\partial x_k}$. 称 $C^\infty(\Omega,O)$ 中的函数 f 在 Ω 上八元数左 (右) 解析 (简写为左 (右) O- 解析), 如果 $Df=\sum_0^7 e_k\frac{\partial f}{\partial x_k}=0\,(fD=\sum_0^7\frac{\partial f}{\partial x_k}e_k=0)$. 因为 $D\overline{D}=\overline{D}D=\triangle_8=\sum_0^7\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, 所以任何左 (右) O- 解析函数的分量都是调和函数.

设 M 是含于某个开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^8$ 中的带有边界 ∂M 的 8 维的、紧的、定向的 C^∞ 流形. $x\in\partial M$, 令 $n(x)=\sum_0^7 n_je_j$ 为 x 点处 ∂M 的外单位法线, $dS(x)$ 是 ∂M 上的标量面积元素且 $d\sigma=ndS$, $\omega=n(x)f(x)dS(x)$. 令 $\Phi(x-z)=\frac{\overline{x}-\overline{z}}{\omega_7|x-z|^8}=:\sum_0^7\Phi_se_s$, 其中 ω_7 为 $\mathbb{R}^8$ 中单位球面面积.

定理 A[9, 12] 设 M 是含于 Ω 中 8 维的紧的定向的 C^∞ 流形. f 是在 Ω 上的左 O- 解析函数, 则

$$\int_{\partial M}\omega=\int_{\partial M}n(x)f(x)dS(x)=0.$$

定理 B[9, 12] M 和 Ω 同上. $Df=0$, $x\in\Omega$, 则对 M 中的任一点 z,

$$\begin{aligned}f(z)&=\int_{\partial M}\Phi(x-z)\,(d\sigma(x)f(x))\\&=\int_{\partial M}(\Phi(x-z)d\sigma(x))\,f(x)-\int_M\sum_{t=0}^7[\Phi(x-z),Df_t(x),e_t]dV,\end{aligned}$$

而当 $z\in\Omega\backslash M$, $\int_{\partial M}\Phi(x-z)\,(d\sigma(x)f(x))=0$. 其中 $dV(x)=dx_0\wedge\cdots\wedge dx_7$.

注 1 Clifford 代数 A_n 为实的 2^n 维的结合代数, 它满足 $A_0=R$, $A_1=C$, $A_2=H$, 但 $A_3\neq O$, 且二者有许多质的不同. 如八元数是非结合的可除代数, Clifford 代数是结合的不可除代数; 左 Clifford 解析函数类构成一 Clifford 右模, 但左八元数解析函数类不能构成八元数右模. 关于 Clifford 分析的更多的工作, 参见 [16–18];

注 2 约定 O^c 代表 O 的复化. $x\in O^c\Leftrightarrow x=\sum_{k=0}^7x_ke_k$, $x_k\in\mathbb{C}$. 注意, 虽然 O^c 不再是可除代数, 但前述关于八元数的结合子的运算, R. Moufang 恒等式在 O^c 中都正确. 八元数左 (右) 解析函数的定义可以推广到定义于 $\mathbb{R}^8$ 而取值于 O^c 的函数, 并称其为左 (右) O^c-解析函数. 可以验证: 定理 A 和定理 B 对左 O^c- 解析函数都成立;

注 3 今后对 $x=(x_0,\dots,x_7)\in\mathbb{R}^8$ 和 $x=\sum_{k=0}^7x_ke_k\in O$, $x=(x_0,\dots,x_7)\in\mathbb{C}^8$ 和 $x=\sum_{k=0}^7x_ke_k\in O^c$ 不加以区别.

2 八元数指数函数与 Taylor 展式

仿文献 [16] 定义八元数指数函数如下: 对 $x=x_0+\underline{x}\in\mathbb{C}^8$, $\underline{\xi}=\xi_1e_1+\cdots+\xi_7e_7\in\mathbb{C}^7$, 令

$$e(x,\underline{\xi})=e^{i\langle\underline{x},\,\underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})+e^{i\langle\underline{x},\,\underline{\xi}\rangle}e^{x_0|\underline{\xi}|}\chi_-(\underline{\xi}),$$

其中

$$\chi_\pm(\underline{\xi})=\frac{1}{2}\left(1\pm i\frac{\underline{\xi}}{|\underline{\xi}|}\right).$$

容易验证 $\chi_-\chi_+=\chi_+\chi_-=0$, $\chi_\pm^2=\chi_\pm$, $\chi_++\chi_-=1$.

注 4 这里定义的指数函数是通常指数函数的推广. 指数函数更一般的高维推广见文献 [16].

命题 2.1 指数函数 $e(x,\underline{\xi})$ 满足下面的性质:

$$e(x,\underline{\xi})e(y,\underline{\xi})=e(y,\underline{\xi})e(x,\underline{\xi})=e(x+y,\underline{\xi}),\quad e(x,-\underline{\xi})=e(-x,\underline{\xi}),$$

$$e(x,\underline{\xi})=\exp i(\langle\underline{x},\underline{\xi}\rangle-x_0\underline{\xi})=\sum\nolimits_{k=0}\frac{1}{k!}(i(\langle\underline{x},\underline{\xi}\rangle-x_0\underline{\xi}))^k.$$

证明是验证性的, 在此省略.

命题 2.2 对任意的 $\underline{\xi}\in\mathbb{C}^7$, 指数函数 $e(x,\underline{\xi})$ 关于 $x\in O$ 是既左又右的八元数解析函数. 它显然又是 $\underline{x}=(x_1,\dots,x_7)\in\mathbb{C}^7$ 的多复变数全纯函数.

证明 通过具体计算有

$$D_xe^{i\langle\underline{x},\ \underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})=e^{i\langle\underline{x},\ \underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})D_x=0,$$
$$D_xe^{i\langle\underline{x},\ \underline{\xi}\rangle}e^{x_0|\underline{\xi}|}\chi_-(\underline{\xi})=e^{i\langle\underline{x},\ \underline{\xi}\rangle}e^{x_0|\underline{\xi}|}\chi_-(\underline{\xi})D_x=0,$$

故 $D_xe(x,\underline{\xi})=e(x,\underline{\xi})D_x=0$. 即 $e(x,\underline{\xi})$ 是既左又右的八元数解析函数.

通过具体计算, 我们还有

命题 2.3 对任意正整数 k, 函数 $(i(\langle\underline{x},\underline{\xi}\rangle-x_0\underline{\xi}))^k$ 既是八元数左解析又是八元数右解析的函数.

注意到函数 $x^k,x\in O$ 既非八元数左解析又非八元数右解析. 因此, 函数 $(i(\langle\underline{x},\underline{\xi}\rangle-x_0\underline{\xi}))^k$ 是 $\mathbb{C}$ 中函数 z^k 的合适的替代物.

有反例 $f(x)$ 说明 [7]: $f(x)$ 是八元数左解析函数, a 是一个八元数常数, $f(x)a$ 不再是八元数左解析函数. 但是, 当 $f(x)$ 是指数函数时, 我们却有下面的结果:

命题 2.4 对任意的 O^c-值函数 $g(\xi)$, 函数 $e(x,\underline{\xi})g(\xi)$ 关于 x 是左 O^c- 解析函数.

证明 因为 $[\chi_+(\underline{\xi}),\ \chi_-(\underline{\xi}),\ g(\xi)]=0$, 故

$$\begin{aligned}
&D_x(e(x,\underline{\xi})g(\xi))\\
&\quad=D_x(e^{i\langle\underline{x},\ \underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})g(\xi))+D_x(e^{i\langle\underline{x},\underline{\xi}\rangle}e^{x_0|\underline{\xi}|}\chi_-(\underline{\xi})g(\xi))\\
&\quad=D_xe^{i\langle\underline{x},\ \underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}(\chi_+(\underline{\xi})g(\xi))+D_xe^{i\langle\underline{x},\underline{\xi}\rangle}e^{x_0|\underline{\xi}|}(\chi_-(\underline{\xi})g(\xi))\\
&\quad=2(-|\underline{\xi}|)e^{i\langle\underline{x},\ \underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_-(\underline{\xi})(\chi_+(\underline{\xi})g(\xi))+2(|\underline{\xi}|)e^{i\langle\underline{x},\ \underline{\xi}\rangle}e^{x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})(\chi_-(\underline{\xi})g(\xi))\\
&\quad=2(-|\underline{\xi}|)e^{i\langle\underline{x},\ \underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}(\chi_-(\underline{\xi})\chi_+(\underline{\xi}))g(\xi)+2(|\underline{\xi}|)e^{i\langle\underline{x},\ \underline{\xi}\rangle}e^{x_0|\underline{\xi}|}(\chi_+(\underline{\xi})\chi_-(\underline{\xi}))g(\xi)=0.
\end{aligned}$$

即函数 $e(x,\underline{\xi})g(\xi)$ 关于 x 是左 O^c-解析函数. 证毕.

类似可以证明对任意的 O^c-值函数 $g(\xi)$ 和 $g(\xi)e(x,\underline{\xi})$ 是右 O^c-解析函数.

Dirac 算子 $D=\sum_0^7e_k\frac{\partial}{\partial x_k}$ 的核函数由下式给出:

$$\Phi(y-x)=\frac{1}{\omega_7}\frac{\overline{y}-\overline{x}}{|y-x|^8}=\frac{1}{6\omega_7}\overline{D}_x\frac{1}{|y-x|^6}=\frac{1}{6\omega_7}\overline{D}_y\frac{1}{|y-x|^6}.$$

对 $\nu\in C,\mathrm{Re}\nu>-\frac{1}{2}$, $(1-2tx+x^2)^{-\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^{\nu}(t)x^k,\ \forall x,t\in\mathbb{R}$. 其中 C_k^{ν} 是关于 ν 的 k 阶 Genenbauer 多项式 [18]. 对 $x,y\in\mathbb{R}^8$, 令 $x=|x|\xi,y=|y|\omega,r=\frac{|x|}{|y|},t=\langle\xi,\omega\rangle$, 则

$$\frac{1}{|x-y|^6}=\frac{1}{|y|^6(1-2tr+r^2)^3}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^k}{|y|^{6+k}}C_k^3(t).$$

因为计算不涉及结合性, 仿文献 [18] 我们有

$$\frac{\overline{y}-\overline{x}}{|y-x|^8}=\frac{1}{6\omega_7}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|y|^{k+7}}\overline{D_x}(C_{k+1}^3(t)|x|^{k+1})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^k}{|y|^{k+7}}C_{8,k}^-(\omega),$$

其中 $C_{8,k}^-(\omega,\xi)=\frac{1}{6\omega_7}[(k+1)C_{k+1}^3(t)-6C_k^4(t)(\langle\omega,\xi\rangle-\overline{\omega}\xi)]$. 同理可得到

$$\frac{\overline{y}-\overline{x}}{|y-x|^8}=\frac{1}{6\omega_7}\sum_{k=0}^{\infty}|x|^k\overline{D_y}\left(C_k^3(t)\frac{1}{|y|^{k+6}}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^k}{|y|^{k+7}}C_{8,k}^+(\xi,\omega)\overline{\omega},$$

其中 $C_{8,k}^+(\omega,\xi)=-\frac{1}{6\omega_7}[-(k+6)C_k^3(t)-6C_{k-1}^4(t)(\langle\xi,\omega\rangle-\overline{\xi}\omega)]$. 但当 $|x|<|y|$ 时,

$$\frac{\overline{y}-\overline{x}}{|y-x|^8}=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(\langle x,\partial_y\rangle)^k\frac{\overline{y}}{|y|^8},$$

其中 $\langle x,\partial_y\rangle=\sum_0^7 x_i\partial_{y_i}$. 因此对任意的非负整数 k 和 $x\in\mathbb{R}^8$, 当 $|y|>|x|$ 时,

$$\frac{|x|^k}{|y|^{k+7}}C_{8,k}^-(\omega,\xi)\overline{\xi}=\frac{|x|^k}{|y|^{k+7}}C_{8,k}^+(\xi,\omega)\overline{\omega}=\frac{(-1)^k}{k!}(\langle x,\partial_y\rangle)^k\frac{\overline{y}}{|y|^8}.$$

因为 $\frac{\overline{y}}{|y|^8},y\neq 0$ 是八元数左右解析函数, 由上式我们得到

命题 2.5 对固定的 $x\in\mathbb{R}^8$, 当 $|y|>|x|$ 时, $\frac{|x|^k}{|y|^{k+7}}C_{8,k}^-(\omega,\xi)\overline{\xi}$ 和 $\frac{|x|^k}{|y|^{k+7}}C_{8,k}^+(\xi,\omega)\overline{\omega}$ 都是关于 y 的八元数左右解析函数.

于是, 和文献 [11] 比较, 我们得到了具有积分项形式的八元数 Taylor 展式

命题 2.6 设 f 在包含球 $B(0,r)=\{x\in\mathbb{R}^8:|x|<r\}$ 的区域内左 O^c- 解析, 则当 $x\in B(0,r)$ 时, 有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\partial B(0,r)}(P^{(k)}(y^{-1}x)\Phi(y))\,(n(y)f(y))dS_y,$$

其中 $P^{(k)}(y^{-1}x)=|y^{-1}x|^kC_{8,k}^+(\xi,\omega)$, dS_y 是 $\partial B(0,r)$ 上的面积元素.

证明 据定理 B 及上述 Cauchy 核的展式, 有

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_{\partial B(0,r)}\Phi(y-x)\,(d\sigma_y f(y))\\&=\frac{1}{\omega_7}\int_{\partial B(0,r)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^k}{|y|^{k+7}}C_{8,k}^+(\xi,\omega)\overline{\omega}\right)(d\sigma_y f(y))\\&=\frac{1}{\omega_7}\int_{\partial B(0,r)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^k}{|y|^k}C_{8,k}^+(\xi,\omega)\frac{\overline{\omega}}{|y|^7}\right)(n(y)f(y))dS_y\\&=\frac{1}{\omega_7}\int_{\partial B(0,r)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^k}{|y|^k}(C_{8,k}^+(\xi,\omega)\frac{\overline{y}}{|y|^8}\right)(n(y)f(y))dS_y\\&=\int_{\partial B(0,r)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|x|^k}{|y|^k}C_{8,k}^+(\xi,\omega)\Phi(y)\right)(n(y)f(y))dS_y\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\partial B(0,r)}(P^{(k)}(y^{-1}x)\Phi(y))\,(n(y)f(y))dS_y.\end{aligned}$$

注 5 和文献 [2] 中 Clifford 分析的情形不同, 这里被积函数的表达式与函数乘积的结合方式密切相关. 仿文献 [18], 我们还有以下基本事实: $P^{(k)}(y^{-1}x)$ 是 x 的 k 阶多项式且 $|P^{(k)}(y^{-1}x)|\leqslant Ck^7(\frac{|x|^k}{|y|^k})$.

3 八元数 Paley-Wiener 定理

$\mathbb{R}^n$ 上经典的 Fourier 变换及其逆变换以如下形式定义:

$$\mathcal{F}(\underline{\xi})=\widehat{f}(\underline{\xi})=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \underline{x},\ \underline{\xi}\rangle} f(\underline{x})d\underline{x},\quad \mathcal{F}^{-1}(\underline{x})=f^{\vee}(\underline{x})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} f(\underline{\xi})d\underline{\xi}.$$

我们有以下事实: $\widehat{\mathcal{T}}(\phi)=\mathcal{T}(\widehat{\phi}),\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 其中 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是速降的 Schwarz 函数类, $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的缓增分布, 并有 $\widehat{1}=(2\pi)^n\delta$, $(\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n})^{\vee}=i^{-|\alpha|}\mathcal{D}^{\alpha}\delta$, 其中 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\mathcal{D}^{\alpha}=(\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}\cdots(\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$.

定理 设 $f:O\to O^c$ 为八元数左解析函数, $f|_{\mathbb{R}^7}\in L^2(\mathbb{R}^7)$, $R>0$ 是一正数. 则下面的断言等价:

(i) 存在常数 C, 使得 $|f(x)|\leqslant Ce^{\mathbb{R}|x|}$, $\forall\, x\in O$.

(ii) $\mathrm{supp}\mathcal{F}(f|_{\mathbb{R}^7})\subset B(0,R)$.

并且, 如果上面之一成立, 则有

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^7}\int_{\mathbb{R}^7} e(x,\underline{\xi})\widehat{(f|_{\mathbb{R}^7})}(\underline{\xi})d\underline{\xi},\quad x\in O.$$

引理 (Plemelj 公式)[19] 存在 $L_p(\mathbb{R}^7)\,(1<p<\infty)$ 上的有界算子 P_+,P_- 和 C_γ, 使得对任意的 $u\in L_p(\mathbb{R}^7)$ 几乎所有的 $\underline{x}\in\mathbb{R}^7$, 有

$$(P_{\pm}u)(\underline{x})=\pm\lim_{\delta\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^7}\Phi(\underline{x}\pm\delta-\underline{y})\,(n(\underline{y})u(\underline{y}))dS_{\underline{y}},$$

$$(C_\gamma u)(\underline{x})=2\,p.v.\int_{\mathbb{R}^7}\Phi(\underline{x}-\underline{y})\,(n(\underline{y})u(\underline{y}))dS_{\underline{y}},$$

且 $P_{\pm}=\frac{1}{2}(\pm C_\gamma+I),I=P_++P_-,C_\gamma=P_+-P_-$.

注 6 引理是文献 [19] 中的主要定理在 Lip 曲面为 $\mathbb{R}^n$, 核函数为 Cauchy 核的特殊情形.

定理的证明 (ii) $\Rightarrow$ (i) 令 $F(x)=\frac{1}{(2\pi)^7}\int_{\mathbb{R}^7} e(x,\underline{\xi})\widehat{(f|_{\mathbb{R}^7})}(\underline{\xi})d\underline{\xi}$, 则

$$|F(x)|=\left|\frac{1}{(2\pi)^7}\int_{\mathbb{R}^7} e(x,\underline{\xi})\chi_{B(0,R)}(\xi)\widehat{(f|_{\mathbb{R}^7})}(\underline{\xi})d\underline{\xi}\right|\leqslant Ce^{R|x_0|}\|\chi_{B(0,R)}\|_2\|\widehat{(f|_{\mathbb{R}^7})}\|_2\leqslant Ce^{R|x|},$$

其中, C 在文中代表常数, 不同地点可以不同.

下面证明 $f(x)=F(x)$. 这只需证明 $F(x)$ 是左 O^c- 解析函数. 而同样的事实在 Clifford 代数的情形是不证自明的, 但此时涉及到了结合性.

记 $e(x,\underline{\xi})=e^{i\langle\underline{x},\underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})+e^{i\langle\underline{x},\underline{\xi}\rangle}e^{x_0|\underline{\xi}|}\chi_-(\underline{\xi})=:f_1+f_2$, 则

$$F(x)=\frac{1}{(2\pi)^7}\int_{\mathbb{R}^7} e(x,\underline{\xi})\widehat{f|_{\mathbb{R}^7}}(\underline{\xi})d\underline{\xi}=:F_1(x)+F_2(x).$$

$$D_xF_1=\frac{1}{(2\pi)^7}\int_{\mathbb{R}^7} D_x(f_1(x,\underline{\xi})\widehat{f|_{\mathbb{R}^7}}(\underline{\xi}))d\underline{\xi}=\frac{1}{(2\pi)^7}\int_{\mathbb{R}^7} D_x(e^{i\langle\underline{x},\underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})\widehat{f|_{\mathbb{R}^7}}(\underline{\xi}))d\underline{\xi},$$

注意到 $e^{i\langle\underline{x},\underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}$ 是复数, 经过具体计算, 有

$$\begin{aligned}D_x(e^{i\langle\underline{x},\underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})\widehat{f|_{\mathbb{R}^7}}(\underline{\xi}))&=D_x(e^{i\langle\underline{x},\underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}(\chi_+(\underline{\xi})\widehat{f|_{\mathbb{R}^7}}(\underline{\xi})))\\&=e^{i\langle\underline{x},\underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}(-2|\underline{\xi}|)\chi_-(\underline{\xi})\,(\chi_+(\underline{\xi})\widehat{f|_{\mathbb{R}^7}}(\underline{\xi})).\end{aligned}$$

因 $\chi_-(\underline{\xi})(\chi_+(\underline{\xi})\widehat{f|_{\mathbb{R}^7}})=(\chi_-(\underline{\xi})\chi_+(\underline{\xi}))\widehat{f|_{\mathbb{R}^7}}=0$, 所以 $D_xF_1=0$.

同理有 $D_xF_2=0$. 这说明, $F(x)$ 是左 O^c-解析函数.

(i) $\Rightarrow$ (ii) 令

$$G^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^7}\int_{\mathbb{R}^7} e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})f(\underline{\xi})d\underline{\xi}, \quad x_0>0,$$

因为 $f\in L^2(\mathbb{R}^7)$, 上述定义总有意义. 仿上面的证明, 可知 $G^+(x)$ 当 $x_0>0$ 时是左 O^c-解析函数. 把 $f(\underline{\xi})$ 的 Taylor 展式带入上式, 有

$$\begin{aligned} G^+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^7}\int_{\mathbb{R}^7}(e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})) \\ &\quad \times\left(\sum_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} (P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi})\Phi(y))\,(n(y)f(y))dS_y\right)d\underline{\xi} \\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^7}\int_{\mathbb{R}^7}(e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})\chi_{B(0,N)}) \\ &\quad \times\left(\sum_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} (P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi})\Phi(y))\,(n(y)f(y))dS_y\right)d\underline{\xi}, \end{aligned}$$

其中 r 是任一正数. 注意到级数当 $|\xi|\leqslant N$ 时一致收敛, 且 dS_y 和 $d\underline{\xi}$ 均为实值函数, 故

$$\begin{aligned} G^+(x) = \lim_{N\to\infty}&\frac{1}{(2\pi)^7}\sum_0^\infty\int_{\partial B(0,r)}\int_{R^7}(e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})\chi_{B(0,N)}) \\ &\times((P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi})\Phi(y))\,(n(y)f(y)))\ dS_y d\underline{\xi}. \end{aligned}$$

与文献 [2] 不同, 被积函数严重依赖于乘积的结合方式. 两次利用公式 $x(yz)=(xy)z-[x,y,z]$, 则

$$\begin{aligned} &(e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})\chi_{B(0,N)})\ ((P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi})\Phi(y))(n(y)f(y))) \\ &\quad = (e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})\chi_{B(0,N)}(P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi})\Phi(y)))\ (n(y)f(y)) \\ &\qquad - [e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})\chi_{B(0,N)}, P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi})\Phi(y), n(y)f(y)] \\ &\quad = ((e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})\chi_{B(0,N)}P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi}))\,\Phi(y) \\ &\qquad - [e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})\chi_{B(0,N)}, P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi}), \Phi(y)])\ (n(y)f(y)) \\ &\qquad - [e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})\chi_{B(0,N)}, P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi})\Phi(y), n(y)f(y)]. \end{aligned}$$

我们必须先考虑两个结合子

$$\begin{aligned} &[e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})\chi_{B(0,N)}, P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi}), \Phi(y)], \\ &[e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})\chi_{B(0,N)}, P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi})\Phi(y), n(y)f(y)]. \end{aligned}$$

可以证明第一个结合子为零. 事实上, $e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|}$ 是一复数, 注意到 $\chi_+(\underline{\xi})$ 和 $P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi})$ 的表达式, 只需证明 $[\underline{\xi}, \overline{\xi}\eta, \Phi(y)]=0$. 再注意到 $\eta=\frac{y}{|y|}$ 以及 $\Phi(y)=\frac{\overline{y}}{\omega_7|y|^8}$ 且 $y\in\partial B(0,r)$, 据八元数的运算性质, 以及 R. Moufang 恒等式, 容易验证 $[\underline{\xi},\overline{\xi}y,\overline{y}]=[\underline{\xi},\underline{\xi}\,\underline{y},\underline{y}]=0$, 因而 $[\underline{\xi}, \overline{\xi}\eta, \Phi(y)]=0$.

但无法证明第二个结合子为零. 于是

$$\begin{aligned} G^+(x) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^7}\sum_0^\infty\int_{\partial B(0,r)}\int_{\mathbb{R}^7}&((e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})\chi_{B(0,N)}P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi}))\,\Phi(y)) \\ \times(n(y)f(y))(y) - [&e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})\chi_{B(0,N)}, P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi})\Phi(y), n(y)f(y)])\ dS_y d\underline{\xi}. \end{aligned}$$

和文献 [2] 比较, 这里被积函数表达式出现了结合子部分. 记

$$\widetilde{G^+(x)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^7} \sum_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} \int_{\mathbb{R}^7} ((e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|} \chi_+(\underline{\xi}) \chi_{B(0,N)} P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi}))\Phi(y)) \times (n(y)f(y))(y)\ dS_y d\underline{\xi},$$

仿文献 [2], 可以证明当 $x_0 > R$ 时, 可以交换极限和求和的次序, 从而当 $x_0 > R$ 时,

$$\widetilde{G^+(x)} = \sum_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^7} \int_{\partial B(0,r)} \left(\int_{\mathbb{R}^7} ((e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|} \chi_+(\underline{\xi}) P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi}) d\underline{\xi})\ \Phi(y))(n(y)f(y)) \right) dS_y.$$

取 $C_0^\infty(\mathbb{R}^7)$ 中的函数列 $\varphi_m(\underline{\xi})$, 使得当 $|\underline{\xi}| \leqslant \frac{1}{m}$ 时 $\varphi_m(\underline{\xi}) = 0$, 当 $|\underline{\xi}| \geqslant \frac{2}{m}$ 时 $\varphi_m(\underline{\xi}) = 1$, 其他情形下 $0 \leqslant \varphi_m(\underline{\xi}) \leqslant 1$. 显然, 在分布意义下, $\varphi_m \to 1$. 当 $x_0 > R$ 时, 把 $\widetilde{G^+(x)}$ 重新写成

$$\widetilde{G^+(x)} = \sum_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^7} \int_{\partial B(0,r)} \left(\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^7} ((e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|} \chi_+(\underline{\xi}) \varphi_m(\underline{\xi}) P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi}) d\underline{\xi}) \Phi(y)) \right) \times (n(y)f(y))(y) dS_y.$$

因 $e^{\langle \underline{x},\cdot\rangle} e^{-x_0|\cdot|} \chi_+(\cdot)\varphi_m(\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^7)$, 在分布意义下, 重写 $e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|} \chi_+(\underline{\xi}) \varphi_m(\underline{\xi}) P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi})$ 为

$$\begin{aligned} & P^{(k)}(y^{-1}(\cdot))\,(e^{i\langle \underline{x},\cdot\rangle} e^{-x_0|\cdot|} \chi_+(\cdot)\varphi_m(\cdot)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(P^{(k)}(y^{-1}(\cdot))\,(\mathcal{F}(e^{i\langle \underline{x},\cdot\rangle} e^{-x_0|\cdot|} \chi_+(\cdot)\varphi_m(\cdot)))) \\ &= i^{-k}(P^{(k)}(y^{-1}\underline{D})\delta)(\mathcal{F}(e^{i\langle \underline{x},\cdot\rangle} e^{-x_0|\cdot|} \chi_+(\cdot)) * \mathcal{F}(\varphi_m)). \end{aligned}$$

而 $\mathcal{F}(e^{i\langle \underline{x},\cdot\rangle} e^{-x_0|\cdot|} \chi_+(\cdot)) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{i\langle \underline{x},\cdot\rangle} e^{-x_0|\cdot|}) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{i\langle \underline{x},\cdot\rangle} e^{-x_0|\cdot|} \frac{i(\cdot)}{|\cdot|})$, 其中

$$\frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{i\langle \underline{x},\cdot\rangle} e^{-x_0|\cdot|})(\underline{\zeta}) = \widetilde{c}\frac{x_0}{(x_0^2 + |\underline{\zeta} - \underline{x}|^2)^4},$$

这里 $\widetilde{c} = 2^6\pi^3\Gamma(4)$. 因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(e^{i\langle \underline{x},\cdot\rangle} e^{-x_0|\cdot|} \frac{i(\cdot)}{|\cdot|}\right) &= \frac{1}{2}\int_{x_0}^\infty \underline{D}_{\underline{x}} \mathcal{F}(e^{i\langle \underline{x},\cdot\rangle} e^{-t|\cdot|})(\underline{\zeta}) dt \\ &= \widetilde{c}\int_{x_0}^\infty \underline{D}_{\underline{x}} \left(\frac{t}{(t^2 + |\underline{\zeta} - \underline{x}|^2)^4} \right) dt \\ &= \widetilde{c}\frac{\underline{\xi} - \underline{x}}{(x_0^2 + |\underline{\zeta} - \underline{x}|^2)^4}. \end{aligned}$$

从而

$$\mathcal{F}(e^{i\langle \underline{x},\cdot\rangle} e^{-x_0|\cdot|} \chi_+(\cdot)) = \widetilde{c}\frac{\overline{x - \underline{\zeta}}}{|x - \underline{\zeta}|^8} = -\widetilde{c}\Phi(\underline{\zeta} - x).$$

于是

$$\begin{aligned} & P^{(k)}(y^{-1}(\cdot))(e^{i\langle \underline{x},\cdot\rangle} e^{-x_0|\cdot|} \chi_+(\cdot)\varphi_m(\cdot)) \\ &= i^{-k}(P^{(k)}(y^{-1}\underline{D})\delta)(\mathcal{F}(e^{i\langle \underline{x},\cdot\rangle} e^{-x_0|\cdot|} \chi_+(\cdot)) * \mathcal{F}(\varphi_m)) \\ &= -\widetilde{c}i^{-k}(P^{(k)}(y^{-1}\underline{D})\delta)(\Phi(\cdot - x) * \mathcal{F}(\varphi_m)) \\ &= -\widetilde{c}i^{-k}(-1)^k\delta(P^{(k)}(y^{-1}\underline{D})\Phi(\cdot - x) * \mathcal{F}(\varphi_m)) \\ &= -\widetilde{c}i^k(P^{(k)}(y^{-1}\underline{D})\Phi(\cdot - x) * \mathcal{F}(\varphi_m))(0). \end{aligned}$$

因为 $\mathcal{F}(\varphi_m) \to (2\pi)^7\delta$, 故

$$\int_{\mathbb{R}^7} (e^{i\langle \underline{x}\rangle \underline{\xi}\rangle} e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi}))d\underline{\xi} = -(2\pi)^7\widetilde{c}i^k(P^{(k)}(y^{-1}\underline{D})\Phi)(-x).$$

因此对 $x_0 > R$, 有

$$\widetilde{G^+(x)} = -\widetilde{c}\sum_0^\infty i^k \int_{\partial B(0,r)} (((P^{(k)}(y^{-1}\underline{D})\Phi)(-x))\Phi(y))\ (n(y)f(y))dS(y).$$

从而当 $x_0 > R$ 时,

$$\begin{aligned} G^+(x) = &-\widetilde{c}\sum_0^\infty i^k \int_{\partial B(0,r)} (((P^{(k)}(y^{-1}\underline{D})\Phi)(-x))\Phi(y))\,(n(y)f(y))dS_y \\ &-\sum_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^7}\int_{\partial B(0,r)}\int_{\mathbb{R}^7}[e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi}), P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi})\Phi(y), n(y)f(y)]d\underline{\xi}dS_y. \end{aligned}$$

仿文献 [2], 利用级数在 $|x| > R$ 上内闭一致收敛, 可将 $G^+(x)$ 扩张为 $|x| > R$ 上的八元数左解析函数.

再令

$$G^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^7}\int_{\mathbb{R}^7} e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle}e^{x_0|\underline{\xi}|}\chi_-(\xi)f(\underline{\xi})d\underline{\xi}, \quad x_0 < 0,$$

仿上可以证明 $G^-(x)$ 在 $x_0 < -R$ 时八元数左解析, 且

$$\begin{aligned} G^-(x) = &\,\widetilde{c}\sum_0^\infty i^k \int_{\partial B(0,r)} (((P^{(k)}(y^{-1}\underline{D})\Phi)(-x))\Phi(y))(n(y)f(y))dS_y \\ &-\sum_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^7}\int_{\partial B(0,r)}\int_{\mathbb{R}^7}[e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle}e^{x_0|\underline{\xi}|}\chi_-(\underline{\xi}), P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi})\Phi(y), n(y)f(y)]d\underline{\xi}dS_y, \end{aligned}$$

并可将 $G^-(x)$ 扩张为 $|x| > R$ 上的八元数左解析函数. 因 $e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi}) + e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_-(\underline{\xi}) \in \mathbb{C}$, 所以

$$\begin{aligned} &[e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi}), P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi})\Phi(y), n(y)f(y)] \\ &\quad +[e^{i\langle \underline{x},\underline{\xi}\rangle}e^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_-(\underline{\xi}), P^{(k)}(y^{-1}\underline{\xi})\Phi(y), n(y)f(y)] = 0. \end{aligned}$$

故当 $|x| > R$ 时,

$$G^+(x_0 + \underline{x}) + G^-(-x_0 + \underline{x}) = 0.$$

现证明当 $x_0 > R$ 时, G^+ 和 G^- 可另外表示成

$$\begin{aligned} G^+(x_0 + \underline{x}) &= \int_{\mathbb{R}^7} \Phi((x_0 + \underline{x}) - \underline{\xi})\mathcal{F}(f|_{\mathbb{R}^7})(-\underline{\xi})d\underline{\xi}, \\ G^-(-x_0 + \underline{x}) &= \int_{\mathbb{R}^7} \Phi((-x_0 + \underline{x}) - \underline{\xi})F(f|_{\mathbb{R}^7})(-\underline{\xi})d\underline{\zeta}. \end{aligned}$$

这只需将 Parseval 等式 $\int_{\mathbb{R}^7} h(\underline{\xi})g(\underline{\xi})d\underline{\xi} = \int_{\mathbb{R}^7} \mathcal{F}(h)(\underline{\zeta})\mathcal{F}(g)(-\underline{\zeta})d\underline{\xi}$ 用于 $G^+(x)$ 和 $G^-(x)$ 即可.

由引理, 当 $|x| > R$ 时,

$$\lim_{x_0\to 0_+}(G^+(x_0 + \underline{x}) + G^-(-x_0 + \underline{x})) = \mathcal{F}(f|_{\mathbb{R}^7})(\underline{\xi}).$$

我们证明了当 $|\underline{x}| > R$ 时, $\mathcal{F}(f|_{\mathbb{R}^7})(\underline{\xi}) = 0$, 即 $\mathrm{supp}\mathcal{F}(f|_{\mathbb{R}^7})(\underline{\xi}) \subset B(0, R)$. 最后注意到 $f(x)$ 和 $\frac{1}{(2\pi)^7}\int_{\mathbb{R}^7} e(x,\underline{\xi})\widehat{(f|_{\mathbb{R}^7})}(\underline{\xi})d\underline{\xi}$ 都在 $\mathbb{R}^8$ 上左八元数解析且在 $\mathbb{R}^7$ 上相同, 故

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^7}\int_{\mathbb{R}^7} e(x,\underline{\xi})\widehat{(f|_{\mathbb{R}^7})}(\underline{\xi})d\underline{\xi}, \quad x \in \mathbb{R}^8.$$

定理证毕.

最后给出定理的一个简单应用. 我们知道, 共轭调和函数系是高维 Hardy 空间的主要研究对象. 设 $F=(u_1,\dots,u_n)$ 是定义于 $\mathbb{R}^n$ 的某个区域上的向量函数, 如果 F 是该区域上某个实调和函数的梯度, 则称 F 是该区域上的 Stein-Weiss 共轭调和函数系. 我们已经证明 [10]: 若 $(f_0,\dots,f_7)$ 是 $\mathbb{R}^8$ 上的 S-W 共轭调和函数系, 则 $F=-f_0e_0+f_1e_1+\cdots+f_7e_7$ 是八元数左 (右) 解析函数. 我们有如下结果:

推论 设 $(f_0,\dots,f_7)$ 是 $\mathbb{R}^8$ 上的 S-W 共轭调和函数系, $F|_{\mathbb{R}^7}\in L^2(\mathbb{R}^7)$, 则

$$|F(x)|\leqslant Ce^{R|x|}\Longleftrightarrow \mathrm{supp}\mathcal{F}(F|_{\mathbb{R}^n})\subset B(0,R),$$

且如果上述条件之一成立, 就有

$$F(x)=\frac{1}{(2\pi)^7}\int_{\mathbb{R}^7}e(x,\underline{\xi})\widehat{(F|_{\mathbb{R}^7})}(\underline{\xi})d\underline{\xi},\quad x\in O.$$

参考文献

1 Stein E. Functions of exponential type. *Ann of Math*, **65**: 582–592 (1957)

2 Kou K I, Qian T. The Paley-Wiener theorem in $\mathbb{R}^n$ with the Clifford analysis setting. *J Funct Anal*, **189**: 227–241 (2002)

3 Cartan É. Le principe de dualité et la théorie des groupes simple dt semisimples. *Bull Sci Math*, **49**: 361–374 (1925)

4 Jordan P, von Neumann J, Wiger E. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Ann of Math*, **35**: 29–64 (1934)

5 Baez J C. The Octonions. *Bull Amer Math Soc*, **39**: 145–205 (2002)

6 Baez J C. On quaternions and octonions: Their geometry, arithmetic, and symmetry. *Bull Amer Math Soc*, **42**: 229–243 (2005)

7 Li X M. On two questions in Clifford analysis and octonion analysis. In: Kajiwara J, Li Z, Shon K H eds. Lecture Notes in Pure and Applied mathematics. Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis. Vol. 214. New York: Marcel Dekker, 2000, 293–299

8 Li X M, Peng L Z. Three-line theorems on the octonions. *Acta Math Sin Engl Ser*, **3**: 483–490 (2004)

9 Li X M, Peng L Z. The Cauchy integral formulas on the octonions. *Bull Belg Math Soc Simon Stevin*, **9**: 47–64 (2002)

10 Li X M, Peng L Z. On Stein-Weiss conjugate harmonic function and octonion analytic function. *Approx Theory Appl*, **16**: 28–36 (2000)

11 Li X M, Peng L Z. Taylor series and orthogonality of the octonion analytic functions. *Acta Math Sci Ser B*, **21**: 323–330 (2001)

12 Li X M. Octonion analysis. PhD Thesis. Beijing: Peking University, 1998

13 Li X M, Kai Z, Peng L Z. Characterization of octonionic analytic functions. *Complex Var*, **50**(13): 1031–1040 (2005)

14 Li X M, Kai Z, Peng L Z. The Laurent series on the octonions. *Adv Appl Clifford Analysis*, **11**(S2): 205–217 (2001)

15 Peng L Z, Yang L. The curl in 7 dimensional space and its applications. *Approx Theory Appl*, **15**: 66–80 (1999)

16 Li C, McIntosh A, Qian T. Clifford algebras, Fourier transforms, and singular Convolution operators on Lipschitz surfaces. *Rev Mat Iberoamericana*, **10**(3): 665–695 (1994)

17 Brackx F, Delanghe R, Sommen F. Clifford analysis. In: Res Notes in Math, No. 76. Boston: Pitman, 1982

18 Delanghe R, Sommen F, Soucek V. Clifford Algebras and Spinor Valued Functions: A Function Theory for Dirac Operator. Dordrecht: Kluwer Academic, 1992

19 Li X M, Peng L Z, Qian T. Cauchy integrals on Lipschitz surfaces in octonionic space. *J Math And Appl*, **343**(2): 763–777 (2008)