

正压大气非线性波的数值试验

张学洪 曾庆存

(中国科学院大气物理研究所,北京)

摘 要

本文用数值试验的方法,证实了正压原始方程存在着非频散的非线性波解,并讨论了它的主要特点。

一、线性波和非线性波

正压大气运动的支配方程是正压原始方程组。研究正压大气中的演变过程和检验数值模式的性能,都要求找出这组方程的一些有实际意义的特解。然而这是很困难的,主要的障碍在于方程的非线性特点。

对于准地转大尺度低速流,其演变过程就整体而言是准地转过程,可以用准地转位涡度方程来描写。它仍然是非线性方程,尽管比原始方程组已大为简化,但要找到它的真正包含了非线性作用的特解还是困难的。

1939年, Rossby^[1] 讨论了线性化的正压涡度方程的波动解及其频散关系,给出了随基本气流移动,并受自转地球表面修正的大尺度涡旋运动的一个模型,即所谓 Rossby 波。随后, Haurwitz^[2] 将它推广到球面情形,得到了更有实用价值的 Haurwitz 波,迄今仍被用来检验全球正压模式的性能^[3]——尽管对原始方程而言它并非真解。

后来,许多人^[4-6] 发现这样得到的波解刚好满足相应的非线性方程。事实上,对扰动特性施以某种限制,就可使非线性方程变成线性方程,原则上总可求解^[7]。郭晓岚^[8] 用类似的方法得到了球面上斜压准地转位涡度方程的三维波解。

应当指出,上述波解只是满足非线性方程的线性波,其特点是波动的等位涡线和波动流线平行,因此非线性作用实际上被取消。此外,这种做法不适用于原始方程组。

曾庆存^[9] 用摄动法求得了正压原始方程组的一类非线性波解的零级和一级近似,并给出了高级近似的求解方法。以下概述一下文献^[9]的结果,借以说明这类非线性波解与线性波的联系和区别。

对正压原始方程组,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{array} \right.$$

引进环境特征量 f_0 (某一纬度的科里奥利参数) 和 $\bar{\phi}$ (自由面平均位势高度), 利用扰动的特征水平尺度 L^* 、特征时间尺度 t^* 和风和高度的特征量 U^* 、 Φ^* 将 (1) 式无量纲化. 在准地转大尺度低速流条件下, 可取 $t^* = L^*/U^*$, $\Phi^* = f_0 L^* U^*$, 并使得表征可压缩性的无量纲参数 $\mu^{-2} \equiv L^{*2}/(\bar{\phi}/f_0^2)$, 具有 $O(1)$ 量级, 于是可得到含小参数

$$\varepsilon \equiv 1/f_0 t^* \quad (2)$$

的无量纲方程组 (仍用原来的记号):

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \Omega_a v = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi + \varepsilon \frac{u^2 + v^2}{2} \right), \\ \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \Omega_a u = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\phi + \varepsilon \frac{u^2 + v^2}{2} \right), \\ \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + \varepsilon \left(u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = -\mu^2 (1 + \mu^{-2} \varepsilon \phi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \Omega_a \equiv f + \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{array} \right. \quad (3)$$

设 (3) 式有以相速 c 沿 x 方向平移的波解

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, t) = \hat{F}(\xi, \eta) \quad (F = u, v, \phi), \\ \xi \equiv x - ct, \quad \eta \equiv y, \end{array} \right. \quad (4)$$

则它们应满足:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varepsilon c \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} - \Omega_a \hat{v} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\hat{\phi} + \varepsilon \frac{\hat{u}^2 + \hat{v}^2}{2} \right), \\ -\varepsilon c \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \Omega_a \hat{u} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\hat{\phi} + \varepsilon \frac{\hat{u}^2 + \hat{v}^2}{2} \right), \\ -\varepsilon c \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \xi} + \varepsilon \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \xi} + \hat{v} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \eta} \right) = -\mu^2 (1 + \mu^{-2} \varepsilon \hat{\phi}) \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} \right), \\ \Omega_a \equiv f + \varepsilon \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta} \right). \end{array} \right. \quad (5)$$

引进流函数 ψ 、速度势 χ 和函数 A (可称为“非地转位势”), 将 \hat{u} , \hat{v} , $\hat{\phi}$ 和 c 按小参数 ε 展开,

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}(\xi, \eta) = -\frac{\partial}{\partial \eta} (\psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \dots) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\chi_0 + \varepsilon \chi_1 + \dots), \\ \hat{v}(\xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \dots) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\chi_0 + \varepsilon \chi_1 + \dots), \\ \hat{\phi}(\xi, \eta) = (\psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \dots) + (A_0 + \varepsilon A_1 + \dots), \\ c = c_0 + \varepsilon c_1 + \dots, \end{array} \right. \quad (6)$$

并取 $f = 1 + \varepsilon \beta \eta$ (其中 $\beta \equiv L^* t^* \left(\frac{df}{dy} \right)$ 为无量纲数), 代入 (5) 式, 按 ε 的幂次渐次截取, 可得

$$\begin{cases} \chi_0 = 0, & A_0 = 0, \\ -c_0 \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta - \mu^{-2})\phi_0 + \underline{J(\phi_0, (\Delta - \mu^{-2})\phi_0 + \beta\eta)} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \Delta \chi_1 = c_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \phi_0 - J(\phi_0, \beta\eta + \Delta \phi_0), \\ \Delta A_1 = (\beta\eta + \Delta \phi_0)\Delta \phi_0 + \nabla \phi_0 \cdot \nabla (\beta\eta + \Delta \phi_0) - \Delta \left(\frac{u_0^2 + v_0^2}{2} \right), \\ -c_0 \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \phi_1 - \mu^{-2}\phi_1) - c_1 \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \phi_0 - \mu^{-2}\phi_0) + \underline{J(\phi_0, \Delta \phi_1 - \mu^{-2}\phi_1)} \\ + \underline{J(\phi_1, \beta\eta + \Delta \phi_0 - \mu^{-2}\phi_0)} + \nabla \chi_1 \cdot \nabla (\beta\eta + \Delta \phi_0 - \mu^{-2}\phi_0) \\ + (\beta\eta + \Delta \phi_0 - \mu^{-2}\phi_0)\Delta \chi_1 = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (8)$$

(7)和(8)式中之第三式,分别为由一、二级近似方程组得出的位涡度方程,其中画横线的项是绝对位涡度平流. 限定 ϕ_0 满足,

$$\Delta \phi_0 = x\phi_0, \quad (9)$$

其中 x 待定,可求得(7)式的解:

$$\phi_0 = -U\eta + \phi'_0, \quad (10)$$

其中

$$\phi'_0 = {}_0\phi \sin m\xi \sin n\eta, \quad (11)$$

又

$$c_0 = U + \frac{\beta + \mu^{-2}U}{x_{11} - \mu^{-2}}, \quad (12)$$

而

$$x = x_{11} = -(m^2 + n^2). \quad (13)$$

显然, ϕ'_0 就是考虑了可压缩性影响的 Rossby 波,这表明是取了线性波作为原始方程非频散波解的零级近似.

为使所得的解更实用,要求它们在 β 平面上的通道 $0 \leq \eta \leq \pi$ 的边界上满足刚壁条件,即

$$\left. \frac{\partial \chi_j}{\partial \eta} \right|_{\eta=0, \pi} = 0, \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial A_j}{\partial \eta} \right|_{\eta=0, \pi} = - \left[\frac{\partial \chi_j}{\partial \xi} - \sum_{l=1}^j f_l u_{j-l} \right]_{\eta=0, \pi, j=0, 1, \dots} \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \right|_{\eta=0, \pi} = 0. \quad (16)$$

当 n 为整数时,零级近似已满足边界条件,在此基础上可求得满足边界条件的一级修正

$$\chi_1 = \frac{c_0 \mu^{-2}}{x_{11}} m \cdot {}_0\phi \cos m\xi \sin n\eta + \cos m\xi ({}_1X_1^+ e^{m\eta} + {}_1X_1^- e^{-m\eta}), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} A_1 = & -\frac{\beta}{2} U v \eta^2 - \frac{\beta}{x_{11}} n \cdot {}_0\phi \sin m\xi \cos n\eta + \frac{1}{4} n^2 \cdot {}_0\phi^2 \cos 2m\xi \\ & + \frac{1}{4} m^2 \cdot {}_0\phi^2 \cos 2n\eta + \beta \cdot {}_0\phi \eta \sin m\xi \sin n\eta \\ & + \sin m\xi ({}_1X_1^+ e^{m\eta} - {}_1X_1^- e^{-m\eta}), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_1 = & ({}_1X_1^+ - {}_1X_1^-) \sin m\xi \cos n\eta + {}_1\Psi_{20}^c \cos 2m\xi + {}_1\Psi_{02}^c \cos 2n\eta - {}_1U_1\eta \\
 & - {}_1U_2\eta^2 + {}_1B_0\eta \sin m\xi \cos n\eta + {}_1B_1\eta \sin m\xi \sin \eta \\
 & + {}_1B_2\eta^2 \sin m\xi \cos n\eta + ({}_1d_1 e^{l\eta} - {}_1d_2 e^{-l\eta}) \cos 2m\xi \\
 & - ({}_1X_1^+ e^{m\eta} - {}_1X_1^- e^{-m\eta}) \sin m\xi, \quad (l = \sqrt{x_{11} + 4m^2})
 \end{aligned} \quad (19)$$

和

$$c_1 = \frac{1}{x_{11} - \mu^{-2}} \left[x_{11} \cdot {}_1U_1 + \frac{{}_1B_0}{\phi} 2n(c_0 - U) \right], \quad (20)$$

其中 ${}_1X_1^+$, ${}_1X_1^-$, ${}_1\Psi_{20}^c$, ${}_1\Psi_{02}^c$, ${}_1U_2$, ${}_1B_0$, ${}_1B_1$, ${}_1B_2$, ${}_1d_1$ 和 ${}_1d_2$ 均为已知参数的函数(表达式略), ${}_1U_1$ 是一个自由参数.

这里没有再对解施加限制, 强迫(8)式中的位涡度平流为零, 在这个意义上可以说原始方程行波解的一级近似中包含了非线性作用. 虽然这只是一种弱非线性作用, 但它对保持解的非频散特点是至关重要的. 事实上, 一级近似中包含了不同尺度的谐波分量, 按照线性理论它们将以不同的相速移动, 从而引起整个波形的改变, 但在我们的非线性系统中, 不同尺度的谐波同时存在, 产生出合适的非线性作用, 恰恰是维持整个波形不变所必须的. 当然, 只有某些特定的谐波分量的组合才具有非频散特点, 因此我们只能求得非线性系统的一些非频散特解.

若不考虑边界条件(16)式, 则(20)式中的 ${}_1B_0$ 是一个任意常数, 因此一般情况下相速的一级修正 c_1 依赖于零级近似的振幅 ϕ , 这正是非线性波的特点. 但这一点并不是绝对的, 当考虑边界条件时可得到

$${}_1B_0 = -\pi_0\phi \frac{\mu^{-2}}{2n} \left(x_{11}U + \frac{1}{2}\beta \right),$$

因而

$$c_1 = \frac{1}{x_{11} - \mu^{-2}} \left[x_{11} \cdot {}_1U_1 - \pi\mu^{-2}(c_0 - U) \left(x_{11}U + \frac{1}{2}\beta \right) \right], \quad (20)'$$

此时相速与振幅无关.

我们在另文中, 还将给出非频散的非线性波解的二级修正, 求出更高级的修正原则上也是可以办得到的.

总之, 用摄动法对 Rossby 波进行修正, 可以给出正压原始方程组的一类移动性波解, 其中包含了一定的非线性作用. 以下, 我们将通过数值试验对其进行研究和检验.

二、数值试验

取定一组环境参数和扰动尺度参数:

$$f_0 = 10^{-4} \text{ 秒}^{-1}, \quad \left(\frac{df}{dy} \right) = 0.56 \times 10^{-11} \text{ 米}^{-1} \cdot \text{秒}^{-1}, \quad \bar{\phi} = 5000 \times 9.81 \text{ 米}^2 \cdot \text{秒}^{-2},$$

$$L^* = 10^6 \text{ 米}, \quad t^* = 10^5 \text{ 秒}, \quad U^* = L^*/t^* = 10 \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-1}, \quad \Phi^* = f_0 L^* u^* = 10^3 \text{ 米}^2 \cdot \text{秒}^{-2},$$

由此可得

$$\sigma = 0.1, \quad \mu^{-2} = 0.2.$$

这表明我们所考虑的是“深水”条件下的大尺度低速流中的慢波, 可压缩性较弱. 此外, 这里的 β 作用被人为地减小了.

取定零级近似中的自由参数

$$U = 1, \quad \phi_0 = 0.7, \quad m = n = 1,$$

可得

$$\begin{cases} \phi_0 = \psi_0 = -\eta + 0.7 \sin \xi \cdot \sin n\eta, \\ u_0 = -\frac{\partial \phi_0}{\partial \eta} = 1 - 0.7 \sin \xi \cos \eta, \\ v_0 = \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} = 0.7 \cos \xi \cdot \sin \eta, \end{cases} \quad (21)$$

及

$$c_0 \doteq 0.653. \quad (22)$$

由零级近似给出的高度场和风场在 $t = 0$ 时刻的分布, 见图 1, 其理论移速为 6.53 米·秒⁻¹, 理论周期约为 11 天.

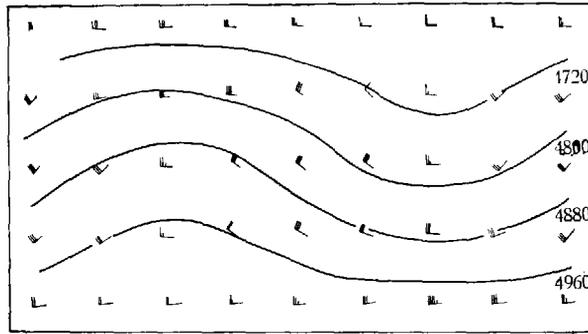


图 1 $t = 0$ 时刻零级近似的高度场和风场
(单位: 米)

取定一级修正中的自由参数 $U_1 = 1$, 可得

$$\begin{cases} \chi_1 = -0.047 \cos \xi \sin \eta - 0.002 \cos \xi \cdot e^\eta - 0.049 \cos \xi \cdot e^{-\eta}, \\ A_1 = -0.280\eta^2 + 0.196 \sin \xi \cos \eta + 0.392\eta \sin \xi \sin \eta \\ \quad + 0.122(\cos 2\xi + \cos 2\eta) - (0.002e^\eta + 0.049e^{-\eta}) \sin \xi, \\ \phi_1 = -\eta - 0.105\eta^2 - 0.012(\cos 2\xi + \cos 2\eta) + 0.047 \sin \xi \cos \eta \\ \quad + 0.386\eta \cdot \sin \xi \cos \eta - 0.123\eta^2 \sin \xi \cos \eta + 0.194\eta \sin \xi \sin \eta \\ \quad + (0.0001e^{\sqrt{2}\eta} + 0.012e^{-\sqrt{2}\eta}) \cos 2\xi + (0.002e^\eta - 0.049e^{-\eta}) \sin \xi, \end{cases} \quad (23)$$

及

$$c_1 \doteq 1.08. \quad (24)$$

(23)式中每一项的量级皆不超过 $O(1)$, 符合摄动法的量级原则, 表明参数的选取是合适的.

零级近似是无辐散的, 满足地转风关系, 而且没有非线性作用; 一级修正则是有辐散的、非地转的, 包含了零级近似和它自身之间的非线性作用. 由(23)式可算出

$$\Delta \chi_1 = 0.047 \cos \xi \sin \eta, \quad (25)$$

$$-\Delta A_1 = 0.56 - 0.588 \sin \xi \cos \eta + 0.392\eta \cdot \sin \xi \sin \eta + 0.488(\cos 2\xi + \cos 2\eta) \quad (26)$$

以及

$$\begin{aligned}
 & -J(\psi_0, \Delta\psi_1 - \mu^{-2}\psi_1) - J(\psi_1, \beta\eta + \Delta\psi_0 - \mu^{-2}\psi_0) - \nabla\chi_1 \cdot \nabla(\beta\eta + \Delta\psi_0 - \mu^{-2}\psi_0) \\
 = & 2.171 \cos \xi \sin \eta + 0.555\eta \cdot \cos \xi \cos \eta - 0.176\eta^2 \cos \xi \cos \eta \\
 & + 0.082\eta \cdot \cos \xi \sin \eta - (0.0004e^{\sqrt{2}\eta} + 0.0355e^{-\sqrt{2}\eta}) \sin 2\xi \\
 & + 0.036 \sin 2\xi \cos 2\eta,
 \end{aligned} \tag{27}$$

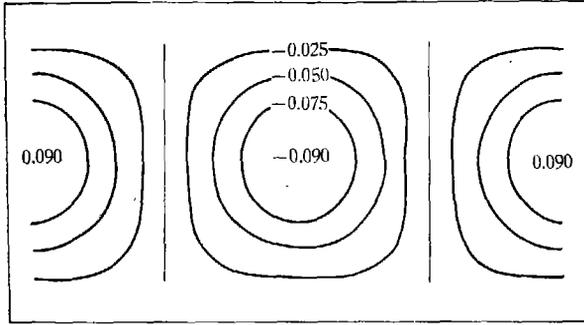


图 2 $t = 0$ 时刻一级近似的散度场
(单位: 10^{-6} 秒 $^{-1}$)

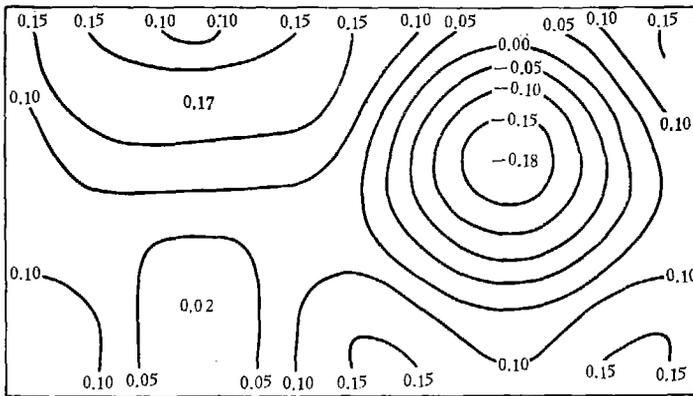


图 3 $t = 0$ 时刻一级近似的非地转涡度场
(单位: 10^{-5} 秒 $^{-1}$)

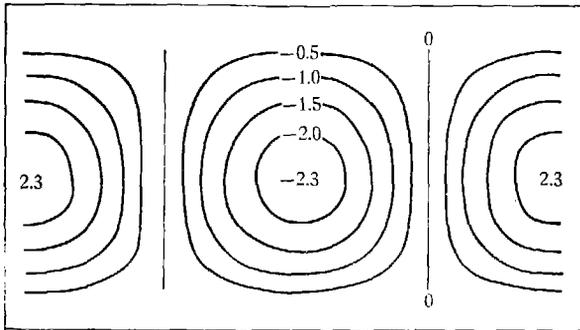


图 4 $t = 0$ 时刻一级近似位涡度平流分布
(单位: 10^{-11} 秒 $^{-1}$)

将它们分别乘以 ϵ/t^* , ϵ/t^* 和 ϵ/t^{*2} 就得到散度、非地转涡度(注意 $-\Delta A_1 = \Delta\phi_1 - \Delta\phi_1$) 和沿波动气流的位涡度平流。图 2—4 给出了它们在 $t = 0$ 时刻的分布。

同一级近似的涡度场 $\Delta(\phi_0 + \epsilon\phi_1) \cdot \frac{1}{t^*}$ (见图 5) 相比较可以看出, 散度比涡度小两个量级, 比通常的大尺度散度小一个量级; 就整体而言, 非地转涡度约占总涡度的 10%, 但在南北边界附近, 非地转涡度和地转涡度相当, 其作用是削弱以至抵消的地转风涡度; 沿波动气流的位涡度平流的分布和涡度场的平移演变趋势是一致的, 粗略的估算表明, 其作用可以达涡度平均变化率的 15% 左右。

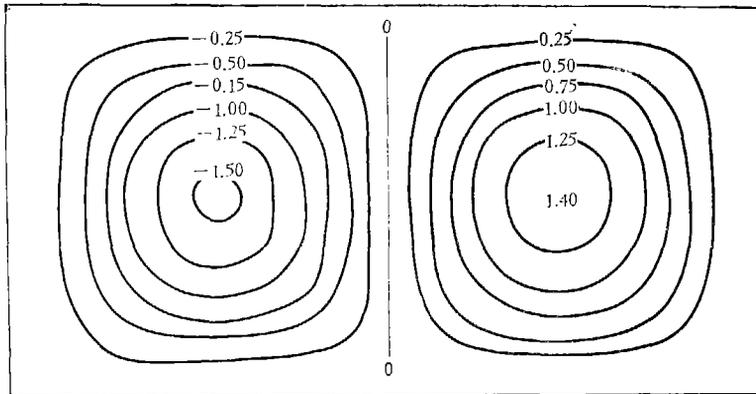


图 5 $t = 0$ 时刻一级近似的涡度场 (单位: 10^{-3} 秒 $^{-1}$)

在摄动法的量级原则所允许的范围内, 改变参数的取值, 上述诸特点仍然保持。

由一级近似

$$\phi_0 + \epsilon(\phi_1 + A_1), \quad u_0 + \epsilon\left(-\frac{\partial\phi_1}{\partial\eta} + \frac{\partial\chi_1}{\partial\xi}\right), \quad v_0 + \epsilon\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\xi} + \frac{\partial\chi_1}{\partial\eta}\right)$$

给出的 $t = 0$ 时刻的高度场和风场见图 6。其理论移速为 $(c_0 + \epsilon c_1) \cdot U^* = 7.61$ 米 \cdot 秒 $^{-1}$, 理论周期约为 9.5 天。可以看出, 一级近似对零级近似的修正是明显的: 高度修正量可达 70 米, 风的修正约为 1 米 \cdot 秒 $^{-1}$, 移速增大了 15%。

用摄动法所逼近的原始方程组(1)的特解(4)是一种沿 x 方向平移的非频散波, 然而从理论上讨论这种逼近的收敛性及误差估计是一件困难的事情。为此, 我们用数值试验的方法来

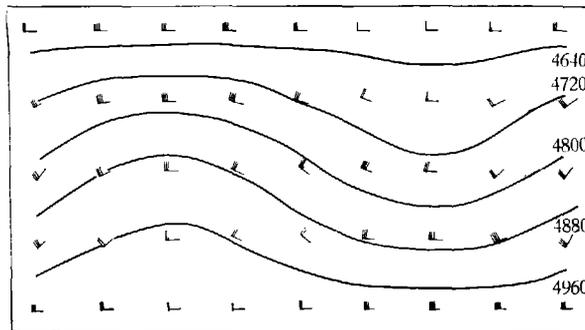


图 6 $t = 0$ 时刻一级近似的高度场和风场 (单位: 米)

研究其零级和一级近似的演变特性。

采用文献[11]中提出的完全保持能量守恒的差分格式，将 β 平面上的矩形区域

$$R: \{0 \leq x \leq 2\pi L^*, 0 \leq y \leq \pi L^*\}$$

离散化为网格区域

$$R_d: \{(x_i, y_j)_{i=0,1,\dots,32; j=0,1,\dots,16}\},$$

其中 $x_i = id, y_j = jd$ ，而格距

$$d = \frac{\pi L^*}{16} \doteq 196.35 \text{ 公里};$$

在 $i = 0, 32$ 处取周期边界条件，在 $j = 0, 16$ 处取刚壁边界条件，分别以 $t = 0$ 时刻零级近似和一级近似的格点值为初值，取 $\Delta t = 5$ 分钟，作了较长时间的积分。

1. 零级近似的数值试验

初值取为：

$$\begin{cases} \phi_{ij}^0 = \tilde{\phi} + \Phi^* \cdot \phi_0(x_i, y_j, 0), \\ u_{ij}^0 = -U^* \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial y}(x_i, y_j, 0), \\ v_{ij}^0 = U^* \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial x}(x_i, y_j, 0) \end{cases} \quad (28)$$

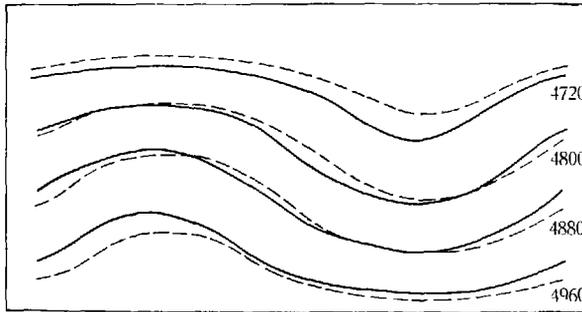


图 7 由零级近似初值积分到第 11 天时的高度场及其理论值(虚线)
(单位: 米)

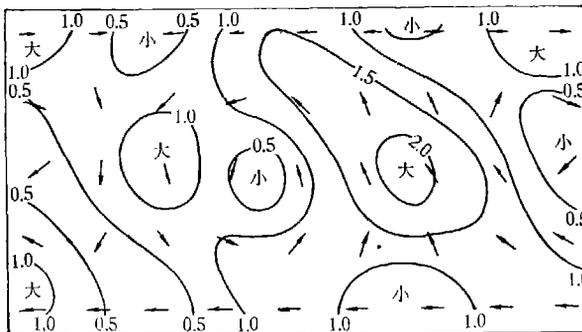


图 8 第 11 天时风的偏差向量
(单位: 米·秒⁻¹)

用上述格式积分了 13 天。

图 7 是积分到第 11 天时的高度场(虚线表示第 11 天的零级近似高度场)。可以看出,解的波形有比较明显的变化,与零级近似的差别最大可达 20—30 位势什米,但仍保持了零级近似的平移特点,平均移速约为 $6.30 \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-1}$,比理论值偏慢 $0.23 \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-1}$ 。图 8 给出了第 11 天模式输出的风与零级近似风的偏差向量,偏差风是系统性的,具有明显的非地转特点,风速可达 $2 \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-1}$ 。

2. 一级近似的数值试验

初值取为:

$$\begin{cases} \phi_{ij}^0 = \tilde{\phi} + \Phi^* \cdot [\phi_0 + \epsilon(\phi_1 + A_1)](x_i, y_j, 0), \\ u_{ij}^0 = U^* \cdot \left[-\frac{\partial}{\partial y} (\phi_0 + \epsilon\phi_1) + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial x} \right] (x_i, y_j, 0), \\ v_{ij}^0 = U^* \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} (\phi_0 + \epsilon\phi_1) + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial y} \right] (x_i, y_j, 0), \end{cases} \quad (29)$$

用同一格式积分了 22 天。

图 9 是积分到第 9.5 天时的高度场(虚线表示同一时刻一级近似的高度场),它与一级近似的最大偏差为 6 米,最大偏差风速为 $0.5 \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-1}$ 。按 16 天平均的移速为 $7.44 \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-1}$,比理论值偏慢 $0.17 \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-1}$ 。可以说,在较长时间的积分过程中,数值解很好地保持了一级近似的演变特性,这就证实,一级近似是正压原始方程一类非频散波解的良好近似。

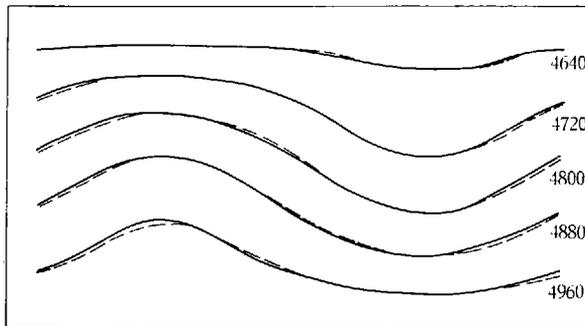


图 9 由一级近似初值积分到第 9.5 天时的高度场及其理论值(虚线)
(单位: 米)

同本节相比,上节的数值解与零级近似有较大的偏离。注意到它们是用同一格式、同样的空间分辨率和时间步长计算出来的,它们的初值相近(而且上节的初值中只含单一的波型),所以两种数值解中所包含的计算误差大体相同。由此就可以推断:这种偏离是由于零级近似与原始方程组的真解有较大的差别造成的。尽管如此,零级近似(亦即 Rossby 波)作为原始方程波解的一种初级近似,仍然是可取的。

真正的非频散解的总动能和总位能应当分别守恒,然而上节和本节给出的数值解的总动能和总位能,随时间却有小的振荡。图 10 给出了总动能随时间变化的曲线(由于总能量严格守恒,总位能的变化曲线是类似的)。本节的总动能振荡周期约为 7 小时,振幅约为总动能的

8/1000, 相当于每一格点上的风速改变 $0.05 \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-1}$; 上节的总动能振幅不小于 38/1000, 相当于每一格点上的风速改变 $0.22 \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-1}$.

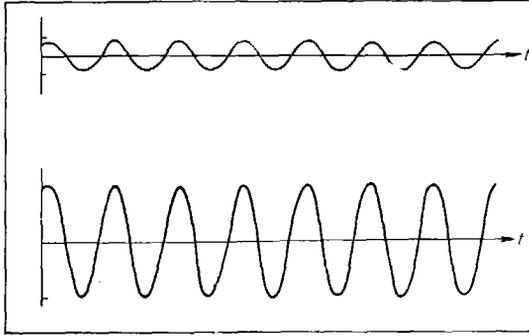


图 10 上节(上)和本节(下)的总动能变化曲线

显然, 这种现象反映了小振幅快波的存在. 前面的对比分析已经表明, 对于这种快波的激发和强弱来说, 差分格式的计算误差是次要因素, 而初值协调性的优劣则是主要因素: 上节中用的是地转风初值, 产生的快波较强; 本节中用的是平衡风(考虑了非地转涡度)加上适当的无旋风, 有效地减小了快波的振幅.

总之, 数值试验的结果表明: 正压大气中存在着一类非频散的大尺度慢波, 单个的 Rossby 波只是它的初级近似; 用摄动法求取线性波的一级乃至更高级的修正, 可以更精确地逼近这类波解; 具有一定的非地转涡度和少量的散度, 演变过程中受到较弱的非线性作用的制约, 是这类波动的特点.

参 考 文 献

- [1] Rossby, C. G., *J. Mar. Res.*, 2(1939), 38—55.
- [2] Haurwitz, B., *ibid.*, 3(1940), 254—267.
- [3] Williamson, D. L., *GARP Publications Series*, No. 17, *Numerical Methods Used in Atmospheric Models*, Vol. II, Chapter 2, 1979.
- [4] Ertel, H., *Z. Meteor.*, 60(1943), 332—334.
- [5] Craig, R. A., *J. Meteor.*, 2(1945), 173—178.
- [6] Thompson, P. D., *ibid.*, 5(1948), 166—168.
- [7] 曾庆存, 数值天气预报的数学物理基础, 第一卷, 第八章, §3, 科学出版社, 1979.
- [8] H. L. Kuo, *J. Meteor.*, 16(1959), 524—534.
- [9] 同[7], 第九章, §5.
- [10] 曾庆存、张学洪, 大气科学(待发表).
- [11] 曾庆存、张学洪, 中国科学, 1981, 11: 1355—1366.