二次系统 (E_2) 出现至少四个极限环的例子

史松龄
（中国科技大学研究生院、中国科学院应用数学研究推广办公室）

摘　　要

1974 年 5 月，美国数学会召开的讨论 Hilbert 问题专题会议上提出的问题之一是：由两个二次多项式给定的平面向量场是否有超过三个的极限环（见文献 [1]，第 51 页）。本文的例子肯定地回答了这个问题。

D. Hilbert 第十六问题关于微分方程的部分是：求方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q_n(x,y)}{P_n(x,y)} \tag{E_n}$$

的极限环的最大数目和位置，其中 P_n，Q_n 是 x，y 的 n 次多项式。这个问题引起很多数学工作者的关心，人们作了不懈的努力，但进展极为缓慢。甚至对 (E_2) 的研究也是如此。关于这方面的工作已有专门的综合论述[2,3]。以 $H(n)$ 记方程 (E_n) 的极限环的最大数目。

1955 年，苏联科学院院士 Петровский 与 Ландис[4] "证明" 了：$H(2)=3$. 1956 年，Молчанов[5] 再次肯定 $H(2)=3$. 1965 年，Черкас[6] 也肯定 $H(2)=3$. 1967 年，Ландис 与 Петровский 发表声明[7]，指出文献[4]中引理 12 的证明有错误，但仍声称 $H(2)=3$. 美国多次有人怀疑这一结论[3,8]，但没有能提出确切的意见。

本文证明 $H(2)=3$ 的结论是错误的。现提供下述的：

定理.　　$H(2)\geqslant 4$.

在第二节中，我们对数值系数的二次系统

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\lambda x-y-10x^2+(5+\delta)xy+y^2,\\ \frac{dy}{dt}&=x+x^2+(-25+8\epsilon-9\delta)xy,\end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\lambda=-10^{-250}$，$\epsilon=-10^{-70}$，$\delta=-10^{-18}$，具体地作出四个 Poincaré-Bendixson 环域，每一个里面至少存在一个极限环。因而 $H(2)\geqslant 4$.

本文 1978 年 12 月 31 日收到，1979 年 1 月 26 日收到修改稿。

一、定理的证明

引理1. 系统(1)只有两个奇点：$0(0, 0)$, $A(0, 1)$. 奇点 0 是稳定焦点. 奇点 A 是不稳定焦点. 直线 K:

$$1 + x + (-25 + 8\varepsilon - 9\delta)y = 0$$

是无切直线.

证. 水平等倾线 $\left(\text{即 } \frac{dy}{dt} = 0 \text{ 的轨迹}\right)$ 由两条直线组成. 一条是 $x = 0$, 其上有两个奇点：$0(0, 0)$, $A(0, 1)$. 另一条是直线 K, 其上没有奇点. 在 K 上, $\dot{y} = 0$, 而

$$\begin{aligned}\dot{x} = y^2[&-10(25 - 8\varepsilon + 9\delta)^2 + (5 + \delta)(25 - 8\varepsilon + 9\delta) + 1] \\ &+ y[-1 + (25 - 8\varepsilon + 9\delta)(\lambda + 20) - (5 + \delta)] - 10 - \lambda.\end{aligned}$$

上式右边二次式的判别式:

$$\begin{aligned}\Delta = [&494 + \lambda(25 - 8\varepsilon + 9\delta) - 160\varepsilon + 179\delta]^2 \\ &+ 4(10 + \lambda)[-6,124 + 25\delta + (8\varepsilon - 9\delta)(495 + 89\delta - 80\varepsilon)] < 0,\end{aligned}$$

所以 $\dot{x} < 0$. 即直线K是无切直线,其上没有奇点.

奇点 $0(0, 0)$ 的一次近似的特征方程是:

$$\begin{vmatrix}\rho - \lambda, & +1 \\ -1, & \rho\end{vmatrix} = 0,$$

特征根是共轭复数:

$$\rho = \frac{\lambda}{2} \pm i\frac{\sqrt{4 - \lambda^2}}{2},$$

因为实部是负的,所以奇点 0 是稳定焦点.

奇点 $A(0, 1)$ 的特征方程是:

$$\begin{vmatrix}\rho - (5 + \delta + \lambda), & -1 \\ 24 - 8\varepsilon + 9\delta, & \rho\end{vmatrix} = 0,$$

特征根是共轭复数:

$$\rho = \frac{1}{2}\left[(5 + \lambda + \delta) \pm i\sqrt{4(24 - 8\varepsilon + 9\delta) - (5 + \delta + \lambda)^2}\right].$$

因为实部是正的,所以奇点 A 是不稳定焦点. 引理 1 证毕.

引理2. 系统 (1) 只有一个无限远奇点,并且是鞍点.

证. 引用齐次坐标 (X, Y, Z) 研究无限远奇点[9]. 设系统(1)的无限远奇点为 $P(1, k, 0)$, 则 k 满足方程:

$$f(k) \equiv 1 + (-15 + 8\varepsilon - 9\delta)k - (5 + \delta)k^2 - k^3 = 0.$$

因为

$$f'(k) = -15 + 8\varepsilon - 9\delta - 2(5 + \delta)k - 3k^2$$

的判别式为负,所以 $f'(k) < 0$, 故 $f(k)$ 单调递减,因此 $f(k) = 0$ 只有唯一实根 k. 又因为

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{8\varepsilon - 9\delta}{10} - \frac{5 + \delta}{100} - 10^{-3} < 0,$$

$$f\left(\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{4}+\frac{8\sigma-9\delta}{20}-\frac{5+\delta}{400}-\frac{1}{8}10^{-3}>0,$$

所以
$$\frac{1}{20}<k<\frac{1}{10}.$$

进一步可确定 $P(1, k, 0)$ 是无限远鞍点.

令 $X \to X$, $Y \to Y+kX$, $Z \to Z$, 再令 $X=1$, $dx=0$, $Y=y$, $Z=z$, 则得:

$$\frac{dy}{dt}=y[-15+8\sigma-9\delta-2(5+\delta)k-3k^2]+z(1-\lambda k+k^2)-y^2(5+\delta+3k)$$
$$+(-\lambda+2k)yz+y^2z-y^3,$$
$$\frac{dz}{dt}=[10-(5+\delta)k-k^2]z-(5+\delta+2k)yz-(\lambda-k)z^2+yz^2-y^2z.$$

一次近似的特征根是:

$$\rho_1=10-(5+\delta)k-k^2>0,$$
$$\rho_2=-15+8\sigma-9\delta-2(5+\delta)k-3k^2<0.$$

故 $P(1, k, 0)$ 是初等鞍点.

因为 $k>\frac{1}{20}$, k 比无切直线 K 的斜率 (小于 1/24) 还要大, 所以 P 点与直线 K 在赤道上的相对位置如图 1 所示. 赤道上积分曲线的方向是根据文献[10]标定的. 引理 2 证毕.

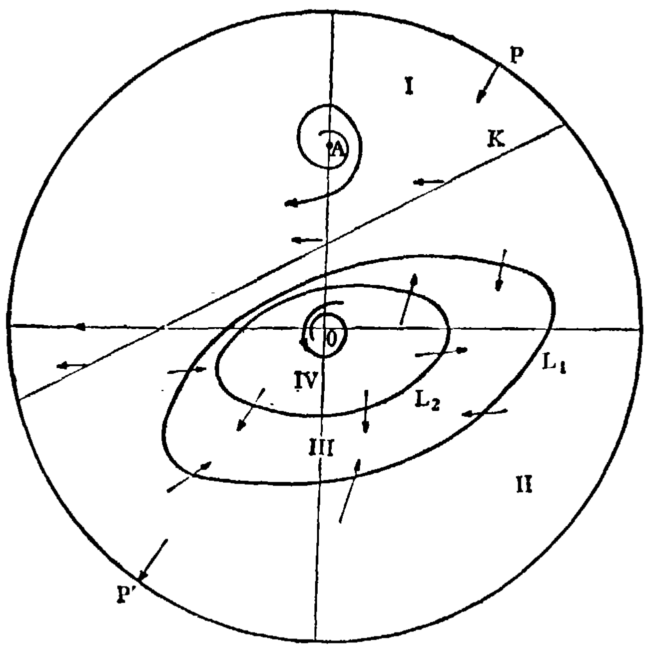

图　1

令:

$$F_2=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\quad F_3=\left(2+\frac{\delta}{3}\right)x^3+10x^2y+\frac{44-8\sigma+9\delta}{3}y^3,$$

$$F_4=\left(-100-\frac{79}{4}\delta+\frac{1}{4}\delta^2+20e\right)x^4+(50+10\delta-e)x^3y+10x^2y^2+\epsilon xy^3$$
$$+\left[275+\frac{621}{4}\delta-138e+\frac{1}{4}(8e-9\delta)^2\right]y^4,$$
$$F_5=\left(-766-\frac{4,043}{15}\delta-22\delta^2+\frac{1}{5}\delta^3\right)x^5-(4,050+800\delta-10\delta^2)x^4y$$
$$+\left(450+\frac{671}{3}\delta+27\delta^2\right)x^3y^2+\left(-\frac{15,850}{3}-\frac{3,241}{3}\delta+3\delta^2\right)x^2y^3$$
$$+\left(\frac{10,148}{3}+\frac{69,793}{15}\delta+1,524\delta^2+\frac{729}{5}\delta^3\right)y^5,$$
$$F_6=\left(\frac{736,850}{9}-\frac{801,400}{9}\delta-\frac{570,250}{9}\delta^2-14,500\delta^3-\frac{3,280}{3}\delta^4\right)x^6$$
$$+\left(-34,250-\frac{49,915}{4}\delta-\frac{11,945}{12}\delta^2+25\delta^3\right)x^5y+\left(\frac{369,350}{3}-\frac{1,837,787}{6}\delta\right.$$
$$\left.-\frac{384,873}{2}\delta^2-\frac{86,805}{2}\delta^3-\frac{6,561}{2}\delta^4\right)x^4y^2+\left(-\frac{34,570}{3}+\frac{982}{3}\delta+\frac{13,961}{9}\delta^2\right.$$
$$\left.+205\delta^3\right)x^3y^3-\left(\frac{735,989}{2}\delta+\frac{399,873}{2}\delta^2+\frac{86,805}{2}\delta^3+\frac{6,561}{2}\delta^4\right)x^2y^4$$
$$-\left(\frac{2,375}{12}\delta+\frac{1,375}{12}\delta^2+15\delta^3\right)xy^5+\frac{216,700}{3}y^6.$$

$G_4=F_2+F_3+F_4,\quad G_6=G_4+F_5+F_6$

$X_2=-10x^2+(5+\delta)xy+y^2,\quad Y_2=x^2+(-25+8e-9\delta)xy.$

引理 3. 代数曲线 $G_6=10^{-51}$ 在区域 $10^{-26}<\rho<10^{-25}$ 内有唯一的单闭分支（这个闭分支以 L_1 记之）.

证. 在圆周 $x^2+y^2=\rho^2(\rho>0)$ 上，根据不等式

$$\left|\sum_{i+j=k}a_{ij}x^iy^j\right|\leqslant\rho^k\sum_{i+j=k}|a_{ij}|$$

进行估值，可得不等式

$$|X_2|<20\rho^2,\quad |Y_2|<30\rho^2,$$
$$|F_3|<10^2\rho^3,\quad \left|\frac{\partial F_3}{\partial x}\right|<10^2\rho^2,\quad \left|\frac{\partial F_3}{\partial y}\right|<10^2\rho^2,$$
$$|F_4|<10^3\rho^4,\quad \left|\frac{\partial F_4}{\partial x}\right|<10^4\rho^3,\quad \left|\frac{\partial F_4}{\partial y}\right|<10^4\rho^3,$$
$$|F_5|<10^5\rho^5,\quad \left|\frac{\partial F_5}{\partial x}\right|<10^5\rho^4,\quad \left|\frac{\partial F_5}{\partial y}\right|<10^5\rho^4,$$
$$|F_6|<10^6\rho^6,\quad \left|\frac{\partial F_6}{\partial x}\right|<12\times10^5\rho^5,\quad \left|\frac{\partial F_6}{\partial y}\right|<8\times10^5\rho^5.$$

因为

$$G_6|_{\rho=10^{-25}}\geqslant\rho^2\left[\frac{1}{2}-10^2\rho-10^3\rho^2-10^5\rho^3-10^6\rho^4\right]>10^{-51},$$

所以曲线 $G_6=10^{-51}$ 在圆 $\rho=10^{-25}$ 内有闭分支，现证这个闭分支是唯一的.

对同一个 θ 及 $0 \leqslant r_1 < r_2 < 10^{-25}$ 有

$$
\begin{aligned}
& G_6(r_2\cos\theta,\ r_2\sin\theta) - G_6(r_1\cos\theta,\ r_1\sin\theta) \\
& \geqslant \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) - \sum_{i=3}^{6}(r_2^i - r_1^i)\,|F_i(\cos\theta,\ \sin\theta)| \\
& \geqslant (r_2 - r_1)\left[\frac{r_2 + r_1}{2} - 10^2(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) - \sum_{j=4}^{6}\sum_{i=0}^{j} 10^{j+1} r_1^i r_2^{j-i}\right] \\
& \geqslant (r_2 - r_1)\left[\frac{r_2 + r_1}{2} - 3 \times 10^2 r_2^2 - \sum_{j=4}^{6} 10^{j+2} r_2^j\right] \\
& \geqslant (r_2 - r_1)\left[\frac{r_2 + r_1}{2} - 10^3 r_2^2\right] = (r_2 - r_1)\left[r_2\left(\frac{1}{2} - 10^3 r_2\right) + \frac{r_1}{2}\right] > 0.
\end{aligned}
$$

因此,曲线 $G_6 = 10^{-51}$ 在圆 $\rho = 10^{-25}$ 内只有唯一的闭分支. 以 L_1 记这个闭分支.

因为

$$
G_6 = 10^{-51} \leqslant \rho^2\left[\frac{1}{2} + 10^2\rho + 10^3\rho^2 + 10^5\rho^3 + 10^6\rho^4\right],
$$

所以在环线 L_1 上还有: $10^{-26} < \rho$.

在区域 $10^{-26} < \rho < 10^{-25}$ 内,因为

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial G_6}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_6}{\partial y}\right)^2 = x^2 + y^2 + 2x\sum_{i=3}^{6}\frac{\partial F_i}{\partial x} + 2y\sum\frac{\partial F_i}{\partial y} + \left(\sum_{i=3}^{6}\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)^2 \\
& \quad + \left(\sum_{i=3}^{6}\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)^2 \geqslant \rho^2\left[1 - 2\rho\left(10^2 + \sum_{j=1}^{3} 10^{3+j}\rho^j\right) - 2\rho^2 \times 10^{11}\right] \\
& \geqslant 10^{-52}[1 - 2 \times 10^{-25} \times 10^3 - 2 \times 10^{-50} \times 10^{+14}] > 0,
\end{aligned}
$$

所以 L_1 上(在区域 $10^{-26} < \rho < 10^{-25}$ 内)没有奇点. 这就证明了 L_1 是单闭的 Jordan 曲线. 引理 3 证毕.

同理可证:

引理 4. 代数曲线 $G_4 = 10^{-153}$ 有唯一单闭分支在区域 $10^{-77} < \rho < 10^{-76}$ 之中(以 L_2 记这个闭分支).

引理 5. L_1, L_2 都是系统(1)的无切环.

证. 不难验证,在环线 L_1 上

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dG_6}{dt}\right|_{(1)} &= \left(\frac{2{,}375}{12}\delta + \frac{1{,}375}{12}\delta^2 + 15\delta^3\right)(x^2 + y^2)^3 + \frac{\partial F_6}{\partial x}X_2 + \frac{\partial F_6}{\partial y}Y_2 \\
& \quad + \epsilon\left\{-(x^2 + y^2)^2 + (80x^3 - 3x^2y + y^3)X_2 + [-x^3 + 3xy^2 + 4(-138\right. \\
& \quad \left. + 16\epsilon - 36\delta)y^3]Y_2 + 8xy\left(\frac{\partial F_4|_{\epsilon=0}}{\partial y} + \frac{\partial F_5}{\partial y}\right)\right\} + \lambda\left(x^2 + x\sum_{i=3}^{6}\frac{\partial F_i}{\partial x}\right) \\
& \leqslant 1.9 \times 10^2\delta\rho^6 + 5 \times 10^7\rho^7 + 10^{-70} \times 2\rho^4 + 10^{-250} \times 2\rho^2 \\
& \leqslant \rho^6[-1.9 \times 10^{-16} + 5 \times 10^7\rho_{\max}) + 10^{-69}\rho^4 + 10^{-250} \times 10^{-49} \\
& \leqslant \rho^4(-1.4 \times 10^{-16}\rho_{\min}^2 + 10^{-69}) + 10^{-299} \\
& \leqslant 10^{-4\times 26} \times (-10^{-68}) + 10^{-299} < 0.
\end{aligned}
$$

这证明了,在 L_1 上,系统(1)的积分曲线当 t 增加时由外往里钻.

在环线 L_4 上,

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dG_4}{dt}\right|_{(1)} &= -\varepsilon(x^2+y^2)^2 + \frac{\partial F_4}{\partial x}X_2 + \frac{\partial F_4}{\partial y}Y_2 \\
&\quad + \lambda\left(x^2 + x\frac{\partial F_4}{\partial x} + x\frac{\partial F_4}{\partial x}\right) \geqslant 10^{-70}\rho^4 - 5\times 10^5\rho^5 + 2\lambda\rho^2 \\
&\geqslant \rho^4(10^{-70} - 5\times 10^5\times 10^{-76}) - 10^{-250}\times 10^{-150} \\
&\geqslant 10^{-4\times 77}\times 10^{-71} - 10^{-400} > 0.
\end{aligned}
$$

这证明在 L_4 上,系统(1)的积分曲线当 t 增加时由里往外钻. 引理 5 证毕.

引理 1—5 证明: 系统(1)具有四个 Poincaré-Bendixson 环域(如图 1 所示).

环域 I: 外界为赤道的一部分与无切直线 K 所组成,内界为奇点 A.

环域 II: 外界为赤道的另一部分与无切直线 K 所组成,内界为无切环 L_1.

环域 III: 外界为无切环 L_1, 内界为无切环 L_2.

环域 IV: 外界为无切环 L_2, 内界为奇点 0.

根据 Poincaré-Bendixson 环域定理,每一个环域里面至少各存在一个极限环. 系统(1)至少存在四个极限环. 因而 $N(2)\geqslant 4$. 定理证毕.

本文是在华罗庚教授的关心和帮助下完成的, 并得到导师秦元勋教授的指导和董金柱教授的帮助,作者深表谢意.

参 考 文 献

[1] Arnold, V., Mathmatical Developments Arising from Hilbert Problems, Vol. 1, in *Proceedings of Symposia in pure mathematics*, **28** (1976), 51.
[2] 叶彦谦, 极限环问题, 数学进展, 1962, No. 2.
[3] Coppel, W. A., A Survey of quadratic systems, *J. Differential Equations*, **2** (1966), 293—304.
[4] Петровский, И. Г. и Ландис, Е. М., О числе предельных циклов уравнений $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, где P и Q——многочлены 2-й степени, *Матем. сборн.*, **37** (1955), 209—250.
[5] Молчанов, Н. Н., Применение теории непрерывных групп преобразований к исследованию решений обыкновенных дифференциальных уравнений, *ДАН. СССР*, **112** (1957).
[6] Черкас, Л. А., О комплексных циклах одного дифференциального уравнения, *Диф. урав.*, 1965, 2, 182—186.
[7] Ландис, Е. М. и Петровский, И. Г., Письмо в редакцию, *Матем. сборн.*, **73** (115), 1967, 159.
[8] Perko, L. M., Rotated vector fields and the global behavior of limit cyclels for a class of quadratic systems in the plane, *J. Differential Equations*, **18** (1975), 63—86.
[9] Lefschetz, S., *Differential Equations: geometric theory*, 1957.
[10] 江泽涵, 关于平面向量场在无穷远处的奇点, 数学进展, 1962, No. 2.