平面系统的随机稳定性

献给严加安院士 80 华诞

陈立锋¹, 董昭^{2,3*}, 蒋继发¹

1. 上海师范大学数理学院, 上海 200234;

2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;

3. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049

E-mail: lfchen@shnu.edu.cn, dzhao@amt.ac.cn, jiangjf@shnu.edu.cn

收稿日期: 2020-12-03; 接受日期: 2021-02-03; 网络出版日期: 2021-11-25; * 通信作者

中国科学院随机复杂结构与数据科学重点实验室 (批准号: 2008DP173182) 和国家自然科学基金 (批准号: 11771295, 11431014, 11931004, 12001373 和 11371252) 资助项目

摘要 本文首先研究了确定性平面系统的双曲极限环在加法噪声扰动下的随机稳定性; 其次考察了一类平面“拟 Hamilton”系统在随机扰动下的稳定性, 并指出结构稳定性系统与非结构稳定性系统的随机稳定性具有显著差异.

关键词 随机稳定性 不变概率测度 弱收敛极限 结构稳定性

MSC (2020) 主题分类 34C25, 37C40, 60H10, 60B10

1 引言

研究确定性系统受随机小扰动后生成 Markov 过程的不变概率测度的弱收敛极限性态, 这个著名问题由 Kolmogorov 在 20 世纪 50 年代提出 (参见文献 [1]). 该问题可用来反映确定性系统在随机扰动下的稳定性 (参见文献 [2, 3]). 等价地, 弱收敛的极限测度蕴含着某种适当的随机稳定性. 同样地, Zeeman^[4] 于 1988 年在研究动力系统的稳定性时本质上就是采取如上方式, 添加 ϵ - 扩散, 通过研究不变概率测度的密度函数所满足的平稳 Fokker-Planck 方程的渐近性态来定义动力系统的稳定性. 这也就是说, 研究受随机小扰动微分方程的不变概率测度的极限性态意味着研究随机稳定性. 这方面的研究起始于 Pontryagin 等^[5] 在 1933 年的工作, 他们在标量方程受加法噪声扰动的条件下证明了, 当噪声趋于 0 时, 弱收敛极限测度集中在位势函数的最低点. Nevel'son^[6] 和 Khasminskii^[7, 8] 分别在圆周和环面上研究了同样的问题. Khasminskii^[7] 首先发现了极限测度关于漂移向量场生成的解流是不变的 (参见文献 [1]). Freidlin 和 Wentzell^[9] 研究了受加法噪声扰动的梯度系统, 利用 Laplace 方法得到了不变概率测度的极限测度支撑在位势函数的最低点. 进一步, Freidlin 和 Wentzell^[9] 还研究了更一

英文引用格式: Chen L F, Dong Z, Jiang J F. Stochastic stability of two-dimensional systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1717–1730, doi: 10.1360/SSM-2020-0337

般的耗散系统, 利用他们所创立的大偏差原理得到, 当噪声强度 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 随机扰动系统的不变概率测度 μ^ϵ 在 D 上有 $\mu^\epsilon(D) \rightarrow 0$, 其中 D 是与未扰动系统的全局吸引子不相交的任意集合. 最近, Huang 等利用他们在文献 [10] 中发展的水平集方法和 Lyapunov 函数方法, 在文献 [11] 中证明了在非退化噪声扰动下的不变概率测度的弱收敛极限测度是未扰动系统的不变测度, 且其支撑在未扰动系统的全局吸引子上. 文献 [12] 中研究了受白噪声或 Lévy 噪声扰动的各类耗散的发展方程, 并得到了极限测度是未扰动系统所生成半流的不变测度且其支撑在 Birkhoff 中心, 此集合是由回复点所构成集合的闭包. 换句话说, Birkhoff 中心 (或全局吸引子) 仅仅是研究随机稳定性的起点. 更重要的是, 明确哪些回复运动是极限测度的支撑集, 称这类集合是随机稳定集. 也就是说, 需进一步研究极限测度精细的支撑结构. Huang 等^[11] 研究了这类问题, 并证明了极限测度在双曲排斥奇点上的测度为 0. 随后, 文献 [13] 通过 Huang 等^[10, 11] 发展的水平集和 Lyapunov 函数方法推广了文献 [11, 定理 4.2], 并给出了不变概率测度的极限测度在具有 Lebesgue 零测度的排斥子上测度为 0 的判别准则. 这里的排斥子可以是奇点、周期轨和拟周期轨等. 进一步, 我们构造了一些非平凡的例子说明极限测度在排斥奇点、排斥周期轨和排斥拟周期轨上的测度为 0, 并得到极限测度的支撑集落在稳定奇点集、稳定周期轨集、稳定拟周期轨集和鞍点集. 值得注意的是, 这些例子的构造具有很强的技巧性. 这是由于周期轨和拟周期轨等这些回复运动往往是定性存在的, 并无显式表达式, 要构造此类回复运动的反 Lyapunov 函数并不容易. 这也是与奇点情形最显著的差异.

或许有人认为随机稳定集至少在 Lyapunov 意义下是稳定的, 其实不然. 鞍点在 Lyapunov 意义下是不稳定的, 文献 [12] 研究了一类受非退化噪声扰动的 Bernoulli 双纽线系统并证明了极限测度就是支撑在单个鞍点上的 Dirac 测度. 同样的情形还可以参见本文例 4.1. 这类情形表明鞍点是随机稳定集. 虽然鞍点和双曲排斥奇点在 Lyapunov 意义下都是不稳定的, 但是它们在随机稳定性上可表现出不同的性态. 本文的目的之一就是揭示极限测度支撑在鞍点上这类情形的发生机制, 与未扰动系统的结构稳定性相关. 本文余下内容的安排如下: 第 2 节给出基本假设、随机稳定性的定义以及部分已知的结果; 第 3 节在双曲极限环不稳定这个基本假设下, 证明极限测度在此极限环上的测度为 0; 第 4 节利用定义的“拟 Hamilton”向量场构造一些具体的非平凡例子, 说明结构稳定系统与结构不稳定系统在非退化噪声扰动下的随机稳定性具有明显的差异.

2 基本假设与已有结论

考虑 d 维随机微分方程

$$dX_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon)dt + \epsilon\sigma(X_t^\epsilon)dW_t, \quad X_0^\epsilon = x \in \mathbb{R}^d, \quad (2.1)$$

其中, $\epsilon > 0$ 是小参数, $b: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ 是 Borel 可测的, W_t 是 m 维标准 Wiener 过程. 称 $b = (b_1, \dots, b_d)^\top$ 是漂移向量场, $d \times d$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{d \times d} = \sigma\sigma^\top$ 是扩散矩阵. 为了下文讨论方便, 总假定系数 a_{ij} 和 b_i 都是局部 Lipschitz 连续的. 设 (2.1) 对应的未扰动系统 (即 (2.1) 中 $\epsilon = 0$) 为

$$\frac{dx}{dt} = b(x), \quad x(0) = x \in \mathbb{R}^d, \quad (2.2)$$

并记此确定性系统 (2.2) 的解流为 $\Phi_t(x)$.

下面先给出随机稳定集的定义, 再介绍结构稳定性的定义及等价刻画.

设 $\mathcal{J}^\epsilon$ 是由随机微分方程 (2.1) 产生的 Markov 过程的所有不变概率测度集. 记集族 $\mathcal{I} := \{\mathcal{J}^\epsilon :$

$\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ 和 $\mathcal{M} := \{\mu : \text{存在一列 } \epsilon_i \rightarrow 0 \text{ 使得 } \mu^{\epsilon_i} \xrightarrow{w} \mu, \mu^{\epsilon_i} \in \mathcal{J}^{\epsilon_i}\}$. 根据文献 [3, 4, 8, 11] 关于随机稳定性的讨论, 给出如下随机稳定集的定义.

定义 2.1 (随机稳定集) 设 K 是非空紧的不变集 ($\Phi_t K = K$). 若对任意的 $\mu \in \mathcal{M}$ 都有 $\mu(K) > 0$, 则称 K 关于 (2.1) 是随机稳定的; 否则, 称 K 关于 (2.1) 是随机不稳定的. 进一步, 若 K 中无不变真子集是随机稳定的, 则称 K 是真随机稳定集.

关于结构稳定性的定义及等价描述可参见文献 [14].

定义 2.2 (拓扑等价) 对于 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 上的两个系统

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.3)$$

$$\dot{y} = g(y), \quad (2.4)$$

如果存在一个同胚映射 $h: \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$, 使得 h 将 (2.3) 在 $\mathcal{D}_1$ 上的轨线保向地映到 (2.4) 在 $\mathcal{D}_2$ 上的轨线, 那么称 (2.3) 与 (2.4) 拓扑等价, 或称向量场 f 和 g 拓扑等价, 记作 $f \sim g$.

设 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ 是有界闭区域且具有光滑边界. 令 $\mathcal{X}^1(\mathcal{D})$ 为 $\mathcal{D}$ 上与 $\partial\mathcal{D}$ 横截的 C^1 向量场的全体. 进一步, 赋予 C^1 模:

$$\|f - g\| = \|f - g\|_\infty + \|Df - Dg\|_\infty,$$

其中 $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathcal{D}} |f(x)|$. $\mathcal{N}_\delta^1(f)$ 表示 $\mathcal{X}^1(\mathcal{D})$ 中在 C^1 模下以 f 为中心的 δ 邻域.

定义 2.3 (结构稳定) 称动力系统 f 在 $\mathcal{X}^1(\mathcal{D})$ 中结构稳定, 若存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $g \in \mathcal{N}_\delta^1(f)$, 都有 $g \sim f$.

下面是著名的 C^1 结构稳定性定理.

定理 2.1 (2 维结构稳定性定理) $f \in \mathcal{X}^1(\mathcal{D})$ 是结构稳定的当且仅当 f 在 $\mathcal{D}$ 上的奇点和闭轨线的数目都是有限的、双曲的, 且没有从鞍点到鞍点的连接轨线.

定理 2.1 是 Andronov 和 Pontryagin^[15] 于 1937 年在 f 解析条件下提出的. DeBaggis^[16] 于 1952 年将解析减弱为 C^1 . Peixoto^[17] 于 1962 年推广到 2 维紧致光滑流形上. 由于下面仅讨论耗散向量场, 故可直接用定理 2.1 来判断向量场的结构稳定性. 对于 $\mathbb{R}^2$ 上的非耗散向量场, 可用 Poincaré 变换紧化到球面, 然后用 Peixoto^[17] 的结果来判断.

算子 $\mathcal{L}^\epsilon$ 的定义如下:

$$\mathcal{L}^\epsilon := \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

并且记 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^1$.

下面的定理表明, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 不变概率测度的弱收敛极限均关于解流是不变的并且得到它们的支撑情况.

定理 2.2 (参见文献 [12, 定理 3.1]) 设扩散矩阵 A 在 $\mathbb{R}^d$ 上处处正定. 假定存在一个 $\mathbb{R}^d$ 上的非负 C^2 标量函数 V 和 $\epsilon_0 > 0$ 使得

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty \quad \text{和} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathcal{L}^\epsilon V(x) = -\infty \quad (2.5)$$

关于 $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ 是一致的. 那么对每个 $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, 随机扰动系统 (2.1) 具有唯一的不变概率测度 μ^ϵ , 且该测度族 $\mathcal{I} := \{\mu^\epsilon : \epsilon \in (0, \epsilon_0]\}$ 是胎紧的. 进一步, 对任意的 $\mu \in \mathcal{M}$, 都有 μ 是 Φ 的不变测度且 $\text{supp}(\mu) \subset B(\Phi)$, 其中 $B(\Phi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : x \in \omega(x)\}}$ 称为 Φ 的 Birkhoff 中心.

进一步, 在适当条件下可以得到更精细的结果.

定理 2.3 (参见文献 [13, 定理 3.2]) 设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 是确定性系统 (2.2) 的紧的不变集且它是 Lebesgue 零测集, 扩散矩阵 $A(x)$ 在 Γ 的邻域 $\mathcal{U}$ 上非退化. 假定 μ^{ϵ_i} 是对应于扰动强度为 ϵ_i 的随机扰动系统 (2.1) 的不变概率测度且 $\mu^{\epsilon_i} \xrightarrow{w} \mu$ ($\epsilon_i \rightarrow 0$). 若存在常数 $C_1 > 0$ 和一个非负 C^2 函数 $V: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$V|_{\Gamma} = 0, \quad V(x) \wedge \langle b(x), \nabla V(x) \rangle > 0, \quad x \in \mathcal{U} \setminus \Gamma, \quad (2.6)$$

$$|\nabla V(x)|^2 \leq C_1 V(x), \quad x \in \mathcal{U}, \quad (2.7)$$

$$\text{tr}(A(x)D^2V(x)) > 0, \quad x \in \mathcal{U}, \quad (2.8)$$

其中 $a \wedge b := \min\{a, b\}$, 则 $\mu(\Gamma) = 0$. 等价地, 对任意的 $\mu \in \mathcal{M}$, 都有 $\mu(\Gamma) = 0$.

3 平面不稳定双曲极限环的随机稳定性

本节将给出平面扰动系统的弱收敛极限测度在未扰动系统的不稳定双曲极限环上测度为 0 的判别准则.

考虑平面 C^k ($k \geq 2$) 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

的小加法噪声扰动方程

$$\begin{cases} dx = P(x, y)dt + \epsilon dW_t^1, \\ dy = Q(x, y)dt + \epsilon dW_t^2, \end{cases} \quad (3.2)$$

其中, $W_t = (W_t^1, W_t^2)^T$ 是 2 维标准 Wiener 过程, $\epsilon > 0$ 是小参数.

设确定性系统 (3.1) 具有周期为 $T > 0$ 的周期解 $\gamma(t)$, 并令 $\Gamma = \{\gamma(t) = (\phi(t), \psi(t)) : 0 \leq t \leq T\}$ 表示它的闭轨.

下面的结果在微分方程定性理论中是标准的 (参见文献 [18, 定理 2.3]). 因为需要用到此结果的证明过程以及记号, 所以将证明过程完整展示于此.

引理 3.1 设 Γ 是系统 (3.1) 的闭轨. 若

$$\Upsilon := \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial P}{\partial x}(\gamma(t)) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\gamma(t)) \right] dt > 0, \quad (3.3)$$

则 Γ 是不稳定极限环. 称 Υ 是周期解 $\gamma(t)$ 的特征指数.

证明 由 $P, Q \in C^1$ 知, $\phi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$. 从而 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是 C^2 的. 再结合 γ 上无奇点知, γ 是 C^2 正则曲线. 设 $p_0 = \gamma(0) \in \Gamma$, 假定曲线 Γ 的定向是顺时针方向, 即当 t 增加时 Γ 上点的运动方向. 设 l 和 s 分别是曲线 Γ 的弧长和自然参数表示, 即 s 是 Γ 从 p_0 出发的弧长. 为方便起见, 曲线的自然参数表示仍记为 $\gamma(s)$. 于是 γ 是 l -周期函数, 还是一个 C^2 正则曲线, 其在 s 处的切向量 $\gamma'(s)$ 是单位的, 且 $\Gamma = \{\gamma(s) = (\phi(s), \psi(s)) : 0 \leq s \leq l\}$.

下面在 Γ 某充分小的邻域内引入曲线坐标 (s, n) . 具体地, $\pi = (x(s, n), y(s, n))$:

$$\begin{pmatrix} x(s, n) \\ y(s, n) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \phi(s) \\ \psi(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\psi'(s) \\ \phi'(s) \end{pmatrix} n, \quad (s, n) \in [0, l] \times [-\delta, \delta], \quad (3.4)$$

其中 $\delta > 0$ 是待定常数. 由 (3.4) 可知

$$D := \begin{pmatrix} \frac{\partial x(s, n)}{\partial s} & \frac{\partial x(s, n)}{\partial n} \\ \frac{\partial y(s, n)}{\partial s} & \frac{\partial y(s, n)}{\partial n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi'(s) - n\psi''(s) & -\psi'(s) \\ \psi'(s) + n\phi''(s) & \phi'(s) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

因此, 存在 $\delta > 0$, 当 $|n| \leq \delta$ 时,

$$\det D = (\phi')^2 + (\psi')^2 + n(\phi''\psi' - \phi'\psi'') > 0.$$

由此可知, 映射 π 限制到 $[0, l] \times (-\delta, \delta)$ 上是单射. 进而, 由逆映射定理知, 存在 Γ 的邻域 $N(\Gamma, \delta)$ 和 C^2 微分同胚 $F: (x, y) \in N(\Gamma, \delta) \mapsto (s, n) \in [0, l] \times (-\delta, \delta)$, $s(x, y) = F_1(x, y)$, $n(x, y) = F_2(x, y)$ 使得

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial s}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial n}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial n}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial n} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial n} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det D} \begin{pmatrix} \frac{\partial y(s, n)}{\partial n} & -\frac{\partial x(s, n)}{\partial n} \\ -\frac{\partial y(s, n)}{\partial s} & \frac{\partial x(s, n)}{\partial s} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

其中, $N(\Gamma, \delta) := \{z \in \mathbb{R}^2 : \inf_{w \in \Gamma} |z - w| < \delta\}$ 表示 Γ 的 δ 邻域, $(x, y) = (x(s, n), y(s, n))$. 由链式法则可知,

$$\begin{pmatrix} \frac{ds}{dt} \\ \frac{dn}{dt} \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det D} \begin{pmatrix} \frac{\partial y(s, n)}{\partial n} & -\frac{\partial x(s, n)}{\partial n} \\ -\frac{\partial y(s, n)}{\partial s} & \frac{\partial x(s, n)}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x(s, n), y(s, n)) \\ Q(x(s, n), y(s, n)) \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{\det D} \left(\frac{\partial y}{\partial n} P - \frac{\partial x}{\partial n} Q \right) \\ &= \frac{1}{\det D} (\phi'(s)P + \psi'(s)Q) \\ &= \frac{1}{\det D} \left(\frac{P(x(s, 0), y(s, 0))}{\sqrt{P^2(x(s, 0), y(s, 0)) + Q^2(x(s, 0), y(s, 0))}} P(x(s, n), y(s, n)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{Q(x(s, 0), y(s, 0))}{\sqrt{P^2(x(s, 0), y(s, 0)) + Q^2(x(s, 0), y(s, 0))}} Q(x(s, n), y(s, n)) \right). \end{aligned}$$

由此不难看出, 当 $|n| \ll 1$ 时, 成立 $\frac{ds}{dt} > 0$. 进而,

$$\begin{aligned} \frac{dn}{ds} &= \frac{dn}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{-\frac{\partial y}{\partial s} P + \frac{\partial x}{\partial s} Q}{\frac{\partial y}{\partial n} P - \frac{\partial x}{\partial n} Q} \\ &= \frac{-(\psi'(s) + n\phi''(s)) \cdot P(x(s, n), y(s, n)) + (\phi'(s) - n\psi''(s)) \cdot Q(x(s, n), y(s, n))}{\phi'(s) \cdot P(x(s, n), y(s, n)) + \psi'(s)Q(x(s, n), y(s, n))} \end{aligned}$$

$$=: R(s, n),$$

并且 $R(s, 0) = 0$. 由此可知

$$\frac{dn}{ds} = R(s, n) = \frac{\partial R}{\partial n}(s, 0)n + o(n) = a(s)n + o(n), \quad (3.8)$$

其中

$$a(s) := \frac{P_0^2 Q_{0y} + Q_0^2 P_{0x} - P_0 Q_0 (P_{0y} + Q_{0x})}{(P_0^2 + Q_0^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$P_0 = P(\gamma(s))$, $Q_0 = Q(\gamma(s))$ 和 $o(n)$ 意味着 $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{o(n)}{n} = 0$ 关于 $s \in [0, l]$ 是一致的. 由 ϕ 和 ψ 是 l -周期函数知, (3.8) 是一维 l -周期系统. 为了判断系统 (3.8) 零解的稳定性, 作如下变换:

$$u = np(s),$$

其中, $p(s) = e^{rs - \int_0^s a(\tau) d\tau}$, $r = \frac{1}{l} \int_0^l a(\tau) d\tau$. 显然, p 是非零连续可微的 l -周期函数且满足 $p'(s) = [r - a(s)]p(s)$ 以及初始条件 $p(0) = 1$. 于是

$$\frac{du}{ds} = p'(s)n + p(s)\frac{dn}{ds} = ru + o(u). \quad (3.9)$$

由 $\gamma(t)$ 是 T -周期的和条件 (3.3) 知,

$$\begin{aligned} lr &= \int_0^l a(s) ds \\ &= \int_0^T \frac{P^2(\gamma(t))Q_y(\gamma(t)) + Q^2(\gamma(t))P_x(\gamma(t)) - P(\gamma(t))Q(\gamma(t))(P_y(\gamma(t)) + Q_x(\gamma(t)))}{P^2(\gamma(t)) + Q^2(\gamma(t))} dt \\ &= \int_0^T \left[Q_y + P_x - \frac{Q^2 Q_y + P^2 P_x + PQ(P_y + Q_x)}{P^2 + Q^2} \right] dt \\ &= \int_0^T [P_x(\gamma(t)) + Q_y(\gamma(t))] dt - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \log[P^2(\gamma(t)) + Q^2(\gamma(t))] dt \\ &= T\Upsilon > 0. \end{aligned}$$

由此便知系统 (3.9) 的零解是反向渐近稳定的. 进而, 系统 (3.8) 的零解 $n = 0$ 也是反向渐近稳定的. 这意味着 Γ 是不稳定双曲极限环. $\square$

下面证明随机扰动系统 (3.2) 的不变概率测度的弱收敛极限在不稳定双曲极限环上的测度为 0.

定理 3.1 若条件 (3.3) 成立, 则对任意的 $\mu \in \mathcal{M}$ 有 $\mu(\Gamma) = 0$.

证明 令 $U(s, n) = [np(s)]^2$. 显然, $U(s, 0) = 0$ 且存在两常数 $m^*, m_* > 0$, 使得 $m_* n^2 \leq U(s, n) \leq m^* n^2$. 注意到

$$\frac{\partial U}{\partial s} = 2p^2(s)n^2(r - a(s)) \quad \text{和} \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 2np^2(s). \quad (3.10)$$

因此, 由 (3.10) 知, 当 $|n| \ll 1$ 时,

$$\begin{aligned} \dot{U}(s, n) &= \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial n} R(s, n) \\ &= 2p(s)p'(s)n^2 + 2p^2(s)n[a(s)n + o(n)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2p^2(s)n^2[r - a(s)] + 2p^2(s)n^2[a(s) + o(1)] \\
&= 2U(s, n)[r + o(1)].
\end{aligned}$$

由此不难看出, 在 $n = 0$ 的小邻域上, $\dot{U}(s, n)$ 是正定的. 进而可知, U 是系统 (3.8) 的 Lyapunov 函数. 这意味着 $n = 0$ 是系统 (3.8) 的反向一致渐近稳定性奇点 (参见文献 [19, 第 113 页, 定理 4.2]). 因此, $n = 0$ 是系统 (3.8) 的不稳定奇点.

定义

$$V(x, y) = U(s, n)|_{s=s(x, y), n=n(x, y)}.$$

下面验证 V 满足定理 2.3 中的条件 (2.6)–(2.8).

首先验证条件 (2.6) 和 (2.7). 由链式法则知

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial s} & \frac{\partial U}{\partial n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial n}{\partial x} & \frac{\partial n}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det D} (2p^2(s)n^2[r - a(s)] \quad 2p^2(s)n) \begin{pmatrix} \phi'(s) & \psi'(s) \\ -(\psi'(s) + n\phi''(s)) & \phi'(s) - n\psi''(s) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

由此可知, 存在 $C_1 > 0$ 使得 $|\nabla V(x, y)|^2 \leq C_1 V(x, y)$, $\forall (x, y) \in N(\Gamma, \delta)$. 因此 (2.7) 成立. 由表达式 (3.4) 知极限环 Γ 对应 $n = 0$. 因此, 由 V 的定义知, V 在 Γ 上的限制 $V|_{\Gamma} = 0$ 且 $V(x, y) > 0$, $\forall (x, y) \in N(\Gamma, \delta) \setminus \Gamma$. 注意到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} P + \frac{\partial V}{\partial y} Q &= \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial s} & \frac{\partial U}{\partial n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial n}{\partial x} & \frac{\partial n}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial s} & \frac{\partial U}{\partial n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} P + \frac{\partial s}{\partial y} Q \\ \frac{\partial n}{\partial x} P + \frac{\partial n}{\partial y} Q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} P + \frac{\partial s}{\partial y} Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial s} & \frac{\partial U}{\partial n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\frac{\partial n}{\partial x} P + \frac{\partial n}{\partial y} Q}{\frac{\partial s}{\partial x} P + \frac{\partial s}{\partial y} Q} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} P + \frac{\partial s}{\partial y} Q \end{pmatrix} \dot{U}(s, n),
\end{aligned}$$

其中 $(s, n) = (s(x, y), n(x, y))$. 再取 δ 充分小使得对任意的 $(x, y) \in N(\Gamma, \delta)$, 有

$$\frac{\partial s}{\partial x}(x, y)P(x, y) + \frac{\partial s}{\partial y}(x, y)Q(x, y) = \frac{1}{\det D} \phi'(s(x, y))P(x, y) + \frac{1}{\det D} \psi'(s(x, y))Q(x, y) > 0.$$

于是,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y)P(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y}(x, y)Q(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} P + \frac{\partial s}{\partial y} Q \end{pmatrix} \dot{U}(s(x, y), n(x, y)) > 0, \quad \forall (x, y) \in N(\Gamma, \delta) \setminus \Gamma.$$

因此, 定理 2.3 中的 (2.6) 也成立.

最后验证定理 2.3 中的 (2.8), 即存在包含 Γ 的区域 $\mathcal{U}$, 使得 $\text{tr} D^2 V$ 在 $\mathcal{U}$ 上是正的. 注意到

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} \quad \text{和} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y}.$$

进而

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s} \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial n} \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial n} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s} \frac{\partial n}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial n} \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial n} \frac{\partial^2 n}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \left[\left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s} \left[\frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial n}{\partial y} \right] \\ &\quad + \frac{\partial U}{\partial s} \left[\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial U}{\partial n} \left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} \right].\end{aligned}$$

由 (3.10) 知

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial n} = 4np^2(s)(r - a(s)), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = 2p^2(s)n^2[2(r - a(s))^2 - a'(s)] \quad \text{和} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} = 2p^2(s),$$

其中用到了事实 $p'(s) = (r - a(s))p(s)$ 和 $a \in C^1$ (由于 $P, Q \in C^2$). 于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= 2p^2(s)n^2[2(r - a(s))^2 - a'(s)] \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &\quad + 2p^2(s) \left[\left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &\quad + 8np^2(s)(r - a(s)) \left[\frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial n}{\partial y} \right] \\ &\quad + 2p^2(s)n^2(r - a(s)) \left[\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right] \\ &\quad + 2np^2(s) \left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} \right] \\ &= 2p^2(s) \underbrace{\left[\left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial y} \right)^2 \right]}_{>0} + O(n) \quad (|n| \ll 1).\end{aligned}$$

由此不难看出, 存在包含 Γ 的区域 $\mathcal{U} := N(\Gamma, \delta')$ 使得 $\text{tr} D^2 V > 0$, 其中 $\delta' < \delta$. 这说明了条件 (2.8) 成立. 因此, 由定理 2.3 便知 $\mu(\Gamma) = 0$. $\square$

例 3.1 考虑随机微分方程

$$\begin{cases} dx = [x(x^2 + y^2 - 1)(9 - x^2 - y^2) + y(x^2 + y^2 - 2y - 8)]dt + \epsilon dW_t^1, \\ dy = [y(x^2 + y^2 - 1)(9 - x^2 - y^2) - x(x^2 + y^2 - 2y - 8)]dt + \epsilon dW_t^2. \end{cases} \quad (3.11)$$

不难看出, 确定性系统 (即 (3.11) 中 $\epsilon = 0$) 有 3 个奇点 $O = (0, 0)$, $E = (-\frac{\sqrt{35}}{2}, \frac{1}{2})$ 和 $S = (\frac{\sqrt{35}}{2}, \frac{1}{2})$, 其中, O 是稳定焦点, E 是稳定结点, S 是鞍点. 进一步, 单位圆周 $\mathbf{S}^1 =: \Gamma$ 是不稳定双曲极限环. 事实上, 其不稳定性可由如下表达式看出:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(\gamma(t)) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\gamma(t)) = 16 + 2\phi(t) > 0, \quad (3.12)$$

图 1 (网络版彩图) 确定性系统 (即 (3.11) 中 $\epsilon = 0$) 的相图

这里 $\gamma(t) = (\phi(t), \psi(t)) \in \Gamma$ 是确定性系统的周期解. 此确定性系统的相图如图 1 所示. 这意味着其 Birkhoff 中心 $B(\Phi) = \{O, E, S, \Gamma\}$. 于是, 注意到 (3.12), 利用定理 2.2 (例如, 取 $V(x, y) = x^2 + y^2$) 和 3.1 便得如下命题.

命题 3.1 随机扰动系统 (3.11) 的不变概率测度族 $\mathcal{I} = \bigcup_{\epsilon \in (0, \frac{1}{2}]} \mu^\epsilon$ 是胎紧的, 且对任意的 $\mu \in \mathcal{M}$ 都有 $\text{supp}(\mu) \subset \{O, E, S\}$.

4 平面“拟 Hamilton”系统

本节将定义一类平面“拟 Hamilton”向量场, 在受非退化噪声扰动后, 不仅可以得到不变概率测度族的胎紧性, 而且还可以证明此胎紧集的任意弱收敛极限在某些回复轨道上的测度为 0. 为方便讨论, 仅考虑受加法噪声扰动的情形, 对于一般非退化情形也是容易进行的.

假设 4.1 (H_1) 设 $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个 C^2 函数, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} H(z) = +\infty$ 且记 H 的下确界为 $m_0 \in \mathbb{R}$.

设 $H(z) = H(x, y)$. 记 $\mathcal{H}(H) := (\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x})^T$ 和 $\nabla H = (\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y})^T$. 定义“拟 Hamilton”向量场

$$b := \mathcal{H}(H) - \prod_{i=1}^j (H - h_i) \nabla H,$$

其中 $m_0 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_j$. 考虑“拟 Hamilton”向量场受如下加法噪声扰动:

$$dz = b(z)dt + \epsilon dW_t, \quad (4.1)$$

其中 $W_t = (W_t^1, W_t^2)^T$ 是 2 维标准 Wiener 过程.

假设 4.2 (H_2) 当 $|z| \gg 1$ 时, $\langle b, \nabla H \rangle(z) < 0$ 且 $|\nabla H(z)| \geq \hat{a} > 0$; 以及 $\forall z \in \Gamma_i := \{z \in \mathbb{R}^2 : H(z) - h_i = 0\} =: [H - h_i = 0]$ 使得 $|\nabla H(z)| \neq 0$.

设 H 满足假设 (H_1) 和 (H_2), 利用 LaSalle 不变原理知, 未扰动系统 (即 (4.1) 中 $\epsilon = 0$) 的每条轨道都有界且趋于 $S = (\bigcup_{i=1}^j \Gamma_i) \cup \mathcal{E}$, 其中 $\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{R}^2 : \nabla H(z) = 0\}$. 显然 $B(\Phi) \subset S$.

定理 4.1 (参见文献 [13, 定理 4.1]) 设 H 满足假设 (H_1) 和 (H_2). 若

$$\Delta H(z) = O\left(\prod_{i=1}^j (H(z) - h_i) |\nabla H(z)|^2\right) \quad (|z| \rightarrow \infty), \quad (4.2)$$

则存在 $\epsilon_0 > 0$, 当 $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ 时, 系统 (4.1) 具有唯一的不变概率测度 μ^ϵ , 不变概率测度所成的集族 $\mathcal{I}$ 是胎紧的, 且对任意的 $\mu \in \mathcal{M}$ 有 $\text{supp}(\mu) \subset B(\Phi)$.

进一步, 若存在包含 Γ_i 的小邻域 U 使得 $\langle b, \nabla H \rangle|_U$ 在 Γ_i 的两侧异号, 则对任意的 $\mu \in \mathcal{M}$ 有 $\mu(\Gamma_i) = 0$.

设微分方程

$$\frac{dz}{dt} = \mathcal{H}(H)(z) - (H(z) - h)\nabla H(z) =: b(z), \quad (4.3)$$

其中, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2, h \in \mathbb{R}$.

假定向量场 $b(z) = (b_1(z), b_2(z))^T$ 满足如下对称性:

$$b_1(-x, -y) = -b_1(x, y), \quad b_2(-x, -y) = -b_2(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

例 4.1 设确定性系统 (4.3) 中的 $H(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 - 2x^2$, $h = 0$. 考虑其随机扰动方程

$$\begin{cases} dx = \left[y^3 - \frac{1}{4}(x^3 - 4x)(x^4 + y^4 - 8x^2) \right] dt + \epsilon dW_t^1, \\ dy = \left[4x - x^3 - \frac{1}{4}y^3(x^4 + y^4 - 8x^2) \right] dt + \epsilon dW_t^2. \end{cases} \quad (4.5)$$

由平面定性理论不难看出, 确定性系统 (即 (4.5) 中 $\epsilon = 0$) 的相图如图 2 所示, 其中, 原点 O 是鞍点, $A_1 = (2, 0)$ 和 $A_2 = (-2, 0)$ 都是完全不稳定 (非初等) 奇点. 这意味着此确定性系统的 Birkhoff 中心 $B(\Phi) = \{O, A_1, A_2\}$. 于是, 利用定理 4.1 便得如下命题.

命题 4.1 随机扰动系统 (4.5) 的不变概率测度族 $\mathcal{I}$ 是胎紧的, 且对任意的 $\mu \in \mathcal{M}$ 都有 $\mu = \delta_O$. 这意味着鞍点 O 是随机稳定的. 这里不变概率密度函数随小参数 ϵ 的变化可参见图 3.

例 4.2 设确定性系统 (4.3) 中的 $H(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{8}x^2y^2 - 2x^2 - \frac{1}{2}y^2$, $h = -\frac{1}{4}$. 考虑其随机扰动方程

$$\begin{cases} dx = \left[y^3 + \frac{1}{4}x^2y - y - \left(H(x, y) + \frac{1}{4} \right) \left(x^3 + \frac{1}{4}xy^2 - 4x \right) \right] dt + \epsilon dW_t^1, \\ dy = \left[-x^3 - \frac{1}{4}xy^2 + 4x - \left(H(x, y) + \frac{1}{4} \right) \left(y^3 + \frac{1}{4}x^2y - y \right) \right] dt + \epsilon dW_t^2. \end{cases} \quad (4.6)$$

由平面定性理论不难看出, 确定性系统的相图如图 4 所示, 其中, $O = (0, 0)$ 是不稳定焦点, $A_1 = (2, 0)$ 和 $A_2 = (-2, 0)$ 是完全不稳定 (非初等) 奇点, $B_1 = (0, 1)$ 和 $B_2 = (0, -1)$ 都是鞍点. 进而, 确定性系统的 Birkhoff 中心 $B(\Phi) = \{O, A_j, B_j : j = 1, 2\}$. 于是, 利用定理 4.1 和漂移向量场的对称性知如下命题成立.

图 2 (网络版彩图) 确定性系统 (即 (4.5) 中 $\epsilon = 0$) 的相图

命题 4.2 随机扰动系统 (4.6) 的不变概率测度族 $\mathcal{I}$ 是胎紧的, 且对任意的 $\mu \in \mathcal{M}$ 都有 $\mu = \frac{1}{2}\delta_{B_1} + \frac{1}{2}\delta_{B_2}$. 这意味着 $\{B_1, B_2\}$ 是随机稳定的. 这里不变概率密度函数随小参数 ϵ 的变化可参见图 5.

例 4.3 设确定性系统 (4.3) 中的 $H(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4}x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2$, $h = 0$. 考虑其随机扰动方程

$$\begin{cases} dx = \left[y^3 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}(x^4 + y^4 - x^2y^2 - 2x^2) \left(x^3 - \frac{1}{2}xy^2 - x \right) \right] dt + \epsilon dW_t^1, \\ dy = \left[-x^3 + \frac{1}{2}xy^2 + x - \frac{1}{4}(x^4 + y^4 - x^2y^2 - 2x^2) \left(y^3 - \frac{1}{2}x^2y \right) \right] dt + \epsilon dW_t^2. \end{cases} \quad (4.7)$$

图 3 (网络版彩图) (4.5) 的不变概率密度函数随 ϵ 变化的情况 (模拟算法取自文献 [20], 下同). (a) $\epsilon = 0.7$; (b) $\epsilon = 0.4$; (c) $\epsilon = 0.1$

图 4 (网络版彩图) 确定性系统 (即 (4.6) 中 $\epsilon = 0$) 的相图

图 5 (网络版彩图) (4.6) 的不变概率密度函数随 ϵ 变化的情况. (a) $\epsilon = 0.7$; (b) $\epsilon = 0.4$; (c) $\epsilon = 0.1$

由平面定性理论不难看出, 确定性系统的相图如图 6 所示, 其中, $O = (0, 0)$, $A_1 = (1, 0)$ 和 $A_2 = (-1, 0)$ 都是鞍点, $E_j = ((-1)^{j-1}\sqrt{\frac{4}{3}}, (-1)^{j-1}\sqrt{\frac{2}{3}})$ 和 $E_{j+2} = ((-1)^j\sqrt{\frac{4}{3}}, (-1)^{j-1}\sqrt{\frac{2}{3}})$ ($j = 1, 2$) 都是不稳定焦点. 因此, 确定性系统的 Birkhoff 中心 $B(\Phi) = \{O, A_j, E_j, E_{j+2} : j = 1, 2\}$. 于是, 利用定理 4.1 知如下命题成立.

命题 4.3 随机扰动系统 (4.7) 的不变概率测度族 $\mathcal{I}$ 是胎紧的, 且对任意的 $\mu \in \mathcal{M}$ 都有 $\text{supp}(\mu) \subset \{O, A_1, A_2\}$, 即 $\{O, A_1, A_2\}$ 是随机稳定的. 进一步, 根据图 7 关于不变概率密度函数的模拟, 猜测会有 $\mu = \delta_O$.

例 4.4 设确定性系统 (4.3) 中的 $H(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 + x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$, $h = -\frac{1}{6}$. 考虑其随机扰动方程

$$\begin{cases} dx = \left[y^3 + 2x^2y - y - \left(H(x, y) + \frac{1}{6} \right) (x^3 + 2xy^2 - x) \right] dt + \epsilon dW_t^1, \\ dy = \left[-x^3 - 2xy^2 + x - \left(H(x, y) + \frac{1}{6} \right) (y^3 + 2x^2y - y) \right] dt + \epsilon dW_t^2. \end{cases} \quad (4.8)$$

由平面定性理论不难看出, 确定性系统的相图如图 8 所示, 其中, $O = (0, 0)$, $A_1 = (1, 0)$, $A_2 = (-1, 0)$, $B_1 = (0, 1)$, $B_2 = (0, -1)$ 都是完全不稳定奇点, $E_j = ((-1)^{j-1}\sqrt{\frac{1}{3}}, (-1)^{j-1}\sqrt{\frac{1}{3}})$, $E_{j+2} = ((-1)^j\sqrt{\frac{1}{3}}, (-1)^{j-1}\sqrt{\frac{1}{3}})$ ($j = 1, 2$) 都是鞍点. 因此, 确定性系统的 Birkhoff 中心 $B(\Phi) = \{O, A_j, B_j, E_{2+j} : j = 1, 2\}$. 于是, 利用定理 4.1 和漂移向量场的对称性知如下命题成立.

命题 4.4 随机扰动系统 (4.8) 的不变概率测度族 $\mathcal{I}$ 是胎紧的, 且对任意的 $\mu \in \mathcal{M}$ 有 $\mu = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \delta_{E_k}$. 这意味着 $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ 是随机稳定的.

注 4.1 例 4.1–4.4 的结果均表明极限测度仅支撑在鞍点集上. 这说明鞍点集是随机稳定的. 同时, 利用定理 2.1 容易看出, 它们对应的确定性系统是结构不稳定的.

图 6 (网络版彩图) 确定性系统 (即 (4.7) 中 $\epsilon = 0$) 的相图

图 7 (网络版彩图) (4.7) 的不变概率密度函数随 ϵ 变化的情况. (a) $\epsilon = 0.7$; (b) $\epsilon = 0.4$; (c) $\epsilon = 0.1$

图 8 (网络版彩图) 确定性系统 (即 (4.8) 中 $\epsilon = 0$) 的相图 图 9 (网络版彩图) 当 $\epsilon = 0.01$ 时, (4.8) 的不变概率密度函数的图像. (a) 侧视示意图或旋转角度图; (b) 俯视示意图

5 总结

本文证明了当 2 维平面系统具有双曲不稳定极限环时, 在加法噪声扰动下, 此极限环是随机不稳定集. 同时研究了一类具体的平面“拟 Hamilton”系统, 在非退化噪声扰动下, 当这类系统结构不稳定时 (例 4.1–4.4), 鞍点可以是随机稳定集. 一般平面系统的结构稳定性对随机稳定性起到的影响也是我们正在考虑的问题.

致谢 作者对编委和审稿人提出的很多宝贵意见和建议表示衷心的感谢.

参考文献

- 1 Sinai Y G. Kolmogorov's work on ergodic theory. Ann Probab, 1989, 17: 833–839
- 2 Mumford D. The dawning of the age of stochasticity. In: Mathematics: Frontiers and Perspectives. Providence: Amer Math Soc, 2000, 197–218
- 3 Young L S. What are SRB measures, and which dynamical systems have them? J Stat Phys, 2002, 108: 733–754
- 4 Zeeman E C. Stability of dynamical systems. Nonlinearity, 1988, 1: 115–155
- 5 Pontryagin L, Andronov A, Vitt A. On statistical consideration of dynamical systems. J Exper Theor Phys, 1933, 3:

- 165–180
- 6 Nevel'son M B. On the behavior of the invariant measure of a diffusion process with small diffusion on a circle. *Theory Probab Appl*, 1964, 9: 125–131
 - 7 Khasminskii R. Principle of averaging for parabolic and elliptic differential equations and for Markov processes with small diffusion. *Theory Probab Appl*, 1963, 8: 1–21
 - 8 Khasminskii R. *Stochastic Stability of Differential Equations*. Heidelberg: Springer, 2012
 - 9 Freidlin M, Wentzell A. *Random Perturbations of Dynamical Systems*. New York: Springer, 1984
 - 10 Huang W, Ji M, Liu Z, et al. Integral identity and measure estimates for stationary Fokker-Planck equations. *Ann Probab*, 2015, 43: 1712–1730
 - 11 Huang W, Ji M, Liu Z, et al. Concentration and limit behaviors of stationary measures. *Phys D*, 2018, 369: 1–17
 - 12 Chen L, Dong Z, Jiang J, et al. On limiting behavior of stationary measures for stochastic evolution systems with small noise intensity. *Sci China Math*, 2020, 63: 1463–1504
 - 13 Chen L, Dong Z, Jiang J. A criterion on a repeller being a null set of any limit measure for stochastic differential equations. *Sci China Math*, 2021, 64: 221–238
 - 14 Perko L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 2001
 - 15 Andronov A, Pontryagin L. Systemes grossiers. *Doklady Akademi Nauk SSSR*, 1937, 14: 247–250
 - 16 DeBaggis H. Dynamical systems with stable structures. In: *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations*, vol. II. Princeton: Princeton University Press, 1952, 37–59
 - 17 Peixoto M M. Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology*, 1962, 1: 101–120
 - 18 Ye Y, Cai S, Chen L, et al. *Theory of Limit Cycles*, 2nd ed. Translations of Mathematical Monographs, vol. 66. Providence: Amer Math Soc, 1986
 - 19 Marquez H. *Nonlinear Control Systems: Analysis and Design*. Hoboken: Wiley, 2003
 - 20 Li Y. A data-driven method for the steady state of randomly perturbed dynamics. *Commun Math Sci*, 2019, 17: 1045–1059

Stochastic stability of two-dimensional systems

Lifeng Chen, Zhao Dong & Jifa Jiang

Abstract In this paper, we first study the stochastic stability of the hyperbolic limit cycles of a deterministic planar system under additive noise. Then we consider the stochastic stability of a class of planar “quasi-Hamilton” systems under nondegenerate stochastic perturbations, and point out that there is a big difference between the structurally stable system and structurally unstable system with respect to stochastic stability.

Keywords stochastic stability, invariant probability measure, weak convergence limit, structural stability

MSC(2020) 34C25, 37C40, 60H10, 60B10

doi: 10.1360/SSM-2020-0337