中国科学: 数学 2019年 第49卷 第3期: 389～402
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
论 文

正则 Dirichlet 形式的正则子空间

献给王梓坤教授 90 华诞

何萍[1], 应坚刚[2*]

1. 上海财经大学数学学院, 上海 200433;
2. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: pinghe@shufe.edu.cn, jgying@fudan.edu.cn

收稿日期: 2017-07-10; 接受日期: 2017-11-30; 网络出版日期: 2018-12-28; * 通信作者

摘要 正则 Dirichlet 形式的正则子空间问题, 即存在性及其刻画等问题, 是作者关注近 20 年的问题, 该问题来自第二作者对于 Markov 过程的 Killing 变换的 Dirichlet 形式刻画问题的研究, 这个问题是 Dirichlet 形式理论的一个基本问题, 在最近 10 年中取得了一点进展. 本文将主要叙述问题及其背景, 并介绍围绕该问题得到的一些结果与遗留的问题.

关键词 Dirichlet 型 Markov 过程 正则子空间

MSC (2010) 主题分类 31C25

1 引言

作者对数学的基本理解是美与简洁, 正如 Hardy 所说, 数学容不下丑陋的东西. 一个理论再有用, 如果它本身不美, 数学中也不会有它的位置. 时齐 Markov 过程一直是概率论中最重要的研究方向之一, 不仅因为它有实际背景, 而且它与经典的分析有深刻的联系, 它的转移半群联系着算子半群, 算子半群联系着无穷小算子, 它通常是一个椭圆型的算子, 所以, 与调和分析和偏微分方程有本质的联系, 通过 Markov 过程, 可以直观地看到怎么解一个 Dirichlet 问题. 当然 Markov 过程理论本身也是非常漂亮的.

Dirichlet 形式的理论属于位势论的范畴, 是用分析的工具来研究 Markov 过程, 结合分析和 Markov 过程的美, 在过程的构造方面特别有用. 通常要构造一个 Markov 过程就必须要构造转移函数, 如经典的 Feller 半群理论, 但用 Dirichlet 形式理论就只需构造一个满足条件的二次型就可以了, 几乎所有的 Markov 过程性质都可以通过 Dirichlet 形式来刻画. Dirichlet 形式的理论在 20 世纪 50 年代由法国的 Beurling、Choquet 和 Deny 初创, 后来日本数学家 Fukushima 于 1970 年左右在正则性条件下构造出一个很好的 Markov 过程, 此后 30 年, 这个理论是概率论研究的热点, 许多中国概率学者投身其中, 如

英文引用格式: He P, Ying J G. Regular subspaces of regular Dirichlet forms (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 389–402, doi: 10.1360/N012017-00152

马志明、郑伟安、陈振庆、张土生和本文作者等. 现在热潮慢慢退去, 但本文作者兴趣还一直沉浸于其中的一个问题: 正则 Dirichlet 形式的正则 Dirichlet 子空间的存在性和刻画问题. 这个问题是作者在研究 Markov 过程的 Killing 变换如何用 Dirichlet 形式表达时提出来的, 也算是 Dirichlet 形式理论的一个基础性问题. 作者在 2005 年与 Fukushima 合作做出第一个结果 (参见文献 [1]), 后来也取得了一些结果, 但离真正解决还很遥远. 本文将综述该问题及其进展, 鉴于篇幅, 不包含证明细节, 有兴趣的读者可参见文献 [2–6]. 这些结果从形式上看, 条件与结论都简洁清晰, 也容易理解其背后的直观意义, 符合作者对于数学的理解, 正因为如此, 作者近 20 年执着于此问题, 更希望有兴趣的专家、学生参与其中, 以进一步完善 Dirichlet 形式的理论.

2 Markov 过程与 Dirichlet 形式

本节主要参见 Blumenthal 和 Getoor 的专著 [7] 和 Fukushima 的专著 [8]. 假设有一个局部紧具有可数基的空间 E, $\mathcal{B}$ 是其上的 Borel σ- 代数, m 是一个具有完全支撑的 Radon 测度. 这样, 我们有一个 L^2 空间 $L^2(E;m)$.

一个转移半群 $(P_t : t > 0)$ 是指 E 上的一族核满足

(1) $P_{t+s} = P_t P_s$;

(2) $P_t(x, E) \leqslant 1$.

称 $X = (X_t, \mathbb{P}^x)$ 是 E 上一个转移半群为 (P_t) 的 Markov 过程, 若一个随机过程 $(X_t : t \geqslant 0)$ 和概率测度族 $(\mathbb{P}^x : x \in E)$ 满足

(1) (X_t) 是轨道右连续且具有强 Markov 性的随机过程;

(2) 对任何 $A \in \mathscr{B}$, $x \in E$, 有

$$\mathbb{E}^x[X_{t+s} \in A \mid \mathscr{F}_t] = P_s(X_t, A), \quad \text{a.s.};$$

(3) 对任何 $x \in E$, $\mathbb{P}^x(X_0 = x) = 1$, Brown 运动和 Lévy 过程是众所周知的 Markov 过程.

定义 2.1 (1) 一个形式 $\mathscr{E}$ 是指定义在 $L^2(E;m)$ 的某个子空间 $D(\mathscr{E})$ 上的双线性形式;

(2) 一个形式 $(\mathscr{E}, D(\mathscr{E}))$ 称为对称的, 如果对任何 $u, v \in D(\mathscr{E})$, 有

$$\mathscr{E}(u,v) = \mathscr{E}(v,u)$$

且是非负定的, 即对任何 $u \in D(\mathscr{E})$, 有 $\mathscr{E}(u,u) \geqslant 0$;

(3) 对任何 $\alpha > 0$, $u, v \in D(\mathscr{E})$, 定义

$$\mathscr{E}_\alpha(u,v) := \mathscr{E}(u,v) + \alpha \int uv dm,$$

如果 $\mathscr{E}$ 是非负定的, 那么 $\mathscr{E}_\alpha$ 是内积;

(4) 一个形式 $(\mathscr{E}, D(\mathscr{E}))$ 称为闭对称形式, 如果它是稠定的 (定义域 $D(\mathscr{E})$ 是稠密的) 对称非负定形式且 $D(\mathscr{E})$ 关于内积 $\mathscr{E}_1$ 是 Hilbert 空间.

对于闭对称形式 $(\mathscr{E}, D(\mathscr{E}))$, 我们习惯地记为 $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$. 由标准的理论知, 它唯一对应一个 $L^2(E;m)$ 上的自共轭算子 $(L, D(L))$:

$$D(L) \subset \mathscr{F}, \quad \mathscr{E}(u,v) = (-Lu, v), \quad u \in D(L), \quad v \in \mathscr{F}.$$

由 Hill-Yoshida 定理知,

$$T_t = \mathrm{e}^{tL}, \quad t \geqslant 0$$

是对应的对称压缩算子半群, 还有对应的预解 (G_α). 到现在为止, 所有的概念和结论都是分析中的标准结论, 与概率论没有关系. 把形式与概率论联系起来的概念是所谓的 Markov 性. 直观地, Markov 性的目的是使得对应的半群满足 Markov 性:

$$T_t 1 \leqslant 1.$$

设有 E 上的函数 u 和 v, 称 v 是 u 的正规收缩, 是指对几乎所有的 $x, y \in E$, 有

(1) $|v(x)| \leqslant |u(x)|$;

(2) $|v(x) - v(y)| \leqslant |u(x) - u(y)|$.

显然, $|u|$ $(0 \vee u \wedge 1)$ 都是 u 的正规收缩. 现在叙述 Markov 性.

定义 2.2 设 $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ 是闭对称形式. 如果对任何 $u \in \mathscr{F}$ 且 v 是 u 的正规收缩, 有 $v \in \mathscr{F}$ 且

$$\mathscr{E}(v, v) \leqslant \mathscr{E}(u, u),$$

那么称正规收缩在 $\mathscr{E}$ 上可操作, 这时称 $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ 是一个 Dirichlet 形式.

一个闭对称形式 $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ 是 Dirichlet 形式当且仅当其半群 (T_t) 满足: 对任何满足 $0 \leqslant u \leqslant 1$ 的 $u \in L^2(E; m)$, 有

$$0 \leqslant T_t u \leqslant 1.$$

例 2.1 设 $E = \mathbb{R}$, m 是 Lebesgue 测度, 则 $(\frac{1}{2}\mathbf{D}, H^1(\mathbb{R}))$ 是 Brown 运动对应的 Dirichlet 形式, 其中

$$\mathbf{D}(u, v) = \int u' v' dm, \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}),$$

$H^1(\mathbb{R})$ 是 Sobolev 空间.

设 $X = (X_t, \mathbb{P}^x)$ 是 E 上的一个 Hunt 过程, 其转移半群是 (P_t). 称 X 关于 m 对称, 是指对 E 上任何非负可测函数 f 和 g, 有

$$\int P_t f \cdot g dm = \int f \cdot P_t g dm.$$

这时 (P_t) 可以看成是 $L^2(E; m)$ 上具有 Markov 性的对称压缩算子半群 (T_t). 然后定义 $\mathscr{F}$ 是使得

$$\sup_{t>0} \langle u, u - T_t u \rangle_{L^2} < \infty$$

的平方可积函数 u 的全体, 定义

$$\mathscr{E}(u, u) := \sup_{t>0} \langle u, u - T_t u \rangle_{L^2}.$$

因为对称性 $\mathscr{E}$ 由其在对角线上的值唯一决定.

定理 2.1 上面定义的 $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ 是一个 Dirichlet 形式.

这个定理说明对称 Markov 过程可以决定一个 Dirichlet 形式. 反过来, 一个 Dirichlet 形式是否总是由某个 Markov 过程以这样的方式来诱导? 这个问题首先是由 Fukushima 在 1970 年回答的, 后来在 1990 年左右由 Albeverio、马志明和 Röckner 完善. 构造一个 Markov 过程的关键是有一个转移半群, 转移半群是核组成的一个半群, Fukushima 发现从一个对称压缩算子半群反过去得到转移半群的一个充分条件是形式的定义域中有足够多的连续函数, 就是他引入的所谓正则性条件.

定义 2.3 一个 Dirichlet 形式 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 称为是正则的, 如果定义域中的紧支撑连续函数 $C_0(E)\cap\mathscr{F}$ 在 $C_0(E)$ 中依最大值范数稠密, 而在 $\mathscr{F}$ 中依 $\mathscr{E}_1$ 范数稠密.

定理 2.2 [8] 如果 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 是一个正则的 Dirichlet 形式, 那么存在一个关于 m 对称的 Hunt 过程 X 使得 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 是由 X 诱导的, 这个 Hunt 过程在 $\mathbb{P}^m$ 等价的意义下唯一.

但是正则并不是一个很稳定的概念, 因为它在很多常见的变换下不能保留. Albeverio、马志明和 Röckner 引入了拟正则的概念, 证明了一个对称的 Borel 右过程诱导的对称形式是拟正则 Dirichlet 形式, 反之亦然. 本文主要讨论正则的情形, 拟正则相关概念在这里不再赘述, 有兴趣读者可以参见马志明和 Röckner 的专著 [9].

3 问题的背景

本节的结果可参见文献 [10,11]. 考虑 Markov 过程的 Killing 变换. 首先简要介绍 Killing 变换. 给定一个具有转移半群 (P_t) 的 Markov 过程 $X=(X_t,\mathbb{P}^x)$ 和一个取 $[0,1]$ 值的乘泛函 $M=(M_t)$, 即满足适应性和乘性:

$$M_{s+t}=M_s\cdot M_t\circ\theta_s,\quad s,t\geqslant 0$$

的随机过程, $(\mathscr{F}_t)$ 是过程的自然流. 注意, 由于乘性, 取 $[0,1]$ 值和它的递减性是等价的. 再假设对任何 $x\in E$, 有

$$\mathbb{P}^x(M_0=1)=1.$$

这意味着变换不改变状态空间. 定义概率测度

$$\mathbb{Q}^x(A):=\mathbb{E}^x\left(\int_0^\infty 1_A\circ k_t d(-M_t)\right),\quad A\in\mathscr{F}_\infty,$$

其中 (k_t) 是轨道上的 Killing 算子, 即保留时间 t 前的轨道不变, 将时间 t 后的轨道变成坟墓点. 那么, 在测度族 $(\mathbb{Q}^x)$ 下, (X_t) 也是一个 Markov 过程, 其转移半群是由下式决定:

$$Q_tf(x)=\mathbb{E}^x(f(X_t)M_t).$$

我们把新的 Markov 过程记为 Y, 称其为 X 的 M- 子过程, 这个变换也称为子过程变换. 如果 X 对应一个 Dirichlet 形式, 那么新过程 Y 是不是也对应一个 Dirichlet 形式呢?

假设 X 关于 m 对称, 那么它自然诱导它的 Dirichlet 形式 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$. 首先一个问题是 Y 是不是也关于 m 对称? 遗憾的是, 一般不是. 那么什么时候是呢? 我们需要引入 M 关于 m 的 Revuz 测度:

$$\nu_M(A\times B)=\lim_{t\downarrow 0}\mathbb{E}^m\left[\int_0^t 1_A(X_{s-})1_B(X_s)d(-M_s)\right],\quad A,B\in\mathcal{B}.$$

这个测度是 $E\times E$ 上的测度, 实际上是 M 的无穷小测度, 它几乎唯一地决定了 M. M 连续 (一直到生命时 ζ 前) 的充分必要条件是测度集中在对角线上.

我们称 M 关于 m 对称, 是指测度 ν_M 对称:

$$\nu_M(A\times B)=\nu_M(B\times A).$$

定理 3.1 [10, 11] Markov 过程 Y 关于 m 对称的充分必要条件是 M 关于 m 对称.

在这个前提下, Markov 过程 Y 也诱导一个 Dirichlet 形式, 记为 $(\mathscr{E}',\mathscr{F}')$. 注意如果 M 不是对称的, 那么 Y 也诱导一个形式, 它不是对称的, 但是也满足界面条件, 称为非对称的 Dirichlet 形式.

现在的问题是 $(\mathscr{E}',\mathscr{F}')$ 怎么用 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 来表达? 这个表达是 Feynman-Kac 公式的一种推广.

定理 3.2 [10] 如果 M 对称, 那么,

$$\begin{cases}\mathscr{F}'=\mathscr{F}\cap L^2(\bar{\nu}_M),\\ \mathscr{E}'(u,v)=\mathscr{E}(u,v)+\nu_M(u\otimes v), \quad u,v\in\mathscr{F}',\end{cases}$$

其中 $\bar{\nu}_M$ 是 ν_M 的边缘测度, $u\otimes v$ 定义一个二元函数

$$u\otimes v(x,y)=u(x)v(y).$$

在这个表达式下, 我们还可以证明

(1) $\mathscr{F}'$ 是 $\mathscr{F}$ 的稠子空间;

(2) 当 u,v 非负时, $\mathscr{E}'(u,v)\geqslant\mathscr{E}(u,v)$.

注意这两个条件中没有 M 出现. 为了方便, 当这两个条件成立时, 称 Dirichlet 形式 $(\mathscr{E}',\mathscr{F}')$ 强从属于 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$. 如果把其中的稠密性要求去掉时, 我们称 Dirichlet 形式 $(\mathscr{E}',\mathscr{F}')$ 从属于 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$. 这两个概念是引入我们所关心问题的关键.

怎么反过来从 Dirichlet 形式的角度来刻画对应的 Markov 过程有子过程变换的关系呢? 强从属性就够了, 参见文献 [11].

定理 3.3 [11] 设 X 和 Y 是两个关于 m 对称的 Markov 过程, 诱导的 Dirichlet 形式分别为 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 和 $(\mathscr{E}',\mathscr{F}')$, 则 Y 是 (等价于) X 的子过程的充分必要条件是 Dirichlet 形式 $(\mathscr{E}',\mathscr{F}')$ 强从属于 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$.

也就是说 Dirichlet 形式的强从属性等价于 Markov 过程的子过程变换. 但自从证明这个结果之后, 我们一直怀疑从属性本身可以推出强从属性, 为什么呢? 让我们假设 $(\mathscr{E}',\mathscr{F}')$ 从属于 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$, 用 $\mathscr{F}^0$ 表示 $\mathscr{F}'$ 在 $\mathscr{F}$ 中的 $\mathscr{E}_1$- 闭包, 那么 $(\mathscr{E},\mathscr{F}^0)$ 也是一个正则的 Dirichlet 形式且 $(\mathscr{E}',\mathscr{F}')$ 强从属于 $(\mathscr{E},\mathscr{F}^0)$. 现在再看 $(\mathscr{E},\mathscr{F}^0)$ 与 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 的关系: 它们两个都是正则的 Dirichlet 形式, 都对应于 Markov 过程, 但 $\mathscr{F}^0$ 是 $\mathscr{F}$ 的子空间. 现在我们可以给出正则子空间的定义.

定义 3.1 设 $(\mathscr{E}^i,\mathscr{F}^i)$ $(i=1,2)$ 是 $L^2(E;m)$ 上两个正则 Dirichlet 形式. 如果 $\mathscr{F}^1\subset\mathscr{F}^2$ 且 $\mathscr{E}^2$ 限制在 $\mathscr{F}^1$ 上等同于 $\mathscr{E}^1$, 那么称 $(\mathscr{E}^1,\mathscr{F}^1)$ 是 $(\mathscr{E}^2,\mathscr{F}^2)$ 的正则 Dirichlet 子空间 (有时简称为正则子空间), 反过来, $(\mathscr{E}^2,\mathscr{F}^2)$ 是 $(\mathscr{E}^1,\mathscr{F}^1)$ 的正则 Dirichlet 扩张 (有时简称为正则扩张).

这样, 从属与强从属是否等价的问题等价于 $\mathscr{F}^0$ 是否必然与 $\mathscr{F}$ 相同的问题. 这便是我们所关心的主要问题: 一个正则的 Dirichlet 形式是否有非平凡的正则 Dirichlet 子空间?

这乍看上去是不可能的, 从 Brown 运动的角度看, 我们平常熟悉的子空间的例子是 $[0,1]$ 上的反射 Brown 运动和 $[0,1]$ 上的边界吸收的 Brown 运动, 但这两个 Brown 运动正则的空间不同, 一个在状态空间 $[0,1]$ 上正则, 另外一个在开区间 $(0,1)$ 上正则. 另外, 分析中一个基本的定理说明自共轭算子是极大的, 即不存在自共轭的扩张. 所以直观地看, 这个问题的答案是否定的. 尽管作者认为问题的答案是否定的, 但一直都毫无头绪. 那作者为什么一直对这个问题有兴趣呢? 首先, 它是作者在研究中提出的问题, 很多数学工作者一辈子都在做别人提出的问题, 能做自己提出的问题当然有兴趣. 其次, Dirichlet 形式理论已经过了成熟期, 能够遇到一个该理论的基本问题并不容易. 最后, 这个问题的答案无论是肯定还是否定都很有意义, 如果答案是否定的, 那么就是说任何正则的 Dirichlet 空间没有非

平凡正则子空间, 这个结果非常漂亮; 反过来, 如果至少某些 Dirichlet 形式有非平凡正则子空间, 那么我们会看到很多平常没有关注的 Dirichlet 形式或者对应的 Markov 过程, 这也一样有很多值得继续研究的问题.

4 Brown 运动的正则子空间

2000 年, 第二作者应坚刚访问在关西大学的 Fukushima 教授, 对他叙述了自己的问题, Fukushima 对这个问题也很有兴趣, 共同从一维 Brown 运动开始, 证明了 Brown 运动没有非平凡的正则 Dirichlet 子空间 [12]. 但其后, 第二作者应坚刚的一个学生试图将这个结果推广到一维扩散过程时, 作者发现证明有问题, 这追溯到文献 [12] 的证明有问题. 改正这个问题后我们惊讶地发现 Brown 运动的 Dirichlet 形式是有非平凡的正则子空间的, 而且可以被清楚地刻画 [1].

为了叙述这个结果, 我们简单介绍一维扩散过程. 一维扩散过程是指直线上的某个区间内的连续轨道的强 Markov 过程. 我们称区间 I 上一维扩散过程 $X=(X_t,\mathbb{P}^x)$ 是正则的, 是指对任何位于区间 I 内部的 x 和 y, 有 $\mathbb{P}^x(T_y<\infty)>0$ 蕴含着 $\mathbb{P}^y(T_x<\infty)>0$, 其中 T_x 表示 x 点的首中时. 对于一个正则的一维扩散过程 X, 必定存在一个定义在 I 上的严格递增的连续函数 s, 使得对任何 $a<b\in I$ 和 $x\in(a,b)$, 有

$$\mathbb{P}^x(T_a<T_b)=\frac{\mathsf{s}(b)-\mathsf{s}(x)}{\mathsf{s}(b)-\mathsf{s}(a)}.$$

这个函数称为 X 的尺度函数, 它在相差一个仿射变换不计的意义之下是唯一的. 如果 $\mathsf{s}(x)=x$, 那么 X 有自然尺度. 显然, Brown 运动有自然尺度, 如果 X 的尺度函数为 s, 那么一维扩散 $t\mapsto \mathsf{s}(X_t)$ 有自然尺度, 即与 Brown 运动有相同的首中分布. Blumenthal-Getoor-McKean 定理指出, 两个有相同首中分布的 Markov 过程相差一个连续的时间变换, 即存在 Brown 运动 (B_t) 的一个严格递增连续加泛函 (A_t), 使得

$$\mathsf{s}(X_t)=B_{\tau_t},$$

其中 $t\mapsto\tau_t$ 是 $t\mapsto A_t$ 的逆. 记 m 是 (A_t) 关于 Lebesgue 测度的 Revuz 测度, 即它由下式定义:

$$m(f)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int\left[\mathbb{E}^x\left(\int_0^t f(X_s)dA_s\right)\right]dx.$$

测度 m 由时间变换唯一决定, 称为 X 的速度测度. 因此, 一个正则的一维扩散在区间内部的运动是由其尺度函数和速度测度决定的. 现在可以叙述我们的第一个结果. 下面当我们称一个过程的正则子空间时, 是指其对应的 Dirichlet 形式的正则子空间.

定理 4.1 [1] (1) 直线上 Brown 运动所对应的 Dirichlet 形式 $(\frac{1}{2}\mathbf{D},H^1(\mathbb{R}))$ 有非平凡的正则 Dirichlet 子空间;

(2) Brown 运动的正则 Dirichlet 子空间是不可约的;

(3) $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 是一维 Brown 运动的正则 Dirichlet 子空间当且仅当其对应的一维扩散过程的速度测度是 Lebesgue 测度, 尺度函数 s 是绝对连续的且其密度函数是 $\mathbb{R}$ 的某个子集 G 的示性函数. 这时,

$$\begin{cases}\mathscr{F}=\left\{u\in L^2(dx):du\ll d\mathsf{s},\dfrac{du}{d\mathsf{s}}\in L^2(\mathbb{R};d\mathsf{s})\right\},\\ \mathscr{E}(u,u)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{du}{d\mathsf{s}}\right)^2d\mathsf{s},\quad u\in\mathscr{F}.\end{cases}$$

定理清楚地给出了 Brown 运动正则子空间的刻画, 其中密度函数是示性函数是指

$$\frac{d\mathsf{s}(x)}{dx} = 1_G(x) = \begin{cases} 1, & x \in G, \\ 0, & x \notin G, \end{cases}$$

或者, s 可以表示为

$$\mathsf{s}(x) = \int_0^x 1_G(y)dy,$$

为了让 s 严格递增, 集合 G 必须是测度稠的, 即对于任何 $a < b$, 集合 $(a,b) \cap G$ 是正测度的. 广义 Cantor 型集合的补集有这样的性质. 容易看出, 非平凡的正则 Dirichlet 子空间 $\mathscr{F}$ 中不会有光滑函数, 从 Fukushima 的经典著作看, 其中提到的 Dirichlet 形式的例子都是从光滑函数空间出发按某种范数完备化得到的, 因此, 定义域中没有光滑函数的 Dirichlet 形式是非常奇异的, 探索它的结构是很有意义的事情.

本文开启了正则 Dirichlet 子空间的研究, 我们感兴趣于下面几个问题:

(1) 什么样的正则 Dirichlet 形式有非平凡的正则 Dirichlet 子空间?

(2) 如果有的话, 如何刻画所有正则子空间?

(3) 探索正则 Dirichlet 子空间的结构和概率含义.

下面的几个一般性的结论参见文献 [2], 这里不详细解释.

定理 4.2 (1) 正则 Dirichlet 形式的正则子空间的跳测度与 Killing 测度不会改变;

(2) 改变 Killing 测度或者跳测度中的大跳部分不会改变 Dirichlet 正则子空间的结构;

(3) 对称阶梯过程 (如对称复合 Poisson 过程) 没有正则 Dirichlet 子空间.

5 正则子空间的结构

怎么探索正则子空间的结构呢? 下面从 Brown 运动的正则子空间开始, 假设 G 是 $\mathbb{R}$ 的一个稠密开子集, 且

$$\mathsf{s}(x) = \int_0^x 1_G(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

为了 s 非平凡, 我们要求 G^c 的测度非零, 即 G 的补集是一个测度正的 Cantor 型闭集. 这时 s 在 G 上的导数是 1, 在 G^c 上没有增加. 由定理 4.1 知, 以 Lebesgue 测度为速度测度、以 s 为尺度函数的扩散过程 X 对应的 Dirichlet 形式是 Brown 运动的 Dirichlet 正则子空间. 它究竟有什么样的结构? 它在 G^c 上究竟是怎么运动的?

因为 G 是开集, 它将是可数多个不相交开区间的并:

$$G = \bigcup_n (a_n, b_n).$$

直观地看, 在每个开区间 (a_n, b_n) 上, X 就像 Brown 运动一样地运动. 怎么研究 G^c 上的运动呢? 我们采用迹的方法比较两者, Brown 运动和它的正则子空间在 G^c 留下的迹. 这等于是忽略两者在 G 上类似的运动, 只看两者的不同之处. 怎么看两者的不同之处? 当然是看迹的 Beurling-Deny 分解. 关于迹的基本介绍参见 Fukushima 的书 [8], 关于迹的 Beurling-Deny 分解参见作者和合作者 Chen、Fukushima、He 的工作 [13,14]. 什么是迹? 直观地说是在某个子集上留下的痕迹, 从概率的角度看, 就是时间变换. 如

果 X 是 E 上的一个 Markov 过程, F 是正容度子集, 那么存在一个连续递增加泛函 $A=(A_t)$ 使得其精细拟支撑恰好是 F, 即当且仅当 X 在 F 中时 A 才有增加, 考虑其逆 $\tau=(\tau_t)$, 它就会跳过那些 X 不在 F 中的时间, X 的时间变换

$$\hat{X}=(X_{\tau_t}:t\geqslant 0)$$

是一个关于 A 的 Revuz 测度对称的 Markov 过程, 它只记录 X 在 F 中的行为, 它的 Dirihclet 形式就称为 X 对应的 Dirichlet 形式在 F 上的迹.

在现在这种情形, 因为 $F=G^c$ 的 Lebesgue 测度是正的, 故可以直接用它的占有时来作时间变换, 迹的对称测度 μ 就是 Lebesgue 测度在 F 上的限制.

定理 5.1 [3] 设 $(\hat{\mathscr{E}},\hat{\mathscr{F}})$ 和 $(\hat{\mathscr{E}}^{(\mathsf{s})},\hat{\mathscr{F}}^{(\mathsf{s})})$ 分别是 $(\frac{1}{2}\mathbf{D},H^1(\mathbb{R}))$ 和 $(\mathscr{E}^{(\mathsf{s})},\mathscr{F}^{(\mathsf{s})})$ 在 $F=G^c$ 上的迹.

(1) 形式 $(\hat{\mathscr{E}}^{(\mathsf{s})},\hat{\mathscr{F}}^{(\mathsf{s})})$ 是形式 $(\hat{\mathscr{E}},\hat{\mathscr{F}})$ 的正则 Dirichlet 子空间;

(2) Dirichlet 形式 $(\hat{\mathscr{E}},\hat{\mathscr{F}})$ 和 $(\hat{\mathscr{E}}^{(\mathsf{s})},\hat{\mathscr{F}}^{(\mathsf{s})})$ 的 Beurling-Deny 分解分别是

$$\hat{\mathscr{E}}(\varphi,\varphi)=\frac{1}{2}\int_F\varphi'(x)^2dx+\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\varphi(a_n)-\varphi(b_n))^2}{|a_n-b_n|},\quad \varphi\in\hat{\mathscr{F}}_e$$

和

$$\hat{\mathscr{E}}^{(\mathsf{s})}(\varphi,\varphi)=\hat{\mathscr{E}}(\varphi,\varphi)=\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\varphi(a_n)-\varphi(b_n))^2}{|a_n-b_n|},\quad \varphi\in\hat{\mathscr{F}}_e^{(\mathsf{s})}.$$

从定理 5.1 我们可以看到以下两点:

(1) 正则 Dirichlet 子空间可能丢失原形式的扩散部分;

(2) 尽管 F 的测度是正的, 正则子空间 $(\mathscr{E}^{(\mathsf{s})},\mathscr{F}^{(\mathsf{s})})$ 在上面是一个扩散过程, 但是它的迹在其上却只有跳, 反观 Brown 运动在其上的迹却有扩散部分.
这说明正则子空间对应的过程在 F 上的运动不是一般的快, 而是快到让人观察不到.

6 一维强局部正则 Dirichlet 形式: 不可约

解决了一维 Brown 运动的问题, 我们自然转向高维 Brown 运动和 Lévy 过程, 但是基本没有进展, 所以又回到一维扩散的情形.

首先考虑的是表示: 直线上一个强局部的正则 Dirichlet 形式的表示. 仔细阅读 Fukushima 的经典著作 [8,15], 会发现其中关于 Dirichlet 形式的一个经典的表示定理, 那就是 Beurling-Deny 分解: 如果 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 是一个正则的 Dirichlet 形式, 那么, 对任何 $u,v\in\mathscr{F}$, 有

$$\mathscr{E}(u,v)=\mathscr{E}^{(c)}(u,v)+\frac{1}{2}\int(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))J(dxdy)+\int u(x)v(x)k(dx),\tag{6.1}$$

其中三个部分依次称为扩散部分、跳部分和 Killing 部分. 这个分解是唯一的. 后面两个部分分别是由两个测度 J 和 k 决定的, 分别称为跳测度和 Killing 测度. 比较神秘的是第一部分, 它具有强局部性质: 如果 v 在 u 的支撑的某个邻域上等于常数, 那么,

$$\mathscr{E}^{(c)}(u,v)=0,$$

即每个函数影响的范围是局部的, 在它活动的邻域附近. 对于具体的 Dirichlet 形式, 我们感兴趣扩散部分的表示. Fukushima 的书上的例子基本上都是从给定的形式出发讨论问题, 几乎没有涉及抽象形式

的具体表示. 现在讨论直线上不可约强局部正则 Dirichlet 形式的表示. 下面表示定理是由 Fang 等[4]和 Fukushima[16] 分别在 2010 年独立提出的. 先介绍记号, 设 m 是 $\mathbb{R}$ 上一个 Radon 测度, s 是一个严格递增连续函数, 定义

$$\begin{cases} \mathscr{F}^{(\mathsf{s})} := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}; m) : u \ll \mathsf{s}, \dfrac{du}{d\mathsf{s}} \in L^2(d\mathsf{s}) \right\}, \\ \mathscr{E}^{(\mathsf{s})}(u, u) := \dfrac{1}{2} \displaystyle\int \left(\dfrac{du}{d\mathsf{s}} \right)^2 d\mathsf{s}, \quad u \in \mathscr{F}^{(\mathsf{s})}. \end{cases}$$

定理 6.1 设 $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ 是 $L^2(\mathbb{R}; m)$ 上的不可约强局部正则 Dirichlet 形式, 则存在唯一 (在相差一个仿射变换不计的意义下) 的从 $\mathbb{R}$ 到自身的同胚映射 s, 使得

$$(\mathscr{E}, \mathscr{F}) = (\mathscr{E}^{(\mathsf{s})}, \mathscr{F}^{(\mathsf{s})}).$$

虽然这个定理看上去简单, 其实意义不一般, 我们也只能做一维扩散, 对高维 Euclid 空间上的强局部正则 Dirichlet 形式还没有什么思路, 感兴趣的读者可以考虑这个问题. 另外, 将定理中的 $\mathbb{R}$ 换成某个区间 I, 强局部换成局部, 仍然有类似的结论, 这里不再叙述.

定理的证明依赖于对称测度的唯一性定理, 参见文献 [17], 它是一个一般性的关于对称测度唯一性的充分条件.

定理 6.2[17] 如果 Markov 过程 X 精细不可约且关于非零测度 m 对称, 那么除去 m 的常数倍, 它没有其他对称测度.

注意, 定理中的精细不可约是指对任何 $x \in E$ 和任何精细开集 B, 有

$$\mathbb{P}^x(T_B < \infty) > 0,$$

其中 T_B 是 B 的首中时.

有了表示, 我们便可以叙述一维对称扩散的正则子空间结论. 设有 $L^2(\mathbb{R}; m)$ 上两个强局部不可约正则 Dirichlet 形式 $(\mathscr{E}^i, \mathscr{F}^i)$, $i = 1, 2$, 由上面的定理知, 存在两个 $\mathbb{R}$ 到自身的同胚 s_1 和 s_2, 使得

$$(\mathscr{E}^i, \mathscr{F}^i) = (\mathscr{E}^{(\mathsf{s}_i)}, \mathscr{F}^{(\mathsf{s}_i)}), \quad i = 1, 2.$$

定理 6.3[4] $(\mathscr{E}^1, \mathscr{F}^1)$ 是 $(\mathscr{E}^2, \mathscr{E}^2)$ 的正则 Dirichlet 子空间当且仅当 s_1 关于 s_2 绝对连续且密度函数是某个集合的示性函数.

显然, 本定理推广了前面 Brown 运动的正则子空间刻画定理, 而且由此定理, 我们也可以容易地给出 Brown 运动的正则扩张的例子. 只要给出一个满足 $dx \ll d\mathsf{s}$ 且密度是一个集合的示性函数的严格递增连续函数 s 就可以了, 例如,

$$\mathsf{s}(x) = x + c(x),$$

其中 $c(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是 Cantor 函数, 在 $(-\infty, 0)$ 上等于 0, 在 $(1, +\infty)$ 上等于 1. 那么 $dx \ll d\mathsf{s}$ 且密度是 Cantor 集补集的示性函数. Fitzsimmons 和 Li 还研究了在什么条件下定义域 $\mathscr{F}$ 包含光滑函数.

定理 6.4[18] 设 $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ 是 $L^2(\mathbb{R}; m)$ 上一个尺度函数 s 的强局部不可约正则 Dirichlet 形式. 用 t 表示 s 的逆: $\mathsf{t} = \mathsf{s}^{-1}$. 那么下面结论成立:

(1) $\mathscr{F} \supset C_0^\infty(\mathbb{R})$ 当且仅当 t 绝对连续, 且 t' 局部平方可积;

(2) 设 $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathscr{F}$, 用 $\tilde{\mathscr{F}}$ 表示 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 在 $\mathscr{F}$ 中的闭包, 则 s 的 Lebesgue 分解中的绝对连续部分是 $(\mathscr{E}, \tilde{\mathscr{F}})$ 的尺度函数;

(3) 如果 $\mathscr{F} \supset C_0^\infty(\mathbb{R})$, 那么 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 在 $\mathscr{F}$ 中稠密当且仅当 s 绝对连续.

7 一维强局部正则 Dirichlet 形式: 一般情形

考察一般的、没有不可约性的、直线上强局部正则 Dirichlet 形式的表示. 为什么要考察这种情形呢? 下面有两个理由:

(1) 它不可以简单地从不可约的情形推出;

(2) Brown 运动的正则 Dirichlet 扩张不具有不可约性.

本节的结果参见文献 [5].

现在固定 $\mathbb{R}$ 上一个 Radon 测度, 以及 $L^2(\mathbb{R};m)$ 上强局部正则 Dirichlet 形式 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$.

为了说清楚这个表示问题, 我们引入一些记号, 设 $I=\langle a,b\rangle$ 是一个区间, 这里端点可以开也可以闭, I 上的尺度函数是一个严格递增的连续函数, 尺度函数 s 称为适应于 I, 如果 s 在任何开端点处的极限是无穷. $e(I)$ 表示 I 中以某种方式固定的点, 为了唯一性, 我们总是要求尺度函数在 $e(I)$ 处等于零. 用 $\mathbf{S}_\infty(I)$ 表示 I 上适应的尺度函数全体. 定义

$$\begin{cases}\mathscr{F}^{(\mathsf{s})}:=\left\{u\in L^2(\mathbb{R};m):u\ll\mathsf{s},\dfrac{du}{d\mathsf{s}}\in L^2(d\mathsf{s})\right\},\\ \mathscr{E}^{(\mathsf{s})}(u,u):=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\left(\frac{du}{d\mathsf{s}}\right)^2d\mathsf{s},\quad u\in\mathscr{F}^{(\mathsf{s})}.\end{cases}$$

引理 7.1 当 s 适应于 I 时, 这样定义的形式 $(\mathscr{E}^{(\mathsf{s})},\mathscr{F}^{(\mathsf{s})})$ 是 $L^2(I;m)$ 上正则 Dirichlet 形式.

现在可以给出直线上一般强局部正则 Dirichlet 形式的表示了, 参见文献 [5].

定理 7.1 [5] $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 是 $L^2(\mathbb{R};m)$ 上一个强局部正则 Dirichlet 形式的充分必要条件是存在互相不交的至多可数个区间 $\{I_n\}$, 以及 $\mathsf{s}_n\in\mathbf{S}_\infty(I_n)$, 使得

$$\begin{cases}\mathscr{F}=\left\{u\in L^2(\mathbb{R};m):\forall n,u|_{I_n}\in\mathscr{F}^{(\mathsf{s}_n)},\displaystyle\sum_n\mathscr{E}^{(\mathsf{s}_n)}(u|_{I_n},u|_{I_n})<\infty\right\},\\ \mathscr{E}(u,u)=\displaystyle\sum_n\mathscr{E}^{(\mathsf{s}_n)}(u|_{I_n},u|_{I_n}),\quad u\in\mathscr{F}.\end{cases}$$

这个表示定理说明, $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 对应的一维扩散过程实际上分裂成为至多可数个可达分支, 每个可达分支是一个区间, 它在每个区间 I_n 上是一个以 s_n 为尺度函数的对称扩散, 即在其余的地方

$$\mathbb{R}\Big\backslash\left(\bigcup_n I_n\right),$$

它待在原地不动. 所以, $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 可以表示为区间和适应的尺度函数列 $\{(I_n,\mathsf{s}_n):n\geqslant 1\}$, 称为它的有效区间 (有限或者可数).

这个定理的必要性部分的证明利用经典的一维扩散理论 (如文献 [19]), 以及应用前面在不可约情形下的表示定理. 充分性部分的证明的难点在于验证如上给出的 Dirichlet 形式是在 $\mathbb{R}$ 上正则的, 这部分完全是分析的, 比较困难. 这里以一个例子给予解释.

例 7.1 设 $\mathbb{R}=I_1\cup I_2$, 其中 $I_1=(-\infty,0]$, $I_2=(0,\infty)$. 再设 $\mathsf{s}_1(x)=x$, s_2 适应于 I_2, 例如, 取 $\log x$. 然后令

$$\begin{cases}\mathscr{F}=\{f\in L^2(\mathbb{R}):f|_{I_i}\in\mathscr{F}^{(\mathsf{s}_i)},i=1,2\},\\ \mathscr{E}(u,u)=\displaystyle\sum_{i=1}^2\mathscr{E}^{(\mathsf{s}_i)}(u|_{I_i},u|_{I_i}).\end{cases}$$

然后我们要证明 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 在 $\mathbb{R}$ 上正则, 即 $\mathscr{F}\cap C_c(\mathbb{R})$ 在 $\mathscr{F}$ 中稠密. 因为 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_2$ 在各自区间上是正则的, 我们只需验证对任何满足

$$f\,|_{I_1}\in\mathscr{F}^{(\mathsf{s}_1)}\cap C_c(I_1),$$
$$f\,|_{I_2}\in\mathscr{F}^{(\mathsf{s}_2)}\cap C_c(I_2)$$

的平方可积函数 f 和 $\varepsilon>0$, 存在 $f_\varepsilon\in\mathscr{F}\cap C_c(\mathbb{R})$, 使得

$$\mathscr{E}_1(f-f_\varepsilon,f-f_\varepsilon)<2\varepsilon.$$

不妨设 $f(0)=1$, $f(x)=0$, $x\in(0,\varepsilon]$. 因为 $\mathsf{s}_2(0+)=-\infty$, 存在 $\varepsilon'\in(0,\varepsilon)$, 使得

$$\mathsf{s}_2(\varepsilon)-\mathsf{s}_2(\varepsilon')>2\varepsilon^{-1}.$$

定义 $\phi\in C(\mathbb{R})$ 为

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant\mathsf{s}_2(\varepsilon'),\\ \dfrac{\mathsf{s}_2(\varepsilon)-x}{\mathsf{s}_2(\varepsilon)-\mathsf{s}_2(\varepsilon')}, & x\in(\mathsf{s}_2(\varepsilon'),\mathsf{s}_2(\varepsilon)),\\ 0, & x\geqslant\mathsf{s}_2(\varepsilon),\end{cases}$$

再定义

$$f_\varepsilon=f+\phi(\mathsf{s}_2)1_{(0,\varepsilon]}.$$

那么, $f_\varepsilon\in C_c(\mathbb{R})$ 且有

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_1(f_\varepsilon-f,f_\varepsilon-f)&=\int_0^\varepsilon(\phi(\mathsf{s}_2))^2+\frac{1}{2}\int_0^\varepsilon\left(\frac{d\phi(\mathsf{s}_2)}{d\mathsf{s}_2}\right)^2 d\mathsf{s}_2\\&\leqslant\varepsilon+\frac{1}{2}\int_{\mathsf{s}_2(\varepsilon')}^{\mathsf{s}_2(\varepsilon)}(\phi')^2dx\\&=\varepsilon+\frac{1}{2}\int_{\mathsf{s}_2(\varepsilon')}^{\mathsf{s}_2(\varepsilon)}\left(\frac{1}{\mathsf{s}_2(\varepsilon)-\mathsf{s}_2(\varepsilon')}\right)^2dx<2\varepsilon.\end{aligned}$$

与此相关的一个结果是 Brown 运动的正则 Dirichlet 扩张的刻画, 参见文献 [6].

定理 7.2 [5] 一个正则 Dirichlet 形式 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 是 Brown 运动的正则 Dirichlet 扩张当且仅当它是一个具有有效区间 $\{(I_n,\mathsf{s}_n):n\geqslant1\}$ 的一维强局部正则 Dirichlet 形式, 满足如下条件:

(1) $\mathbb{R}\setminus(\bigcup_n I_n)$ 的 Lebesgue 测度为零;

(2) 对任何 n, $dx\ll d\mathsf{s}_n$ 且密度函数是某个集合的示性函数.

用我们的表示还可以简单而直观地证明分析中一个由 Hamza 在 1975 年给出的一个经典结果: $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 上由测度 μ 定义的形式

$$\mathscr{E}(u,v)=\int u'(x)v'(x)\mu(dx)$$

可闭 (它的最小闭扩张是闭对称形式) 的充分必要条件. 有兴趣的读者可参见文献 [8, 定理 3.1.6]. 除此之外, 我们还可以回答定义域 $\mathscr{F}$ 中是否有光滑函数以及光滑函数全体在定义域中是否稠密等问题.

定理 7.3 [5] 设 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 是 $L^2(\mathbb{R};,m)$ 上一个正则强局部 Dirichlet 形式, 其有效区间为

$$\{(I_n,\mathsf{s}_n):n\geqslant1\},$$

那么, $C_c^\infty(\mathbb{R})\subset\mathscr{F}$ 等价于: 对任何的 n, $dx\ll d\mathsf{s}_n$ 且对任何的 $L>0$, 有

$$\sum_{n\geqslant 1}\int_{I_n\cap(-L,L)}\left(\frac{dx}{d\mathsf{s}_n}\right)^2 d\mathsf{s}_n<\infty. \tag{7.1}$$

为了回答光滑函数在其中稠密的问题, 我们需要引入一个概念. 下面引入两个测度:

$$\lambda_s:=\sum_n d\mathsf{s}_n,\quad \lambda_l(dx):=1_{(\bigcup_n I_n)^c}(x)dx.$$

记得 e_n 是 I_n 内取定的一个固定点. 一个区间 I_n 称为尺度孤立的, 如果对任何 $m\neq n$, 有

$$\lambda_s([e_n,e_m])=\infty$$

或者

$$\lambda_l([e_n,e_m])>0.$$

直观地, 或者中间有山不可逾越, 或者中间有水不可横渡.

定理 7.4 [5] 设 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 是 $L^2(\mathbb{R};,m)$ 上一个正则强局部 Dirichlet 形式, 其有效区间为

$$\{(I_n,\mathsf{s}_n):n\geqslant 1\},$$

再设 $C_c^\infty(\mathbb{R})\subset\mathscr{F}$, 那么 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 在 $\mathscr{F}$ 中稠密的充分必要条件是对任何 n, 有 $d\mathsf{s}_n\ll dx$ 且 I_n 是尺度孤立的.

如果光滑函数在 $\mathscr{F}$ 中但是不稠密, 即

$$C_c^\infty(\mathbb{R})\subset\mathscr{F},\quad \overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}\neq\mathscr{F},$$

其中闭包是指在 $\mathscr{F}$ 中关于范数 $\mathscr{E}_1$ 的闭包, 那么我们自然可以问闭包组成的 Dirichlet 形式将会是怎么样的, 也就是说, 如果

$$\tilde{\mathscr{F}}:=\overline{C_c^\infty(\mathbb{R})},$$

那么 Dirichlet 形式 $(\mathscr{E},\tilde{\mathscr{F}})$ 的有效区间与 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 的有效区间有什么关系?

设 $\{(I_n,\mathsf{s}_n):n\geqslant 1\}$ 是 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 的有效区间, 那么每个 s_n 有 Lebesgue 分解如下:

$$d\mathsf{s}_n=g_n(x)dx+\kappa_n,\quad \kappa_n\perp dx.$$

记

$$\bar{\mathsf{s}}_n:=\int g_n(x)dx$$

为绝对连续部分对应的函数, 它仍然是尺度函数. 然后我们按照函数列 $\{\bar{\mathsf{s}}_n\}$ 对区间列 $\{I_n\}$ 重新组合. 两个不同区间 I_i 和 I_j 称为是关于 $\{\bar{\mathsf{s}}_n\}$ 尺度连通的, 如果

$$\lambda_{\bar{\mathsf{s}}}([e_i,e_j])<\infty\quad 且\quad \lambda_l([e_i,e_j])=0,$$

其中

$$\lambda_{\bar{\mathsf{s}}}:=\sum_n d\bar{\mathsf{s}}_n.$$

显然尺度连通是等价关系, 而且尺度连通的区间之间的所有区间与它们是尺度连通的, 这样我们可以合并尺度连通的区间重新组成区间, 记为 $\{\tilde{I}_k\}$, 因为在任意一个合并区间 $\tilde{I}_k$ 中, 不属于有效区间的点的全体是 Lebesgue 零测集, 所以, 我们可以定义一个新的连续严格递增的函数 $\tilde{\mathsf{s}}_k$, 使得

$$d\tilde{\mathsf{s}}_k = 1_{\tilde{I}_k}\lambda_{\mathsf{s}}.$$

定理 7.5 [5] 光滑函数的闭包组成的 Dirichlet 形式 $(\mathscr{E}, \tilde{\mathscr{F}})$ 的有效区间恰好是

$$\{(\tilde{I}_k, \tilde{\mathsf{s}}_k) : k \geqslant 1\}.$$

8 未回答的问题

这是一个一般的问题, 我们只回答了一维扩散的情形, 相对于我们想要解决的问题来说, 还仅仅是冰山一角, 一般的情形还未有答案, 下面列出部分可以探索的问题来结束本文:

(1) 高维 Brown 运动正则 Dirichlet 子空间的刻画和结构;

(2) 对称稳定过程是否存在非平凡正则 Dirichlet 子空间;

(3) 对称扩散过程是否一定有非平凡正则 Dirichlet 子空间.

致谢 第二作者应坚刚是王梓坤先生曾经任教过的南开大学数学系 1978 年入学的本科生, 虽然没有上过王梓坤先生的课, 却是听着王先生的事迹读完大学的. 后随吴荣教授读硕士, 王先生是硕士答辩委员会的主席, 尽管硕士论文没做很好的工作, 但还是得到了王先生的鼓励. 在读研究生期间阅读了王先生所著的书《布朗运动和位势》, 为之吸引而走上研究 Markov 过程的学术道路. 应坚刚曾经是王先生的博士生, 后来由于某种原因没有读完, 但一直自认为是王先生的弟子之一. 能获得《中国科学》的约稿, 庆祝王先生的 90 华诞, 作者感到非常荣幸, 也非常感谢, 并祝王先生长寿, 身体健康.

参考文献

1 Fang X, Fukushima M, Ying J. On regular Dirichlet subspaces of $H^1(I)$ and associated linear diffusions. Osaka J Math, 2005, 42: 27–41

2 Li L, Ying J. Regular subspaces of Dirichlet forms. In: Festschrift Masatoshi Fukushima. Hackensack: World Scientific Publishing, 2015, 397–420

3 Li L, Ying J. On structure of regular Dirichlet subspaces for one-dimensional Brownian motion. Ann Probab, 2017, 45: 2631–2654

4 Fang X, He P, Ying J. Dirichlet forms associated with linear diffusions. Chin Ann Math Ser B, 2010, 31: 507–518

5 Li L, Ying J. On symmetric linear diffusions. Trans Amer Math Soc, 2017, in press

6 Li L, Ying J. Regular Dirichlet extensions of one-dimensional Brownian motion. ArXiv:1606.00630, 2016

7 Blumenthal R M, Getoor R K. Markov Processes and Potential Theory. New York: Academic Press, 1968

8 Fukushima M, Oshima Y, Takeda M. Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes. Berlin: Walter de Gruyter, 2011

9 Ma Z M, Röckner M. Introduction to the Theory of (Nonsymmetric) Dirichlet Forms. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1992

10 Ying J. Bivariate Revuz measures and the Feynman-Kac formula. Ann Inst H Poincaré Probab Statist, 1996, 32: 251–287

11 Ying J. Killing and subordination. Proc Amer Math Soc, 1996, 124: 2215–2223

12 Fukushima M, Ying J. A note on regular Dirichlet subspaces. Proc Amer Math Soc, 2003, 131: 1607–1611

13 Chen Z Q, Fukushima M, Ying J. Traces of symmetric Markov processes and their characterizations. Ann Probab, 2006, 34: 1052–1102

14 Fukushima M, He P, Ying J. Time changes of symmetric diffusions and Feller measures. Ann Probab, 2004, 32: 3138–3166

15 Fukushima M. Dirichlet Forms and Markov Processes. Amsterdam-Oxford-New York: Kodansha and North-Holland, 1980

16 Fukushima M. From one dimensional diffusions to symmetric Markov processes. Stochastic Process Appl, 2010, 120: 590–604
17 Ying J, Zhao M. The uniqueness of symmetrizing measure of Markov processes. Proc Amer Math Soc, 2010, 138: 2181–2185
18 Fitzsimmons P J, Li L. Class of smooth functions in Dirichlet spaces. ArXiv:1611.06778, 2017
19 Itô K, McKean H P Jr. Diffusion Processes and Their Sample Paths. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1974

Regular subspaces of regular Dirichlet forms

Ping He & Jian'gang Ying

Abstract This paper focuses on the problem of the existence and representation of regular Dirichlet subspaces of a regular Dirichlet form, which was raised by the second author when studying the characterization of Killing transform of Markov processes by Dirichlet forms, and has been studied for about 20 years. A brief survey on recent progress on this problem in the frame of 1-dimensional symmetric diffusions is presented.

Keywords **Dirichlet forms, Markov processes, regular subspaces**

MSC(2010) **31C25**

doi: 10.1360/N012017-00152