多复变数全纯映射精细的 Bohr 定理

刘小松^{1*}, 刘太顺², 张文俊³

1. 岭南师范学院数学与统计学院, 湛江 524048;

2. 湖州师范学院数学系, 湖州 313000;

3. 深圳大学数学与统计学院, 深圳 518060

E-mail: lxszhjnc@163.com, lts@ustc.edu.cn, zwj@szu.edu.cn

收稿日期: 2019-01-31; 接受日期: 2019-12-05; 网络出版日期: 2020-03-12; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11871257) 资助项目

摘要 本文首先建立不依赖自同构从复 Banach 空间平衡域到 $\mathbb{C}^n$ 单位多圆柱上一定限制条件下全纯映射精细的范数型 Bohr 定理及复 Banach 空间 X 上单位球到复 Banach 空间 Y 上单位球全纯映射精细的泛函型 Bohr 定理. 其次, 给出有界对称域上全纯映射精细的 Bohr 定理. 最后, 得到 J^* 代数单位球上全纯映射精细的 Bohr 定理. 所得结果将一维的 Bohr 定理推广至高维.

关键词 Bohr 定理 范数型 泛函型 平衡域 不同维数

MSC (2020) 主题分类 32A30, 32H02, 30C45

1 引言

设 U 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的单位圆盘, $f: U \rightarrow U$ 有如下 Taylor 展式:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

则对 $|z| < 1/3$, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < 1.$$

以上结果是著名的 Bohr 定理, Bohr^[1] 最先指出当 $|z| < \frac{1}{6}$ 时结论成立. $1/6$ 的值可改进为 $1/3$, 且最佳值 $1/3$ 很快由 Riesz、Schur 和 Wiener 独立获得. 其他新证明由 Tomić^[2] 和 Sidon^[3] 给出. 最近, Abu Muhanna 和 Ali^[4]、Abu Muhanna 等^[5]、Ali 等^[6]、Kayumov 和 Ponnusamy^[7,8] 分别研究了全纯函数、调和函数和双曲度量等各种精细的 Bohr 定理. 关于 Bohr 定理的高维推广, 有许多重要且有趣的结论 (参见文献 [9–15]). 2014 年, Bayart 等^[16] 证明了单位多圆柱的渐近 Bohr 半径为 $\sqrt{(\log(n))/n}$. 然而,

英文引用格式: Liu X S, Liu T S, Zhang W J. Refined Bohr's theorem for holomorphic mappings in several complex variables (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 591–604, doi: 10.1360/SCM-2019-0052

上述结论既不能回到一维情形, 也不能推广至有限维空间中的域 $\{z \in \mathbb{C}^n : \|z\|_{B_p} = (\sum_{k=1}^n |z_k|^p)^{\frac{1}{p}} < 1\}$ ($p > 1$). 至于涉及齐次展开式的 Bohr 定理的高维推广, Liu 和 Wang^[17] 于 2007 年首先将经典的 Bohr 定理推广成关于映射 $f: \Omega \rightarrow \Omega$ 的 Bohr 定理, 结果表明 $1/3$ 是最佳的, 其中 Ω 是 Hua^[18] 意义下四类典型域中的一种. 紧接着 Hamada 等^[19] 又将 Bohr 定理推广为关于 $f: G \rightarrow B_Y$ 的 Bohr 定理, 且当 B_Y 是 J^* -代数的单位球时 $1/3$ 仍是最佳的, 其中 G 是复 Banach 空间 X 的有界平衡域, B_Y 是复 Banach 空间 Y 的单位球. 最近, Roos^[20] 再将 Bohr 定理推广至有界对称域, 其证明不需要分类讨论. 实际上, 上述 3 篇文献均利用了自同构. 一个自然引起人们关注的问题是, 多复变数不依赖自同构的 Bohr 定理是否成立? 对于一定限制条件下的范数型 Bohr 定理和泛函型 Bohr 定理, 本文给出肯定的回答, 且上述结果表明对不同无限维或有限维如 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$ ($m \neq n$) 的复 Banach 空间均成立.

设 X 和 Y 为复 Banach 空间, B_X 和 B_Y 是 X 和 Y 的对应单位球. U_n 和 B_n 分别为 $\mathbb{C}^n$ 的单位多圆柱和 Euclid 单位球, U 为 $\mathbb{C}$ 的单位圆盘. $\mathbb{N}^+$ 和 $\mathbb{R}$ 分别表示正整数集和实数集. 给定域 $G_X \subset X$, $G_Y \subset Y$, $H(G_X, G_Y)$ 为将 G_X 映成 G_Y 的全纯映射所成的集. 设 $f \in H(G_X, G_Y)$, $x \in G_X$, $D^l f(x)$ 为 f 在点 x 的 l 阶 Fréchet 导数. 设 $f \in H(G_X, G_Y)$ 在原点有 Taylor 展开式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n f(0)(x^n).$$

若 $f(G_X)$ 是一个域, f^{-1} 存在, 且在 $f(G_X)$ 上全纯, 则称 $f \in H(G_X, G_Y)$ 是双全纯的. $\text{Aut}(G)$ 表示将 G 映成自身的全体双全纯映射. 若对点 a 和 b , 存在满足 $\phi(a) = b$ 的 $\phi \in \text{Aut}(G)$, 则称域 G 是齐性域. 记 $L(X, Y)$ 为将 X 映入 Y 的全体连续线性算子, 且 I 是 $L(X, X)$ 中的恒等算子. 对每一个 $x \in X \setminus \{0\}$, 定义

$$T(x) = \{T_x \in L(X, \mathbb{C}) : \|T_x\| = 1, T_x(x) = \|x\|\}.$$

对任意 $x \in G_X$, $\xi \in X$,

$$F_C^{G_X}(x, \xi) = \sup\{|Df(x)\xi| : f \in H(G_X, U), f(x) = 0\}$$

称为 G_X 上的 Carathéodory 度量的无穷小形式. 若对任意 $\lambda \in \overline{U}$, 有 $\lambda G_X \subset G_X$, 则称域 $G_X \subset X$ 是平衡域, 其 Minkowski 泛函 $\rho_X(x)$ 定义为

$$\rho_X(x) = \inf \left\{ t > 0 : \frac{x}{t} \in G_X \right\}, \quad x \in X.$$

显然, $G_X = \{x : \rho_X(x) < 1\}$.

2 不依赖自同构将平衡域映成复 Banach 空间单位球的全纯映射精细的 Bohr 定理

在本节中, $G_X \subset X$ 总表示平衡域, $B_Y \subset Y$ 为 Y 中单位球, 且是齐性域. 先给出两个例子.

例 2.1 设

$$f(z) = \left(\frac{1/3 - z_1}{1 - 1/3z_1}, \frac{9}{11} \right)^T, \quad z = (z_1, z_2)^T \in U_2,$$

则 $f \in H(U_2, U_2)$.

对 $z = (\frac{1}{4}, 0)^T$, 直接计算有

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\|D^m f(0)(z^m)\|_{U_2}}{m!} &= \frac{9}{11} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{m+1} \right) \left(\frac{1}{4}\right)^m \\ &= \frac{9}{11} + \left(3 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{\frac{1}{12}}{1 - \frac{1}{12}} \\ &= \frac{12 - \frac{1}{3}}{11} \\ &> 1.\end{aligned}$$

例 2.2 设

$$f(z) = \left(\frac{1/2 - z_1}{1 - 1/2z_1}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T, \quad z = (z_1, z_2)^T \in B_2,$$

则 $f \in H(B_2, B_2)$.

对 $z = (\frac{1}{4}, 0)^T$, 简单计算有

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\|D^m f(0)(z^m)\|_{B_2}}{m!} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \right) \left(\frac{1}{4}\right)^m \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{14} \\ &> 1.\end{aligned}$$

例 2.1 和 2.2 表明下列两个问题的结论均不成立.

问题 2.1 设 $f \in H(U_n, U_n)$. 若 $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^m f(0)(z^m)}{m!}$, 则对 $\|z\|_{U_n} < \frac{1}{3}$, 有

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\|D^m f(0)(z^m)\|_{U_n}}{m!} < 1.$$

问题 2.2 设 $f \in H(B_n, B_n)$. 若 $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^m f(0)(z^m)}{m!}$, 则对 $\|z\|_{B_n} < \frac{1}{3}$, 有

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\|D^m f(0)(z^m)\|_{B_n}}{m!} < 1.$$

为给出本节的主要结果, 需建立如下引理:

引理 2.1 若 $f(x) = f(0) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{D^l f(0)(x^l)}{l!} \in H(G_X, B_Y)$, 则

$$F_C^{B_Y} \left(f(0), \frac{D^l f(0)(x^l)}{l!} \right) \leq (\rho_X(x))^l, \quad l = 1, 2, \dots$$

证明 类似文献 [19, 定理 3.1] 的证明, 定义

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^k \frac{f(e^{2\pi i j/k} x)}{k}, \quad k \in \mathbb{N}^+.$$

注意到 B_Y 是凸域, 则 $f_k \in H(G_X, B_Y)$. 由 f 的齐次展开式, 得

$$f_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(f(0) + \sum_{l=1}^{\infty} e^{2\pi i l j/k} \frac{D^l f(0)(x^l)}{l!} \right).$$

又 B_Y 是齐性域, 则存在 $\phi \in \text{Aut}(B_Y)$ 使得 $\phi(f(0)) = 0$. 从而 $\phi \circ f_k \in H(G_X, B_Y)$. 直接计算, 得

$$\begin{aligned} \phi \circ f_k(x) &= \phi \left(f(0) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{D^l f(0)(x^l)}{l!} \right) \\ &= \phi(f(0)) + D\phi(f(0)) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{D^l f(0)(x^l)}{l!} \right) + \cdots \\ &= \frac{D\phi(f(0))D^k f(0)(x^k)}{k!} + \frac{D\phi(f(0))D^{2k} f(0)(x^{2k})}{(2k)!} + \cdots. \end{aligned}$$

固定 $x \in G_X \setminus \{0\}$, 记 $x_0 = \frac{x}{\rho_X(x)}$. 任意固定 $u \in B_Y \setminus \{0\}$, 定义

$$h(\lambda) = T_u(\phi \circ f_k(\lambda x_0)), \quad \lambda \in U,$$

则 $h \in H(U, U)$, $h(0) = 0$, 且

$$h(\lambda) = \frac{T_u(D\phi(f(0))D^k f(0)(x_0^k))}{k!} \lambda^k + \frac{T_u(D\phi(f(0))D^{2k} f(0)(x_0^{2k}))}{(2k)!} \lambda^{2k} + \cdots.$$

于是由单复变数著名的 Schwarz 引理推得

$$\frac{T_u(D\phi(f(0))D^k f(0)(x_0^k))}{k!} \leq 1. \quad (2.1)$$

若 $D\phi(f(0))D^k f(0)(x^k) \neq 0$, 则取 $u = D\phi(f(0))D^k f(0)(x^k)$. 从而, 由 (2.1) 得

$$\frac{\|(D\phi(f(0))D^k f(0)(x_0^k))\|_{B_Y}}{k!} \leq 1,$$

即

$$\frac{\|(D\phi(f(0))D^k f(0)(x^k))\|_{B_Y}}{k!} \leq (\rho_X(x))^k. \quad (2.2)$$

另外, 由

$$F_C^{B_Y}(y, \eta) = F_C^{B_Y}(0, D\phi(y)\eta), \quad F_C^{B_Y}(0, \xi) = \|\xi\|_{B_Y}, \quad \xi \in Y \quad (\text{参见文献 [21, 定理 2.1 和引理 2.2]}),$$

其中 $\phi \in \text{Aut}(B_Y)$ 满足 $\phi(y) = 0$, 以及 (2.2), 得

$$\begin{aligned} F_C^{B_Y} \left(f(0), \frac{D^l f(0)(x^l)}{l!} \right) &= F_C^{B_Y} \left(0, D\phi(f(0)) \left(\frac{D^l f(0)(x^l)}{l!} \right) \right) \\ &= \frac{\|(D\phi(f(0))D^l f(0)(x^l))\|_{B_Y}}{l!} \\ &\leq (\rho_X(x))^l, \quad l = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

因此, 所证结论成立. □

当 $B_Y = U_m$ 或 $B_Y = B_m$, 易推出以下两个引理:

推论 2.1 若 $\varphi \in H(G_X, U_m)$, 则

$$F_C^{U_m}\left(f(0), \frac{D^l f(0)(x^l)}{l!}\right) = \max\left(\frac{|D^l f_1(0)(x^l)|}{1 - |f_1(0)|^2}, \frac{|D^l f_2(0)(x^l)|}{1 - |f_2(0)|^2}, \dots, \frac{|D^l f_m(0)(x^l)|}{1 - |f_m(0)|^2}\right) \\ \leq (\rho_X(x))^l, \quad l = 1, 2, \dots$$

推论 2.2 若 $\varphi \in H(G_X, B_m)$, 则

$$F_C^{B_m}\left(f(0), \frac{D^l f(0)(x^l)}{l!}\right) = \sqrt{\frac{|\langle f(0), \frac{D^l f(0)(x^l)}{l!} \rangle|^2}{(1 - \|f(0)\|_{B_m}^2)^2} + \frac{\|\frac{D^l f(0)(x^l)}{l!}\|_{B_m}^2}{1 - \|f(0)\|_{B_m}^2}} \\ \leq (\rho_X(x))^l, \quad l = 1, 2, \dots$$

注 2.1 文献 [22, 引理 2.3] 建立了关于固定多重指数 Carathéodory 度量的无穷小形式估计, 本文则得到关于齐次展开式 Carathéodory 度量的无穷小形式估计. 在引理 2.1 中, 令 $G_X = B_Y = U$, 则有

$$\frac{|f^{(l)}(0)|}{l!} \leq 1 - |f(0)|^2, \quad l = 1, 2, \dots,$$

即为单复变几何函数论中一个经典而重要的结果 (参见文献 [23]).

现给出本文的主要结果.

定理 2.1 设 $k \in \mathbb{N}^+$, $f(x) = f(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{D^{sk} f(0)(x^{sk})}{(sk)!} \in H(G_X, U_m)$, 且 $|f_l(0)| = \|f(0)\|_{U_m}$, $l = 1, 2, \dots, m$, 则对 $\rho_X(x) < \sqrt[k]{\frac{1}{3}}$, $k = 1, 2, \dots$, 有

$$\|f(0)\|_{U_m} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\|D^{sk} f(0)(x^{sk})\|_{U_m}}{(sk)!} < 1,$$

且当 $G_X = B_X$ 时, 值 $\sqrt[k]{\frac{1}{3}}$ 是最佳的.

证明 由推论 2.1 得

$$(\rho_X(x))^p \geq F_C^{U_m}\left(f(0), \frac{D^p f(0)(x^p)}{p!}\right) \\ = \max\left(\frac{|D^p f_1(0)(x^p)|}{1 - |f_1(0)|^2}, \frac{|D^p f_2(0)(x^p)|}{1 - |f_2(0)|^2}, \dots, \frac{|D^p f_m(0)(x^p)|}{1 - |f_m(0)|^2}\right) \\ = \frac{\|D^p f(0)(x^p)\|_{U_m}}{1 - \|f(0)\|_{U_m}^2}, \quad p = 1, 2, \dots,$$

即

$$\frac{\|D^p f(0)(x^p)\|_{U_m}}{p!} \leq (1 - \|f(0)\|_{U_m}^2)(\rho_X(x))^p, \quad p = 1, 2, \dots$$

于是对 $\rho_X(x) < \sqrt[k]{\frac{1}{3}}$, $k = 1, 2, \dots$, 有

$$\|f(0)\|_{U_m} + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{\|D^{sk} f(0)(x^{sk})\|_{U_m}}{(sk)!} \leq \|f(0)\|_{U_m} + (1 - \|f(0)\|_{U_m}^2) \frac{\rho_X^k(x)}{1 - \rho_X^k(x)}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|f(0)\|_{U_m} + \frac{1 - \|f(0)\|_{U_m}^2}{2} \\ &< 1. \end{aligned}$$

另外, 设

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{e^{i\theta_1}\lambda - T_u^k(x)}{1 - e^{-i\theta_1}\lambda T_u^k(x)}, \frac{e^{i\theta_2}\lambda - T_u^k(x)}{1 - e^{-i\theta_2}\lambda T_u^k(x)}, \dots, \frac{e^{i\theta_m}\lambda - T_u^k(x)}{1 - e^{-i\theta_m}\lambda T_u^k(x)} \right)^T, \\ x &\in B_X, \quad \lambda \in [0, 1), \quad \|u\|_{B_X} = 1, \quad \theta_l \in \mathbb{R}, \quad l = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

易知 f 满足定理 2.1 的条件, 且 $\|f(0)\|_{U_m} = \lambda$. 取 $x = ru$, 直接计算得

$$\begin{aligned} \|f(0)\|_{U_m} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\|D^{sk}f(0)(x^{sk})\|_{U_m}}{(sk)!} &= \lambda + \sum_{s=1}^{\infty} (\lambda^{s-1} - \lambda^{s+1})r^{sk} \\ &= \lambda + \frac{(1 - \lambda^2)r^k}{1 - \lambda r^k}. \end{aligned}$$

从而表明 $\lambda + \frac{(1 - \lambda^2)r^k}{1 - \lambda r^k} > 1$ 当且仅当

$$r > \frac{1}{\sqrt[k]{1 + 2\lambda}} = \frac{1}{\sqrt[k]{1 + 2\|f(0)\|_{U_m}}}.$$

注意到, 当 $\|f(0)\|_{U_m} \rightarrow 1^-$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt[k]{1 + 2\|f(0)\|_{U_m}}} \rightarrow \sqrt[k]{\frac{1}{3}}.$$

这蕴含每个值 $\sqrt[k]{\frac{1}{3}}$ 是最佳的. □

类似定理 2.1 的证明, 得到以下推论:

推论 2.3 设 $k \in \mathbb{N}^+$, $f(x) = f(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{D^{sk}f(0)(x^{sk})}{(sk)!} \in H(G_X, U_m)$, 且 $|f_l(0)| = \|f(0)\|_{U_m}$, $l = 1, 2, \dots, m$, 则对 $\rho_X(x) < \frac{1}{\sqrt[k]{2 + \|f(0)\|_{U_m}}}$, 其中 $f(0)$ 固定, 有

$$\|f(0)\|_{U_m} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\|D^{sk}f(0)(x^{sk})\|_{U_m}}{(sk)!} < 1,$$

且当 $\|z\|_{U_m} > \frac{1}{\sqrt[k]{1 + 2\|f(0)\|_{U_m}}}$ 时, 存在 $f \in H(U_m, U_m)$ 使得上述不等式不成立.

定理 2.2 设 $f(x) = f(0) + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{D^s f(0)(x^s)}{s!} \in H(G_X, U_m)$, 且 $|f_l(0)| = \|f(0)\|_{U_m}$, $l = 1, 2, \dots, m$, 则对 $\rho_X(x) < r_k$, 有

$$\|f(0)\|_{U_m} + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{\|D^s f(0)(x^s)\|_{U_m}}{s!} < 1,$$

其中每个 r_k 是方程

$$2x^k + x - 1 = 0, \quad k \in \mathbb{N}^+$$

的最大正实根. 特别地, $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 = \frac{1}{2}$, $r_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{87}}{36}} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{87}}{36}} \approx 0.58975$, 且当 $G_X = B_X$ 时, 值 $r_1 = \frac{1}{3}$ 是最佳的.

证明 由推论 2.1 推得

$$\begin{aligned}(\rho_X(x))^s &\geq F_C^{U_m}\left(f(0), \frac{D^s f(0)(x^s)}{s!}\right) \\&= \max\left(\frac{\frac{|D^s f_1(0)(x^s)|}{s!}}{1 - |f_1(0)|^2}, \frac{\frac{|D^s f_2(0)(x^s)|}{s!}}{1 - |f_2(0)|^2}, \dots, \frac{\frac{|D^s f_m(0)(x^s)|}{s!}}{1 - |f_m(0)|^2}\right) \\&= \frac{\frac{\|D^s f(0)(x^s)\|_{U_m}}{s!}}{1 - \|f(0)\|_{U_m}^2}, \quad s = k, k+1, \dots,\end{aligned}$$

即

$$\frac{\|D^s f(0)(x^s)\|_{U_m}}{s!} \leq (1 - \|f(0)\|_{U_m}^2)(\rho_X(x))^s, \quad s = k, k+1, \dots$$

从而对 $\rho_X(x) < r_k$, 有

$$\begin{aligned}\|f(0)\|_{U_m} + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{\|D^s f(0)(x^s)\|_{U_m}}{s!} &\leq \|f(0)\|_{U_m} + (1 - \|f(0)\|_{U_m}^2) \frac{\rho_X^k(x)}{1 - \rho_X(x)} \\&\leq \|f(0)\|_{U_m} + (1 - \|f(0)\|_{U_m}^2) \frac{r_k^k}{1 - r_k} \\&\leq \|f(0)\|_{U_m} + \frac{1 - \|f(0)\|_{U_m}^2}{2} \\&< 1.\end{aligned}$$

$r_1 = \frac{1}{3}$ 是最佳值, 参见定理 2.1 证明中 $k=1$ 情形的讨论. □

注 2.2 不难验证每个方程 $2x^k + x - 1 = 0$ 存在正实根 $r_k \in (0, 1)$, 且数列 $\{r_k\}$ 是递增数列.

定理 2.3 设 $f(x) = f(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{D^{sk} f(0)(x^{sk})}{(sk)!} \in H(G_X, B_m)$, 则对 $\rho_X(x) < \sqrt[k]{\frac{1}{3}}$, 有

$$\|f(0)\|_{B_m} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\|D^{sk} f(0)(x^{sk})\|_{B_m}}{(sk)!} < \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.118.$$

特别地, 当 $|\langle f(0), D^{sk} f(0)(x^{sk}) \rangle| = \|f(0)\|_{B_m} \|D^{sk} f(0)(x^{sk})\|_{B_m}$, $s = 1, 2, \dots$ 时, 有

$$\|f(0)\|_{B_m} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\|D^{sk} f(0)(x^{sk})\|_{B_m}}{(sk)!} < 1,$$

且当 $G_X = B_X$ 时, 每个值 $r_k = \sqrt[k]{\frac{1}{3}}$ 是最佳的.

证明 根据推论 2.2, 得

$$\begin{aligned}(\rho_X(x))^{sk} &\geq F_C^{B_m}\left(f(0), \frac{D^{sk} f(0)(x^{sk})}{(sk)!}\right) \\&= \sqrt{\frac{|\langle f(0), \frac{D^{sk} f(0)(x^{sk})}{(sk)!} \rangle|^2}{(1 - \|f(0)\|_{B_m}^2)^2} + \frac{\|\frac{D^{sk} f(0)(x^{sk})}{(sk)!}\|_{B_m}^2}{1 - \|f(0)\|_{B_m}^2}} \\&\geq \frac{\frac{\|D^{sk} f(0)(x^{sk})\|_{B_m}}{(sk)!}}{\sqrt{1 - \|f(0)\|_{B_m}^2}}, \quad s = 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

即

$$\frac{\|D^{sk}f(0)(x^{sk})\|_{B_m}}{(sk)!} \leq \sqrt{1 - \|f(0)\|_{B_m}^2} (\rho_X(x))^{sk}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

因此, 由 (2.3), 有

$$\begin{aligned} \|f(0)\|_{B_m} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\|D^{sk}f(0)(x^{sk})\|_{B_m}}{(sk)!} &\leq \|f(0)\|_{B_m} + \sqrt{1 - \|f(0)\|_{B_m}^2} \sum_{s=1}^{\infty} (\rho_X(x))^{sk} \\ &\leq \|f(0)\|_{B_m} + \sqrt{1 - \|f(0)\|_{B_m}^2} \frac{\rho_X^k(x)}{1 - \rho_X^k(x)} \\ &< \|f(0)\|_{B_m} + \frac{\sqrt{1 - \|f(0)\|_{B_m}^2}}{2} \\ &\leq \frac{\sqrt{5}}{2} \\ &\approx 1.118. \end{aligned}$$

当 $|\langle f(0), D^{sk}f(0)(x^{sk}) \rangle| = \|f(0)\|_{B_m} \|D^{sk}f(0)(x^{sk})\|_{B_m}$, $s = 1, 2, \dots$ 时, 由推论 2.2, 得

$$\frac{\|D^{sk}f(0)(x^{sk})\|_{B_m}}{(sk)!} \leq (1 - \|f(0)\|_{B_m}^2) (\rho_X(x))^{sk}, \quad s = 1, 2, \dots,$$

于是, 对 $\rho_X(x) < \sqrt[k]{\frac{1}{3}}$, 有

$$\begin{aligned} \|f(0)\|_{B_m} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\|D^{sk}f(0)(x^{sk})\|_{B_m}}{(sk)!} &\leq \|f(0)\|_{B_m} + (1 - \|f(0)\|_{B_m}^2) \sum_{s=1}^{\infty} (\rho_X(x))^{sk} \\ &< 1. \end{aligned}$$

最后考虑

$$f(x) = \left(\frac{e^{i\theta}\lambda - T_u^k(x)}{1 - e^{-i\theta}\lambda T_u^k(x)}, 0, \dots, 0 \right)^T, \quad x \in B_X, \quad \|u\|_X = 1, \quad \lambda \in [0, 1), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

则易知 f 满足定理 2.3 的假设. 取 $x = ru$, 类似定理 2.1 证明中的讨论可知, 每个值 $r_k = \sqrt[k]{\frac{1}{3}}$ 是最佳的. $\square$

定理 2.4 设 $f(x) = f(0) + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{D^s f(0)(x^s)}{s!} \in H(G_X, B_m)$, 则对 $\rho_X(x) < r_k$, 有

$$\|f(0)\|_{B_m} + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{\|D^s f(0)(x^s)\|_{B_m}}{s!} < \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

特别地, 当 $|\langle f(0), D^s f(0)(x^s) \rangle| = \|f(0)\|_{B_m} \|D^s f(0)(x^s)\|_{B_m}$, $s = k, k+1, \dots$ 时, 对 $\rho_X(x) < r_k$, 有

$$\|f(0)\|_{B_m} + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{\|D^s f(0)(x^s)\|_{B_m}}{s!} < 1,$$

其中 r_k 同定理 2.2, 且当 $G_X = B_X$ 时, 值 $r_1 = \frac{1}{3}$ 是最佳的.

证明 由推论 2.2 推得

$$\begin{aligned}(\rho_X(x))^l &\geq F_C^{B_m}\left(f(0), \frac{D^l f(0)(x^l)}{l!}\right) \\&= \sqrt{\frac{|\langle f(0), \frac{D^l f(0)(x^l)}{l!} \rangle|^2}{(1 - \|f(0)\|_{B_m}^2)^2} + \frac{\|\frac{D^l f(0)(x^l)}{l!}\|_{B_m}^2}{1 - \|f(0)\|_{B_m}^2}} \\&\geq \frac{\frac{\|D^l f(0)(x^l)\|_{B_m}}{l!}}{\sqrt{1 - \|f(0)\|_{B_m}^2}}, \quad l = 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

即

$$\frac{\|D^l f(0)(x^l)\|_{B_m}}{l!} \leq \sqrt{1 - \|f(0)\|_{B_m}^2} (\rho_X(x))^l, \quad l = 1, 2, \dots$$

因此, 对 $\rho_X(x) < r_k$, 有

$$\begin{aligned}\|f(0)\|_{B_m} + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{\|D^s f(0)(x^s)\|_{B_m}}{s!} &\leq \|f(0)\|_{B_m} + \sqrt{1 - \|f(0)\|_{B_m}^2} \frac{\rho_X^k(x)}{1 - \rho_X(x)} \\&< \frac{\sqrt{5}}{2},\end{aligned}$$

且当 $|\langle f(0), D^s f(0)(x^s) \rangle| = \|f(0)\|_{B_m} \|D^s f(0)(x^s)\|_{B_m}$, $s = k, k+1, \dots$ 时, 对 $\rho_X(x) < r_k$, 有

$$\|f(0)\|_{B_m} + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{\|D^s f(0)(x^s)\|_{B_m}}{s!} \leq \|f(0)\|_{B_m} + (1 - \|f(0)\|_{B_m}^2) \frac{\rho_X^k(x)}{1 - \rho_X(x)} < 1,$$

其中 r_k 同定理 2.2.

定理 2.5 若 $f(x) = f(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{D^{sk} f(0)(x^{sk})}{(sk)!} \in H(G_X, B_Y)$, 且 $a = f(0) \neq 0$, 则对 $\rho_X(x) < \sqrt[k]{\frac{1}{3}}$, $k = 1, 2, \dots$, 有

$$|T_a(f(0))| + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|T_a(D^{sk} f(0)(x^{sk}))|}{(sk)!} < 1,$$

且当 $G_X = B_X$ 时, 每个值 $\sqrt[k]{\frac{1}{3}}$ 是最佳的.

证明 由引理 2.1 及

$$F_C^{B_Y}(y, \eta) \geq \frac{|T_y(\eta)|}{1 - \|y\|_{B_Y}^2}, \quad \eta \in Y \quad (2.4)$$

(参见文献 [24, 引理 3.1]) 推得

$$(\rho_X(x))^{sk} \geq F_C^{B_Y}\left(f(0), \frac{D^{sk} f(0)(x^{sk})}{(sk)!}\right) \geq \frac{|T_a(D^{sk} f(0)(x^{sk}))|}{(sk)!(1 - \|f(0)\|_{B_Y}^2)}, \quad s = 1, 2, \dots,$$

即

$$\frac{|T_a(D^{sk} f(0)(x^{sk}))|}{(sk)!} \leq (1 - \|f(0)\|_{B_Y}^2) (\rho_X(x))^{sk}, \quad s = 1, 2, \dots$$

根据引理 2.1 及 $|T_a(f(0))| = \|f(0)\|_{B_Y} < 1$, 对 $\rho_X(x) < \sqrt[k]{\frac{1}{3}}$, 有

$$\begin{aligned} |T_a(f(0))| + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|T_a(D^{sk}f(0)(x^{sk}))|}{(sk)!} &\leq \|f(0)\|_{B_Y} + (1 - \|f(0)\|_{B_Y}^2) \sum_{s=1}^{\infty} (\rho_X(x))^{sk} \\ &\leq \|f(0)\|_{B_Y} + (1 - \|f(0)\|_{B_Y}^2) \frac{\rho_X^k(x)}{1 - \rho_X^k(x)} \\ &< 1. \end{aligned}$$

另外考虑

$$f(x) = \frac{\lambda - T_u^k(x)}{1 - \lambda T_u^k(x)} v, \quad x \in B_X, \quad \|u\|_{B_X} = 1, \quad \lambda \in (0, 1),$$

其中 $\|v\|_{B_Y} = 1$. 不难验证 f 满足定理 2.5 的条件. 取 $x = ru$, 简单计算知,

$$\begin{aligned} |T_a(f(0))| + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|T_a(D^{sk}f(0)(x^{sk}))|}{(sk)!} &= \lambda + \sum_{s=1}^{\infty} (\lambda^{s-1} - \lambda^{s+1}) r^{sk} \\ &= \lambda + \frac{(1 - \lambda^2) r^k}{1 - \lambda r^k} \\ &> 1. \end{aligned}$$

又 $\lambda + \frac{(1 - \lambda^2) r^k}{1 - \lambda r^k} > 1$ 当且仅当

$$r > \frac{1}{\sqrt[k]{1 + 2\lambda}} = \frac{1}{\sqrt[k]{1 + 2\|f(0)\|_{B_Y}}}.$$

注意到, 当 $\|f(0)\|_{B_Y} \rightarrow 1^-$ 时, 有 $\frac{1}{\sqrt[k]{1 + 2\|f(0)\|_{B_Y}}} \rightarrow \sqrt[k]{\frac{1}{3}}$. 因此, 每个值 $\sqrt[k]{\frac{1}{3}}$ 是最佳的. $\square$

类似定理 2.5 的证明, 直接推得如下推论成立.

推论 2.4 若 $f(x) = f(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{D^{sk}f(0)(x^{sk})}{(sk)!} \in H(G_X, B_Y)$, 且 $a = f(0) \neq 0$, 则对 $\rho_X(x) < \frac{1}{\sqrt[k]{2 + \|f(0)\|_{B_Y}}}$, $k = 1, 2, \dots$, 有

$$|T_a(f(0))| + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|T_a(D^{sk}f(0)(x^{sk}))|}{(sk)!} < 1,$$

其中 $f(0)$ 固定, 且当 $\rho_X(x) > \frac{1}{\sqrt[k]{1 + 2\|f(0)\|_{B_Y}}}$, $k = 1, 2, \dots$ 时, 存在 $f \in H(G_X, B_Y)$ 使得上述不等式不成立.

定理 2.6 若 $f(x) = f(0) + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{D^s f(0)(x^s)}{s!} \in H(G_X, B_Y)$, 且 $a = f(0) \neq 0$, 则对 $\rho_X(x) < r_k$, 有

$$|T_a(f(0))| + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{|T_a(D^s f(0)(x^s))|}{s!} < 1,$$

其中 r_k 同定理 2.2, 且当 $G_X = B_X$ 时, 值 $r_1 = \frac{1}{3}$ 是最佳的.

证明 由引理 2.1 及 (2.4) 知,

$$(\rho_X(x))^s \geq F_C^{B_Y} \left(f(0), \frac{D^s f(0)(x^s)}{s!} \right) \geq \frac{|T_a(D^s f(0)(x^s))|}{s!(1 - \|f(0)\|_{B_Y}^2)}, \quad s = k, k+1, \dots,$$

即

$$\frac{|T_a(D^s f(0)(x^s))|}{s!} \leq (1 - \|f(0)\|_{B_Y}^2)(\rho_X(x))^s, \quad s = k, k+1, \dots \quad (2.5)$$

再根据 (2.5) 及 $|T_a(f(0))| = \|f(0)\|_{B_Y} < 1$, 对 $\rho_X(x) < r_k, k = 1, 2, \dots$, 有

$$\begin{aligned} |T_a(f(0))| + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{|T_a(D^s f(0)(x^s))|}{s!} &\leq \|f(0)\|_{B_Y} + (1 - \|f(0)\|_{B_Y}^2) \sum_{s=k}^{\infty} (\rho_X(x))^s \\ &\leq \|f(0)\|_{B_Y} + (1 - \|f(0)\|_{B_Y}^2) \frac{\rho_X^k(x)}{1 - \rho_X(x)} \\ &< 1. \end{aligned}$$

$r_1 = \frac{1}{3}$ 是最佳值, 参见定理 2.5 证明中 $k = 1$ 情形的讨论. $\square$

注 2.3 当 $X = Y = \mathbb{C}, k = 1$ 时, 定理 2.1、2.3 和 2.5 均为经典的 Bohr 定理.

注 2.4 本节中的 X 和 Y 可以是两不同的无限维或有限维复 Banach 空间如 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m (m \neq n)$.

3 有界对称域上全纯映射精细的 Bohr 定理

在本节中, 假设 $\Omega \subset V$ 是有限维复向量空间 V 中的有界圆型对称域, $\|\cdot\|_{\Omega}$ 表示 Ω 的谱范数. 更多的细节参见文献 [20].

现建立本节的主要定理.

定理 3.1 设 $k \in \mathbb{N}^+, f(z) = f(0) + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{D^s f(0)(z^s)}{s!} \in H(\Omega, \Omega)$, 且 $\phi \in \text{Aut}(\Omega)$ 满足 $\phi_{f(0)}(f(0)) = 0$, 则对 $\|z\|_{\Omega} < r_k, k = 1, 2, \dots$, 有

$$\frac{\|D\phi(f(0))f(0)\|_{\Omega}}{\|D\phi(f(0))\|_{\Omega}} + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{\|D\phi(f(0))D^s f(0)(z^s)\|_{\Omega}}{s!\|D\phi(f(0))\|_{\Omega}} < 1,$$

其中 r_k 同定理 2.2, 且值 $r_1 = \frac{1}{3}$ 是最佳的.

证明 由 $\|D\phi(f(0))\|_{\Omega} = \frac{1}{1 - \|f(0)\|_{\Omega}^2}$ 和 $\frac{\|D\phi(f(0))D^s f(0)(z^s)\|_{\Omega}}{s!} \leq \|z\|_{\Omega}^s, s = 1, 2, \dots$ (参见文献 [25, 26]) 知, 对 $\|z\|_{\Omega} < r_k, k = 1, 2, \dots$, 有

$$\begin{aligned} &\frac{\|D\phi(f(0))f(0)\|_{\Omega}}{\|D\phi(f(0))\|_{\Omega}} + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{\|D\phi(f(0))D^s f(0)(z^s)\|_{\Omega}}{s!\|D\phi(f(0))\|_{\Omega}} \\ &\leq \|f(0)\|_{\Omega} + \frac{1}{\|D\phi(f(0))\|_{\Omega}} \frac{\|z\|_{\Omega}^k}{1 - \|z\|_{\Omega}} \\ &\leq \|f(0)\|_{\Omega} + \frac{1 - \|f(0)\|_{\Omega}^2}{2} \\ &< 1. \end{aligned}$$

值 $r_1 = \frac{1}{3}$ 是最佳的讨论同文献 [20]. $\square$

类似文献 [20, 定理 5] 的证明, 推得下列推论成立.

命题 3.1 设 $f(z) = f(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{D^{sk} f(0)(z^{sk})}{(sk)!} \in H(\Omega, \Omega)$, 且 $\phi \in \text{Aut}(\Omega)$ 满足 $\phi(f(0)) = 0$, 则对 $\|z\|_{\Omega} < \sqrt[k]{\frac{1}{3}}, k = 1, 2, \dots$, 有

$$\frac{\|D\phi(f(0))f(0)\|_{\Omega}}{\|D\phi(f(0))\|_{\Omega}} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\|D\phi(f(0))D^{sk} f(0)(z^{sk})\|_{\Omega}}{(sk)!\|D\phi(f(0))\|_{\Omega}} < 1,$$

且每个值 $\sqrt[k]{\frac{1}{3}}$ 是最佳的.

命题 3.2 设 $f(z) = f(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{D^{sk}f(0)(z^{sk})}{(sk)!} \in H(\Omega, \Omega)$, 且 $\phi \in \text{Aut}(\Omega)$ 满足 $\phi(f(0)) = 0$, 则对 $\|z\|_{\Omega} < \frac{1}{\sqrt[k]{2+\|f(0)\|_{\Omega}}}$, 有

$$\frac{\|D\phi(f(0))f(0)\|_{\Omega}}{\|D\phi(f(0))\|_{\Omega}} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\|D\phi(f(0))D^{sk}f(0)(z^{sk})\|_{\Omega}}{(sk)!\|D\phi(f(0))\|_{\Omega}} < 1,$$

其中 $f(0)$ 固定, 且当 $\|z\|_{\Omega} > \frac{1}{\sqrt[k]{1+2\|f(0)\|_{\Omega}}}$ 时, 存在 $f \in H(\Omega, \Omega)$ 使得上述不等式不成立.

注 3.1 当 $k=1$ 时, 定理 3.1 即为文献 [20, 定理 5].

4 J^* -代数单位球上全纯映射精细的 Bohr 定理

设 H 和 K 是复 Hilbert 空间. 对每个算子 $A \in L(H, K)$, 存在唯一的正定算子 $A^* \in L(K, H)$ 使得 $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ 对任意 $x \in H$ 和 $y \in K$ 成立, 其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是复 Hilbert 空间的内积. 若对任意 $A \in L$, 有 $AA^*A \in L$, 则称 $L(H, K)$ 的一个闭的复线性子空间 L 是 J^* -代数.

现给出本节的主要定理.

定理 4.1 设 X 和 Y 是复 Banach 空间, G_X 是 X 中的有界平衡域, B_Y 是 Y 中的单位球且是齐性域. 若 $k \in \mathbb{N}^+$, $f(x) = f(0) + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{D^s f(0)(x^s)}{s!} \in H(G_X, B_Y)$, 且 $\phi \in \text{Aut}(B_Y)$ 满足 $\phi(f(0)) = 0$, 则对 $\rho_X(x) < r_k$, $k=1, 2, \dots$, 有

$$\frac{\|D\phi(f(0))f(0)\|_{B_Y}}{\|D\phi(f(0))\|_{B_Y}} + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{\|D\phi(f(0))D^s f(0)(x^s)\|_{B_Y}}{s!\|D\phi(f(0))\|_{B_Y}} < 1,$$

其中 r_k 同定理 2.2, 且值 $r_1 = \frac{1}{3}$ 是最佳的.

证明 注意到 $\|D\phi(f(0))\|_{B_Y} = \frac{1}{1-\|f(0)\|_{B_Y}^2}$ 和 $\frac{\|D\phi(f(0))D^s f(0)(x^s)\|_{B_Y}}{s!} \leq \rho_X^s(x)$, $s=1, 2, \dots$ (参见文献 [19, 引理 3.5, 定理 3.1]), 则对 $\rho_X(x) < r_k$, $k=1, 2, \dots$, 有

$$\begin{aligned} & \frac{\|D\phi(f(0))f(0)\|_{B_Y}}{\|D\phi(f(0))\|_{B_Y}} + \sum_{s=k}^{\infty} \frac{\|D\phi(f(0))D^s f(0)(x^s)\|_{B_Y}}{s!\|D\phi(f(0))\|_{B_Y}} \\ & \leq \|f(0)\|_{B_Y} + \frac{1}{\|D\phi(f(0))\|_{B_Y}} \frac{\rho_X^k(x)}{1-\rho_X(x)} \\ & \leq \|f(0)\|_{B_Y} + \frac{1-\|f(0)\|_{B_Y}^2}{2} \\ & < 1. \end{aligned}$$

值 $r_1 = \frac{1}{3}$ 是最佳的讨论同文献 [19]. □

类似文献 [19, 定理 3.1] 的证明, 易证如下命题成立.

命题 4.1 设 X 和 Y 是复 Banach 空间, G_X 是 X 中的有界平衡域, B_Y 是 Y 中的单位球且是齐性域. 若 $f(x) = f(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{D^{sk}f(0)(x^{sk})}{(sk)!} \in H(G_X, B_Y)$, 且 $\phi \in \text{Aut}(B_Y)$ 满足 $\phi(f(0)) = 0$, 则对 $\rho_X(x) < \sqrt[k]{\frac{1}{3}}$, $k=1, 2, \dots$, 有

$$\frac{\|D\phi(f(0))f(0)\|_{B_Y}}{\|D\phi(f(0))\|_{B_Y}} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\|D\phi(f(0))D^{sk}f(0)(x^{sk})\|_{B_Y}}{(sk)!\|D\phi(f(0))\|_{B_Y}} < 1,$$

且每个值 $\sqrt[k]{\frac{1}{3}}$ 是最佳的.

命题 4.2 设 X 和 Y 是复 Banach 空间, G_X 是 X 中的有界平衡域, B_Y 是 Y 中的单位球且是齐性域. 若 $f(x) = f(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{D^{sk} f(0)(x^{sk})}{(sk)!} \in H(G_X, B_Y)$, 且 $\phi \in \text{Aut}(B_Y)$ 满足 $\phi(f(0)) = 0$, 则对 $\rho_X(x) < \frac{1}{\sqrt[k]{2+\|f(0)\|_{B_Y}}}$, $k = 1, 2, \dots$, 有

$$\frac{\|D\phi(f(0))f(0)\|_{B_Y}}{\|D\phi(f(0))\|_{B_Y}} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\|D\phi(f(0))D^{sk}f(0)(x^{sk})\|_{B_Y}}{(sk)!\|D\phi(f(0))\|_{B_Y}} < 1,$$

且当 $\rho_X(x) > \frac{1}{\sqrt[k]{1+2\|f(0)\|_{B_Y}}}$, $k = 1, 2, \dots$ 时, $f \in H(G_X, B_Y)$ 使得上述不等式不成立.

注 4.1 若 $k = 1$, 则定理 4.1 即为文献 [19, 定理 3.1].

致谢 感谢审稿人对本文给出中肯且有意义的意见.

参考文献

- Bohr H. A theorem concerning power series. *Proc Lond Math Soc* (3), 1914, 13: 1–5
- Tomic M. Sur un théorème de H. Bohr. *Math Scand*, 1962, 11: 103–106
- Sidon S. Über einen Satz von Herrn Bohr. *Math Z*, 1927, 26: 731–732
- Abu Muhanna Y, Ali R M. Bohr's phenomenon for analytic functions and the hyperbolic metric. *Math Nachr*, 2013, 286: 1059–1065
- Abu Muhanna Y, Ali R M, Ng Z C, et al. Bohr radius for subordinating families of analytic functions and bounded harmonic mappings. *J Math Anal Appl*, 2014, 420: 124–136
- Ali R M, Barnard R W, Solynin A Y. A note on Bohr's phenomenon for power series. *J Math Anal Appl*, 2017, 449: 154–167
- Kayumov I R, Ponnusamy S. Bohr inequality for odd analytic functions. *Comput Methods Funct Theory*, 2017, 17: 679–688
- Kayumov I R, Ponnusamy S. Bohr's inequalities for the analytic functions with lacunary series and harmonic functions. *J Math Anal Appl*, 2018, 465: 857–871
- Aizenberg L. Multidimensional analogues of Bohr's theorem on power series. *Proc Amer Math Soc*, 2000, 128: 1147–1155
- Aizenberg L, Aytuna A, Djakov P. Generalization of a theorem of Bohr for bases in spaces of holomorphic functions of several complex variables. *J Math Anal Appl*, 2001, 258: 429–447
- Boas H P, Khavinson D. Bohr's power series theorem in several variables. *Proc Amer Math Soc*, 1997, 125: 2975–2979
- Defant A, Garcia D, Maestre M. Bohr's power series theorem and local Banach space theory. *J Reine Angew Math*, 2003, 557: 173–197
- Boas H P. Majorant series. *J Korean Math Soc*, 2000, 37: 321–337
- Dineen S, Timoney R M. Absolute bases, tensor products and a theorem of Bohr. *Studia Math*, 1989, 94: 227–234
- Dineen S, Timoney R M. On a problem of H. Bohr. *Bull Soc Roy Sci Liège*, 1991, 60: 401–404
- Bayart F, Pellegrino D, Seoane-Sepúlveda J B. The Bohr radius of the n -dimensional polydisk is equivalent to $\sqrt{(\log(n))/n}$. *Adv Math*, 2014, 264: 726–746
- Liu T S, Wang J F. An absolute estimate of the homogeneous expansions of holomorphic mappings. *Pacific J Math*, 2007, 231: 155–166
- Hua L K. *Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains*. Translations of Mathematical Monographs, vol. 6. Providence: Amer Math Soc, 1963
- Hamada H, Honda T, Kohr G. Bohr's theorem for holomorphic mappings with values in homogeneous balls. *Israel J Math*, 2009, 173: 177–187
- Roos G. H Bohr's theorem for bounded symmetric domains. *arXiv:0812.4815*, 2009
- Liu T S, Zhang W J. A distortion theorem of biholomorphic convex mappings in a Banach space (in Chinese). *Acta Math Sinica Chin Ser*, 2003, 46: 1041–1046 [刘太顺, 张文俊. 复 Banach 空间中单位球上双全纯凸映射的偏差定理. *数学学报*, 2003, 46: 1041–1046]
- Wang J F, Liu Y. The generalized Schwarz-Pick estimates of arbitrary order on the unit polydisk. *Complex Anal Oper Theory*, 2013, 7: 519–528
- Graham I, Kohr G. *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*. New York: Marcel Dekker, 2003

- 24 Liu X S, Liu T S. The sharp distortion theorem for a subclass of close-to-convex mappings. *Chinese J Contemp Math*, 2012, 33: 67–76
- 25 Loos O. Bounded Symmetric Domains and Jordan Pairs. *Mathematical Lectures*. Irvine: University of California at Irvine, 1977
- 26 Roos G. Jordan triple systems. In: Faraut J, Kaneyuki S, Koranyi A, et al. eds. *Analysis and Geometry on Complex Homogeneous Domains*. *Progress in Mathematics*, vol. 185. Berlin: Springer, 2000, 425–536

Refined Bohr's theorem for holomorphic mappings in several complex variables

Xiaosong Liu, Taishun Liu & Wenjun Zhang

Abstract In this paper, we first establish the refined Bohr's theorem of norm type for holomorphic mappings from the balanced domain in complex Banach spaces to the unit polydisk in $\mathbb{C}^n$ under some restricted conditions and the refined Bohr's theorem of functional type for holomorphic mappings from the unit ball in one complex Banach space X to the unit ball in another complex Banach space Y without any holomorphic automorphism. Secondly, we get the refined Bohr's theorem for holomorphic mappings on bounded symmetric domains. We also obtain the refined Bohr's theorem for holomorphic mappings on the unit ball of a J^* -algebra. Our results extend Bohr's theorem from one dimension to higher dimensions.

Keywords Bohr theorem, norm type, functional type, balanced domain, different dimensions

MSC(2020) 32A30, 32H02, 30C45

doi: 10.1360/SCM-2019-0052