真值递延法模糊推理插值器

闫建平[1*] 梁 怡[2]

(1. 北京师范大学计算机系, 北京 100875; 2. 香港中文大学地理系, 香港)

摘要 分析了已有模糊推理算法作为近似表达函数关系的方法应用时存在的缺陷, 给出了真值递延法模糊推理算法并证明了其具有保持被插函数单调性等良好性质. 最后, 讨论了把真值递延法也作为两种不同蕴涵算子下的全蕴涵三 I 算法的清晰化方法的合理性, 指出不同蕴涵算子下的全蕴涵三 I 算法和 CRI 模糊推理算法虽然在模糊输出集上存在差异, 但在采用真值递延法作为共同的清晰化方法后, 两类模糊推理算法在"精确输入-精确输出"响应关系下趋于统一.

关键词 模糊推理算法 插值算法 全蕴涵三 I 算法 真值递延法

作为两种近似表达函数关系的方法, 模糊推理算法与插值算法之间的联系在文献[1~3]中得到初步揭示. 文献[4]在分析模糊推理的插值型近似[1]的合理性时, 探讨了使模糊推理算法不是近似地而是准确地直接成为一种插值算法的意义、可能性及其实现, 提出了模糊推理插值器概念.

本文继续模糊推理插值器的研究, 寻找在单输入单输出情形下的新的清晰化方法, 以使所得到的模糊推理算法不仅是一种插值算法, 而且作为一种近似表达函数关系的方法应用时具有一些良好的性质.

1 CRI 方法下的模糊输出集及各种清晰化方法的分析

以下恒设输入、输出变量 x, y 的论域分别为 $X=[a, b]$, $Y=[c, d]$, 设模糊推理规则集

$$\text{If } x \text{ is } A_i(x), \text{ then } y \text{ is } B_i(y) \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

的输入论域 X 上基元 $A_1(x), A_2(x), \cdots, A_n(x)$分别以 $a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 为峰点; 输出论域 Y 上基元 $B_1(y), B_2(y), \cdots, B_n(y)$分别以 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为峰点.

采用文献[4]的概念和记号, 假设所涉及的模糊集基元均具有正规性[4], 即基

2004-11-25 收稿, 2005-04-11 收修改稿

* E-mail: jpyan@sohu.com

元均为隶属函数连续的单峰点模糊数,而且在峰点左(右)侧严格单调增(减); 假设每一论域上的模糊集基元组均具有模糊划分性质[1], 即, 对于(1)式, $\sum_{i=1}^{n} A_i(x)=\sum_{i=1}^{n} B_i(y)\equiv 1$. 这些假设在插值法中也是基本的, 如分段线性插值基函数即为正规的且在应用中的基函数组满足模糊划分性质. 在模糊推理中, 分段线性插值基函数也被用作为模糊集基元, 称为三角形基元, 或线性基元.

模糊推理算法与插值算法之间的联系是通过规则集与插值条件之间存在的内在、自然的联系建立起来的.

定义 1　对于给定的规则集(1), 称由(1)决定的输入、输出论域上基元的峰点间对应关系形成的二元组$\{(x_i, y_i) \mid i=1,2,\cdots,n.\}$是与规则集(1)相联系的插值条件.

定义 2　对于给定的插值条件$\{(x_i, y_i) \mid i=1,2,\cdots,n.\}$, 其中节点满足 $a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 称如下形成的规则集(1)是与$\{(x_i, y_i) \mid i=1,2,\cdots,n\}$相联系的规则集: (1)中输入论域上基元 $A_1(x), A_2(x), \cdots, A_n(x)$ 分别以$\{(x_i, y_i) \mid i=1,2,\cdots,n\}$的第一分量诸点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为峰点; 输出论域上基元 $B_1(x), B_2(x), \cdots, B_1(x)$ 对应地分别以第二分量诸点 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为峰点.

为使论述简单起见, 设所涉及的插值条件$\{(x_i, y_i) \mid i=1,2,\cdots,n\}$关于第二坐标是严格单调的, 即严格单调增: $c=y_1<y_2<\cdots<y_n=d$; 或严格单调减: $c=y_n<y_{n-1}<\cdots<y_1=d$ (非严格单调时可分段考虑).

$\forall x\in[a,b]$, Zadeh提出并被普遍接受的CRI (compositional rule of inference[5]) 模糊推理算法确定的规则集(1)下对应于精确输入 x 的模糊输出响应 $B(y)$ 为(在Mamdani蕴涵算子下):

$$B(y)=\mathop{\vee}_{i=1}^{n}[A_i(x)\wedge B_i(y)]. \tag{2}$$

对 $B(y)$ 的解析分析有助于理解各种清晰化方法的意义.不失一般性, 设 $x_i\le x\le x_{i+1}$, 此时, 在对基元所做的假设下,

$$B(y)=[A_i(x)\wedge B_i(y)]\vee[(A_{i+1}(x)\wedge B_{i+1}(y)]. \tag{3}$$

当与(1)相联系的插值条件关于第二坐标严格单调增且 $A_i(x)\le 0.5$ 时, $B(y)$ 为如下分段定义的隶属函数:

$$B(y)=\begin{cases} B_i(y), & y_{i-1}\le y\le p.\\ A_i(x), & p\le y\le q.\\ B_{i+1}(y), & q\le y\le \overline{y}.\\ A_{i+1}(x), & \overline{y}\le y\le r.\\ B_{i+1}(y), & r\le y\le y_{i+2}.\\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{4}$$

其中，分点 $p,q,\overline{y},r$ 由输入 x 惟一决定:

$$\begin{cases} B_i(p)=A_i(x); & y_{i-1}\le p\le y_i.\\ B_{i+1}(q)=A_i(x); & y_i\le \mathrm{q}\le y_{\mathrm{i+1}}.\\ B_{i+1}(\overline{y})=A_{i+1}(x); & y_i\le \overline{y}\le y_{\mathrm{i+1}}.\\ B_{i+1}(r)=A_{i+1}(x); & y_{i+1}\le r\le y_{i+2}. \end{cases} \tag{5}$$

输出论域上取线性基元时的 $B(y)$ 的图形如图 1 所示.

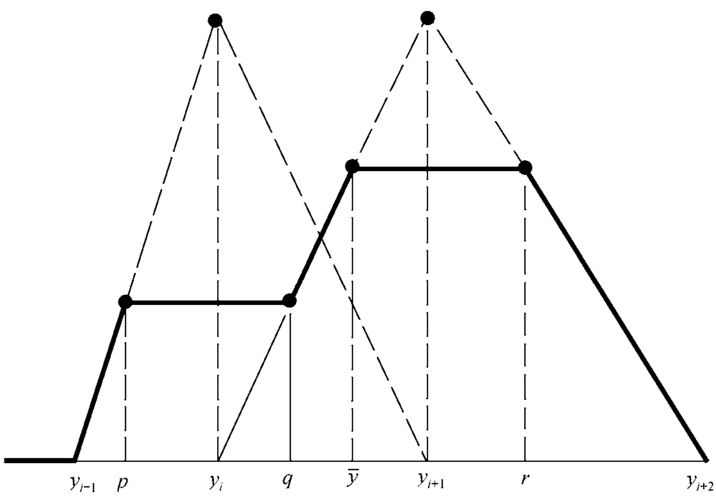

图 1

当与(1)相联系的插值条件关于第二坐标严格单调减而仍然有 $A_i(x)\le 0.5$ 时，分段定义的 $B(y)$ 如图 2 所示，解析表达式成为

$$B(y)=\begin{cases} B_i(y), & y_{i-1}\ge y\ge p.\\ A_i(x), & p\ge y\ge q.\\ B_{i+1}(y), & q\ge y\ge \overline{y}.\\ A_{i+1}(x), & \overline{y}\ge y\ge r.\\ B_{i+1}(y), & r\ge y\ge y_{i+2}.\\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{6}$$

其中，分点 $p,q,\overline{y},r$ 由输入 x 惟一决定:

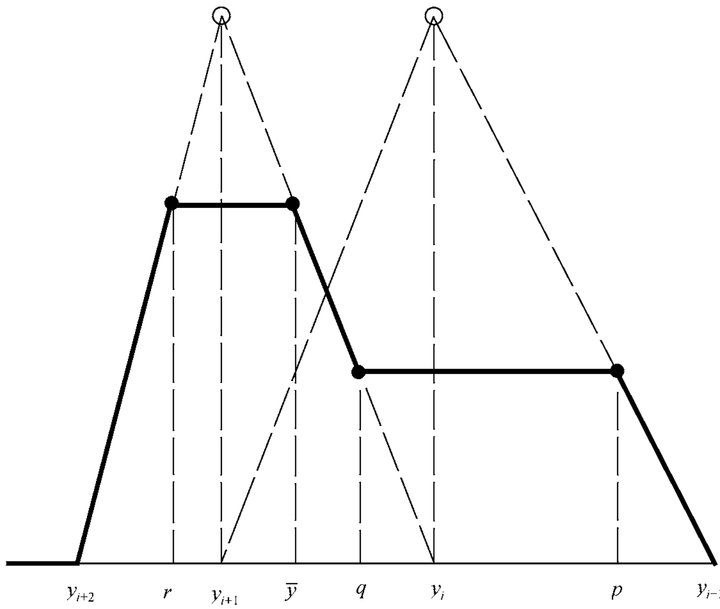

图 2

$$\begin{cases} B_i(p) = A_i(x); & y_{i-1} \geq p \geq y_i. \\ B_{i+1}(q) = A_i(x); & y_i \geq q \geq y_{i+1}. \\ B_{i+1}(\bar{y}) = A_{i+1}(x); & y_i \geq \bar{y} \geq y_{i+1}. \\ B_{i+1}(r) = A_{i+1}(x); & y_{i+1} \geq r \geq y_{i+2}. \end{cases} \tag{7}$$

对于 $A_i(x) > 0.5$ 情形时的 $B(y)$ 可类似讨论.

采用重心法(在 Matlab 软件中称之为 centroid, 下同)清晰化方法的 Mamdani 模糊推理模型对应精确输入 x 的精确输出为

$$y = \int_{y\in Y} y \cdot B(y)\mathrm{d}y \Big/ \int_{y\in Y} B(y)\mathrm{d}y. \tag{8}$$

类似于重心法, “形心法”(bisector)取二等分$B(y)$所围面积的点y作为对应x的精确输出, 二者基于相类似的加权综合原理.另一类有应用价值的清晰化方法则是在“最大隶属原则”下, 即在$B(y)$达到最大隶属度的诸点中, 取某点y作为对应x的精确输出[6], 正如其名称所揭示的那样, 这些方法有“中心法”(mom, 达到最大隶属度诸点的平均值)、“最小值法”(som, 达到最大隶属度诸点的绝对值的最小值)、“最大值法”(lom, 与最小值法相反)等.

然而, 当我们分析由这些清晰化方法所确定的输入输出函数关系 $y=y(x)$在整个$[a, b]$上的表现时, 发现它们都存在着某些缺陷, 而不适合作为一种近似表达函数关系的方法应用.如:

1) 重心法模糊推理算法当且仅当其蜕化为简略推理法[1]时其输入输出关系才满足与其规则集相联系的插值条件[4]. 如, 即使插值条件满足简单的线性关系, 但当节点不等距选取时重心法也不是插值法(图 3). 类似地, 形心法也不是插值法.

2) 中心法、最小值法、最大值法虽然是插值法, 但它们在[a, b]上都是不连续的, 形成跳跃型间断(图 4 为最大值法模糊推理算法确定的输入输出函数关系).

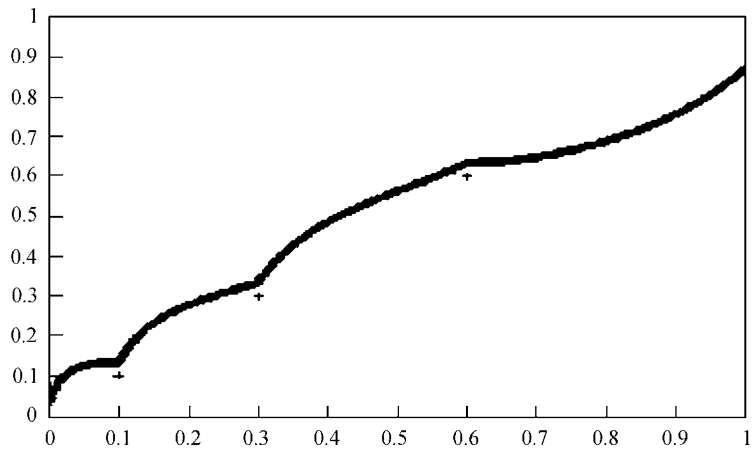

图 3

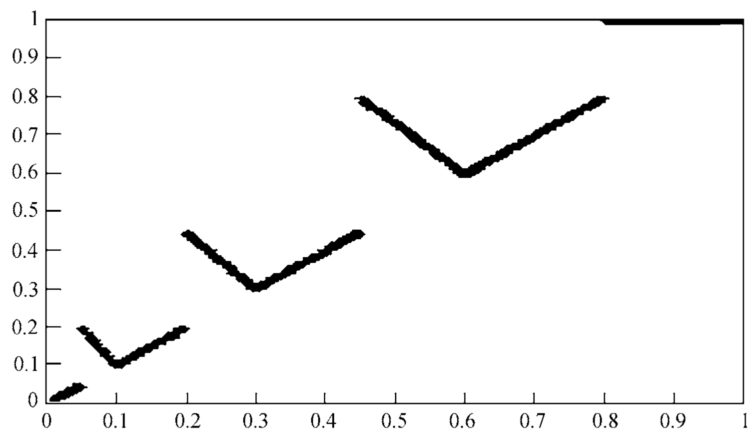

图 4

注 1　图 3 和 4 均由 Matlab 软件中的 Fuzzy Logic Toolbox 生成, 其中论域取 $[a,b]=[c,d]=[0,1]$, 插值条件取满足简单的线性关系 $y=x$ 的点集 $\{(0,0),(0.1,0.1),(0.3,0.3),(0.6,0.6),(1,1)\}$, 输入、输出论域上模糊集基元都取线性基元.

正是在肯定CRI方法确定的模糊输出集 $B(y)$ 是合理的, 而现有各种清晰化方法是不恰当的基础上, 文献[4]提出了应该寻找其他表现更好的清晰化方法, 以使模糊推理算法所确定的输入输出函数关系既满足与规则集相联系的插值条件, 又具有良好的函数逼近性质.其中的模糊推理插值器概念即要求: 对于每一推理规则集, 由该模糊推理算法所决定的输入输出关系都满足与规则集相联系的插值条件.

2　真值递延法模糊推理算法

本文给出的真值递延法模糊推理算法看作一种清晰化方法即是取模糊输出集 $B(y)$ 的图形中重要的竖直线 $y=\bar{y}$ 所对应的分段点 $\bar{y}$ 作为对应精确输入 x 的精确输出.

在规则集(1)下, 对应 $x_i \le x \le x_{i+1}$ 的 $\bar{y}$ 也可直接由

$$\bar{y}\in\left[(y_i \wedge y_{i+1}),\ (y_i \vee y_{i+1})\right],\ B_i(\bar{y})=A_i(x) \tag{9}$$

确定. 在本文关于基元的假设下, 由于在 $[(y_i \wedge y_{i+1}),(y_i \vee y_{i+1})]$ 上 $B_i(y)$ 存在反函数, 故(9)式也可以表示为

$$\bar{y}\in\left[(y_i \wedge y_{i+1}),\ (y_i \vee y_{i+1})\right],\quad \bar{y}=B_i^{-1}\left(A_i(x)\right). \tag{9′}$$

定义 3　在规则集(1)下, 称由(9)式确定的输入输出关系 $\bar{y}=\bar{y}(x)$ 为真值递延法模糊推理算法.

在本文所做的关于基元的假设下, $\bar{y}$ 存在而且惟一.

定理 1　真值递延法具有以下性质:

1) 真值递延法是插值法, 即其输入输出关系满足由规则集的前、后件峰点对应关系决定的插值条件;

2) 真值递延法遵守“最大隶属原则”, 即 $\bar{y}$ 使 $B(y)$ 达到最大隶属度;

3) 真值递延法确定的函数关系 $\bar{y}=\bar{y}(x)$ 关于 x 在论域 $[a,b]$ 上是连续的;

4) 当在输出论域上取线性基元时, 真值递延法对应 $x_i \le x \le x_{i+1}$ 的输出 $\bar{y}$ 成为 $\bar{y}=y_i\cdot A_i(x)+y_{i+1}\cdot A_{i+1}(x)=\sum_{j=1}^{n} y_j\cdot A_j(x)$, 即成为简略推理法, 亦即分段插值法. 故真值递延法是分段插值法满足插值条件的推广;

5) $\forall x\in[a,b]$, 真值递延法对应 x 的输出响应 $\bar{y}$ 吻合每条推理规则后件的真值 $B_j(\bar{y})$ 都等于 x 吻合相应推理规则前件的真值 $A_j(x)$, 即 $B_j(\bar{y})=A_j(x)\ (j=1,2,\cdots,n)$, “递延”的意义即在于此;

6) $\forall x\in[a,b]$, 满足 5)的 $\bar{y}$ 为惟一的, 即

$$\forall y \in Y, \forall j\ (1 \le j \le n), B_j(y) = A_j(x) \Leftrightarrow y = \bar{y};$$

7) 当所联系的插值条件关于第二坐标严格单调增(或减)时, 真值递延法实现的输入输出函数关系也是严格单调增(或减)的.

证 1) 在规则集(1)下, 当输入 $x = x_i$ 时, $A_i(x) = A_i(x_i) = 1$ 且对应 x_i 的模糊输出集 $B(y) = B_i(y)$. 由 $B_i(y)$ 的单峰点性, 只有 $B_i(y_i) = 1 = A_i(x_i)$, 故真值递延法对应 x 的 $\bar{y} = y_i$.

2) 当 $x_i \le x \le x_{i+1}$ 时, 由(4)式或(6)式, 对应 x 的模糊输出集 $B(y)$ 的最大隶属度为 $A_i(x) \vee A_{i+1}(x)$, 而由(5)式或(7)式, $B_i(\bar{y}) = A_i(x), B_{i+1}(\bar{y}) = A_{i+1}(x)$, 故由(3)式, $B(\bar{y}) = [A_i(x) \wedge B_i(\bar{y})] \vee [(A_{i+1}(x) \wedge B_{i+1}(\bar{y})] = A_i(x) \vee A_{i+1}(x)$, 即 $\bar{y}$ 使 $B(y)$ 达到最大隶属度.

3) 由基元的假设及 $\bar{y} = B_i^{-1}[A_i(x)]$, 显然 $\bar{y} = \bar{y}(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续的.

4) 当在输出论域上取线性基元且 $x_i \le x \le x_{i+1}$ 时, $B_i(\bar{y}) = \dfrac{\bar{y} - y_{i+1}}{y_i - y_{i+1}}$, 故

$$\bar{y} = y_i \cdot A_i(x) + y_{i+1} \cdot \big(1 - A_i(x)\big) = y_i \cdot A_i(x) + y_{i+1} \cdot A_{i+1}(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot A_j(x).$$

由真值递延法的定义(9), 性质 5)、6)显然.

7) 以单调减情形为例给出证明, 单调增时类证.

事实上, 当插值条件 $\{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \cdots, n.\}$ 满足 $y_1 > y_2 > \cdots > y_n$, 且 $x_i \le x \le x_{i+1}$ $(1 \le i \le n-1)$ 时, 真值递延法对应 x 的输出 $\bar{y}$ 显然满足 $y_{i+1} \le \bar{y} \le y_i$.

对于 $x', x'' \in [a, b]$, $x' < x''$, 设真值递延法对应 x', x'' 的输出分别为 $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$.

当存在某个 $i\ (1 \le i \le n-1)$, $x_i \le x' < x'' \le x_{i+1}$ 时, 因 $A_i(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上严格单调减, 故 $A_i(x') > A_i(x'')$. 如此则 $B_i(\bar{y}_1) = A_i(x') > A_i(x'') = B_i(\bar{y}_2)$. 而 $B_i(y)$ 在 $[y_{i+1}, y_i]$ 上严格单调增, 故 $\bar{y}_1 > \bar{y}_2$.

当存在某节点 x_k ,使 $x' \le x_k < x''$ 时, 显然更有 $\bar{y}_1 \ge y_k > \bar{y}_2$.

注 **2** ①当被插函数单调时, 重心法模糊推理算法所实现的输入输出响应关系是否也单调呢？即使在线性基元组下也很难回答这一问题; ②由 4), 简略推理法也具有保持被插函数单调性的性质; ③即使只对简略推理法来说, 保持被插函数单调性这一性质在插值法中也不是平凡的. 因为尽管简略推理法就是以模糊数隶属函数作为插值基函数的一类分段插值法, 但一般的分段插值法不成立所述性质, 而只有某些特殊类型的分段插值法, 如分段线性插值法才成立所述性质. 又文献中也未见到与这一性质有关的研究.

3　真值递延法作为全蕴涵三 I 算法清晰化方法的讨论

全蕴涵三I算法[7,8]从建立模糊命题演算形式系统出发, 以逻辑语义蕴涵理论为基础探讨模糊推理的更合适的理论框架, 尝试弥补CRI模糊推理的缺陷.文献[7]特别指出CRI方法在得出模糊输出集 $B(y)$ 时所采用的关系合成方法不仅偏离了语义蕴涵的框架, 而且不是关系再现算法, 即把作为规则前件的模糊集 $A_i(x)$ 在输入论域上当作“模糊输入”输入时, CRI方法下输出论域上的对应的“模糊输出”未必等于 $B_i(y)$.

简记单条规则“ if x is $A_i(x)$, then y is $B_i(y)$ ”为 $A_i(x)\to B_i(y)$. 之所以采用 $A_i(x)$, $B_i(y)$ 记号而不采用文献[7]中的$A(x)$, $B(y)$记号是便于继续直接使用真值递延法(9)式中的记号 $\bar{y}$.

对于模糊集 $A^*(x)$, 全蕴涵三 I 算法认为: 对应于“模糊输入”$A^*(x)$的比 CRI 方法更合理的模糊输出集 $B^*(y)$应为使

$$\left(A_i(x)\to B_i(y)\right)\to\left(A^*(x)\to B^*(y)\right)\tag{10}$$

成为重言式的输出论域 Y 上的最小模糊集 $B^*(y)$.

文献[7, 8]着重探讨了两种蕴涵算子下的全蕴涵三 I 算法, 一种即Lukasiewicz蕴涵算子

$$R_L:[0,1]^2\to[0,1],\quad R_L(a,b)=(1-a+b)\wedge 1,$$

另一种即

$$R_0:[0,1]^2\to[0,1],\quad R_0(a,b)=\begin{cases}1, & a\le b,\\ (1-a)\vee b, & a>b.\end{cases}$$

可以看出, 文献[7]所强调的关系再现要求在“精确输入-精确输出”情形下即为满足插值要求. 由于应用中最终要实现的输入-输出关系总是“精确输入-精确输出”, 而全蕴涵三 I 算法的研究重点在形成模糊输出集的逻辑语义蕴涵机制上, 因而并未涉及全蕴涵三 I 算法的进一步的清晰化处理. 以下我们讨论对全蕴涵三 I 算法应用真值递延法进行清晰化处理的意义.

同样地, 对于清晰化前的模糊输出集的理解是至关重要的.先解析分析在单条规则 $A_i(x)\to B_i(y)$ 下全蕴涵三 I 算法对应精确输入 $x_0\in[x_i,x_{i+1}]$ 的模糊输出集. 采用以 $\{x_0\}$ 的特征函数 $\chi(x)=\begin{cases}1, & x=x_0,\\ 0, & x\ne x_0\end{cases}$ 作为模糊化输入的方法, 在 R_0 算子下, 由于 $E_y=\left\{x\in X\,\middle|\,1-\chi(x)<R_0\left(A_i(x),B_i(y)\right)\right\}=\{x_0\}$, 故在 R_0 算子下的模糊输出集 $B_0^*(y)$ 为[7]

$$B_0^*(y)=\sup_{x\in E_y}\left[\chi(x)\wedge R_0\left(A_i(x),B_i(y)\right)\right]=R_0\left(A_i(x_0),B_i(y)\right). \tag{11}$$

在R_L算子下，全蕴涵三 I 算法对应输入x_0的模糊输出集 $B_L^*(y)$ 为[8]

$$\begin{aligned}B_L^*(y)&=\sup_{x\in X}\left[\chi(x)+R_L\left(A_i(x),B_i(y)\right)-1\right]\vee 0=R_L\left(A_i(x_0),B_i(y)\right)\\&=\left(1-A_i(x_0)+B_i(y)\right)\wedge 1.\end{aligned}$$

显然，由 R_0, R_L 的定义可以看出，$B_0^*(y), B_L^*(y)$ 的隶属函数都为分段定义的，且由真值递延法确定的对应输入 x_0 的满足 $A_i(x_0)=B_i(\bar{y})$ 的输出 $\bar{y}$ 在 $B_0^*(y), B_L^*(y)$ 中都是关键分段点，故把真值递延法作为全蕴涵三 I 算法的清晰化方法有其明确的几何意义．我们把真值递延法对应于输入 x_0 的输出 $\bar{y}$ 作为在两种蕴涵算子下的全蕴涵三 I 算法的共同的“清晰化”输出的合理性及意义综合在下述定理中:

定理 2 真值递延法作为全蕴涵三 I 算法的清晰化方法，具有以下性质:

1) 真值递延法是全蕴涵三 I 算法在“最大隶属原则”下的清晰化方法，即 $\bar{y}$ 使 $B_0^*(y)$，$B_L^*(y)$ 达到最大隶属度;

2) 真值递延法使全蕴涵三 I 算法在实现了“模糊输入-模糊输出”下的关系再现的基础上，更进一步实现了“精确输入-精确输出”下的关系再现，即真值递延法也使全蕴涵三 I 算法成为插值算法;

3) 全蕴涵三 I 算法和 CRI 算法这两类模糊推理算法在模糊输出集上存在的差异在采用真值递延法作为共同的清晰化方法后不复存在，两类算法最终在“精确输入-精确输出”响应关系下归于统一.

证 由前述 $B_0^*(y)$，$B_L^*(y)$ 的表达式, 1)显然.

2)全蕴涵三 I 算法的设计已经使其实现了“模糊关系再现”，即不施行清晰化前，当输入为规则“ if x is $A_i(x)$, then y is $B_i(y)$ ”的前件 $A_i(x)$ 时，输出即为规则的后件 $B_i(y)$．更有，全蕴涵三 I 算法也实现了“精确输入-模糊输出”下的关系再现，即当输入为规则前件 $A_i(x)$ 的峰点 x_i 时，输出也为规则的后件 $B_i(y)$ (显然 CRI 方法亦然)．在采用真值递延法作为全蕴涵三 I 算法的清晰化方法后，因为对应输入 x_i 的模糊输出集 $B_0^*(y)=B_L^*(y)=B_i(y)$ ，故在真值递延法“清晰化”后，对应输入 x_i 的精确输出恰为 y_i，即也实现了“精确输入-精确输出”下的关系再现.

3)对于两种蕴涵算法下的全蕴涵三 I 算法及 CRI 算法，都采用真值递延法作为清晰化方法时，对应于区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上精确输入 x_0 的精确输出都是输出论域上区间 $[(y_i\wedge y_{i+1}), (y_i\vee y_{i+1})]$ 中满足 $A_i(x_0)=B_i(\bar{y})$ 的惟一的点 $\bar{y}$，故清晰化结果是同一的，两类算法在真值递延法清晰化下归于统一.

参 考 文 献

1 李洪兴. 模糊控制的插值机理. 中国科学, E 辑, 1998, 28(3): 259~267
2 李洪兴. 模糊逻辑系统与前向式神经网络等价. 中国科学, E辑, 2000, 30(2): 150~163 [PDF]
3 李洪兴. 变论域自适应模糊控制器. 中国科学, E 辑, 1999, 29(1): 32~42
4 闫建平. 模糊推理插值器. 模糊系统与数学, 2004, 18(专辑): 284~287
5 Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans Systems, Man and Cybernet, 1973, 1: 28~44
6 陈永义. 模糊控制技术及应用实例. 北京: 北京师范大学出版社, 1993. 26~45
7 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法. 中国科学, E 辑, 1999, 29(1): 43~53
8 王国俊. 三I方法与区间值模糊推理. 中国科学, E辑, 2000, 30(4): 331~340 [摘要] [PDF]