

双剪应力强度理论及其推广

俞茂铨 何丽南 宋凌宇

(西安交通大学建筑与结构工程系、工程力学系)

摘 要

本文根据第一作者 1961 年提出的双剪应力屈服准则,系统地提出了双剪应力强度理论。它包括双剪应力屈服准则(应力空间)、双剪应变屈服准则(应变空间),考虑 SD 效应和静水应力效应的广义双剪应力强度理论以及晶体滑移的临界双剪应力准则。

一、引 言

材料在复杂应力状态下的强度理论,是固体力学以及材料和结构强度研究中的重要基础;对于各种工程数值计算也十分重要。因此,强度理论的研究,吸引了固体力学、材料科学、应用数学以及机械、土木、冶金和航空工程等各个领域研究者的广泛兴趣。在过去两百年来曾经提出过很多屈服和破坏准则。

关于材料屈服和破坏的研究,大致可以分为两个时期:在 1951 年以前基本上是破坏现象的研究。这一时期提出了若干屈服和破坏准则。Tresca 准则和 Mises 准则是应用最广的两个屈服准则。1951 年 Drucker^[1] 等提出了一个关于屈服面的基本公设,由这个公设可得出屈服面的外凸性。1962 年 Ильюшин^[2] 又将屈服面的外凸性推广到应变空间,屈服准则的研究在更坚实的理论基础上得到发展。

各向同性材料的屈服准则,可以表述为三个独立的应力不变量或三个主剪应力的函数,即

$$f(\sigma_i) = f(I_1, I_2, I_3), \quad (1)$$

$$f(\sigma_i) = f(J_2, J_3), \quad (1')$$

$$f(\sigma_i) = f(\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}), \quad (2)$$

式中 I_1, I_2, I_3 为应力张量不变量, J_2, J_3 为应力偏量不变量, τ_{12}, τ_{23} 和 τ_{31} 为三个主剪应力。

广义强度理论可以表述为

$$f(\sigma_i) = F(I_1, J_2, J_3), \quad (3)$$

$$F(\sigma_i) = F(\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}; \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}), \quad (4)$$

式中 $\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$ 分别为主剪应力 $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$ 作用面上的正应力。

二、双剪应力屈服准则

本文第一作者 1961 年提出的双剪应力屈服准则¹⁾, 满足 Drucker 公设的屈服面的外凸性条件。双剪应力屈服准则认为材料的屈服决定于两个较大的主剪应力, 即最大剪应力 τ_{13} 和中间主剪应力 τ_{12} 或 τ_{23} 。它的数学表达式为^[3]

$$f = \tau_{13} + \tau_{12} = \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = c, \quad \text{当 } \tau_{12} \geq \tau_{23} \text{ 时}, \quad (5)$$

$$f' = \tau_{13} + \tau_{23} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 = c, \quad \text{当 } \tau_{12} \leq \tau_{23} \text{ 时}, \quad (5')$$

在实际使用时可以根据 $\tau_{12} \geq \tau_{23}$ 或 $\tau_{12} \leq \tau_{23}$ 选用方程(5)式或(5')式。

双剪应力屈服准则的菱形十二面体剪切模型如图 1 所示。

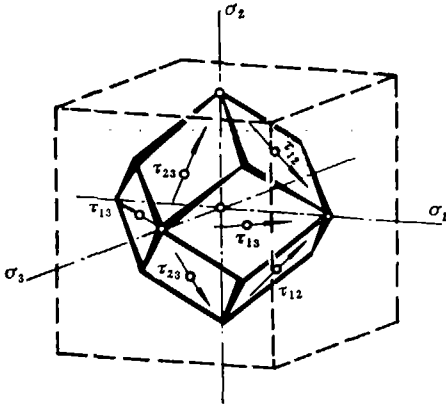


图 1 双剪应力屈服准则的剪切模型

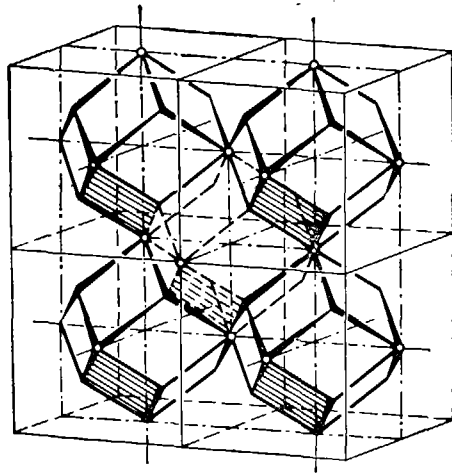


图 2 用菱形十二面体组成连续体

菱形十二面体同立方体一样, 也是一种空间等分体, 即可以用相同的多面体来充满一个空间。许多菱形十二面体单元的组合可以作为一个连续体, 如图 2 所示。值得指出, 各个菱形十二面体可以形成紧密的变形而仍保持为平行多面体, 它们充满空间而没有空隙和重叠, 是一种适合于变形连续介质力学的单元模型。

在应变空间中, 双剪应力屈服准则可以推广为双剪应变屈服准则如下

$$f = \varepsilon_1 - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - \varepsilon^0(1 + \mu) = 0, \quad (6)$$

$$f' = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \varepsilon_3 - \varepsilon^0(1 + \mu) = 0, \quad (6')$$

式中 ε_1 , ε_2 和 ε_3 为三个主应变, ε^0 为拉伸(压缩)极限应变, μ 为泊松比。

双剪应变屈服准则和其它两个应变屈服准则, 即 Tresca 应变屈服准则(最大剪应变屈服准则)和 Mises 应变屈服准则(八面体剪应变屈服准则)^[4,5] 一样, 在应变空间中满足屈服面的

1) 俞茂镛, 各向同性屈服函数的一般性质, 西安交通大学科学论文。

外凸性。

三、广义双剪应力强度理论

在建立双剪应力屈服准则时, 我们曾引入下述假设, 即材料的拉伸和压缩屈服极限相等, 静水应力不影响材料的屈服。这一假设对于常用金属材料的屈服是适合的, 但是不适合于脆性材料的断裂。最近的一些研究表明, 静水应力对某些金属的屈服有一定影响。也有一些研究者研究了高强度钢、聚合材料和土壤的 SD 效应, 即拉伸和压缩的强度差效应, 并且提出了一些考虑静水应力 σ_m 和 SD 效应的广义强度理论^[6-8]。其中一些强度理论主要以应力偏量第二不变量 J_2 (或八面体剪应力 τ_8) 为基础, 进一步考虑应力张量第一不变量 I_1 和应力偏量第三不变量 J_3 。如(3)式所示。

按照双剪应力准则, 进一步考虑静水应力 σ_m 和 SD 效应对材料破坏的影响, 可以导出一个新的广义双剪应力强度理论。为此, 引入菱形十二面体模型, 如图 3 所示。

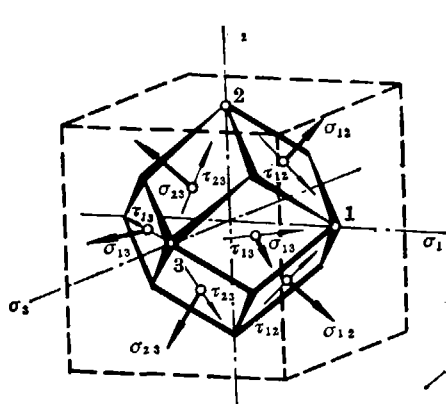


图 3 广义双剪应力强度理论的菱形十二面体模型

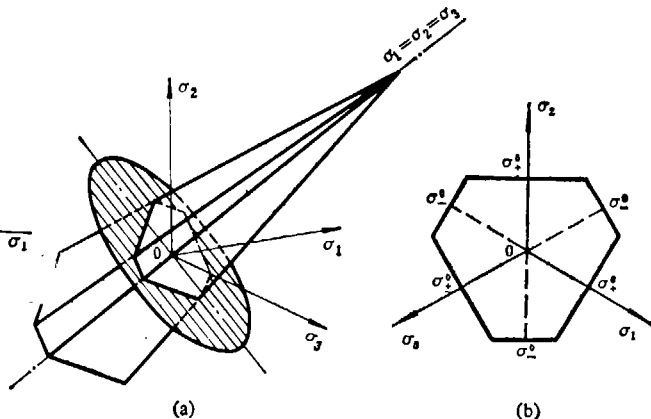


图 4 广义双剪应力强度理论在主应力空间中的极限面

由于三个主剪应力中, 最大主剪应力 τ_{13} 恒等于另两个主剪应力之和, 即 $\tau_{13} = \tau_{12} + \tau_{23}$, 它们中只有两个独立量。考虑两个较大主剪应力及其相应的正应力, 可以建立一个广义双剪应力强度理论为

$$F = \tau_{13} + \tau_{12} + \beta(\sigma_{13} + \sigma_{12}) = C, \quad \text{当 } F \geq F' \text{ 时}, \quad (7)$$

$$F' = \tau_{13} + \tau_{23} + \beta(\sigma_{13} + \sigma_{23}) = C, \quad \text{当 } F \leq F' \text{ 时}, \quad (7')$$

式中 β 为反映十二面体正应力对材料破坏强度的影响系数, C 为与材料拉压强度有关的数值。它们的值可由材料的拉伸极限应力 σ_+^0 和压缩极限应力 σ_-^0 确定为

$$\beta = \frac{\sigma_-^0 - \sigma_+^0}{\sigma_-^0 + \sigma_+^0}, \quad C = \frac{2\sigma_-^0\sigma_+^0}{\sigma_-^0 + \sigma_+^0}. \quad (8)$$

引入材料拉压强度比 $\alpha = \sigma_+^0/\sigma_-^0$, (7)式的广义双剪应力强度理论为

$$F = \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \left[\sigma_1 + \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] = \frac{2\sigma_+^0}{1+\alpha}, \quad \text{当 } F \geq F' \text{ 时}, \quad (9)$$

$$F' = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_3 \right] = \frac{2\sigma_+^0}{1+\alpha}, \quad \text{当 } F \leq F' \text{ 时}, \quad (9')$$

显然,双剪应力屈服准则为广义双剪应力强度理论的一种特殊情况,即材料拉压强度相同($\alpha = 1$)的情况。

广义双剪应力强度理论在三维主应力空间中的极限面及其在 π_0 平面上的极限迹线如图 4(a) 和 (b) 所示。它是一个以静水应力轴 ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) 为轴线的半无限的不等边六锥面。极限六锥面的形状和大小与材料拉伸和压缩强度极限有关。当材料的拉压强度极限相等时,广义双剪应力强度理论的极限面成为双剪应力屈服准则的六边棱柱面。

广义双剪应力强度理论也可以改写成下述形式

$$F = \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] + \frac{3(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}\sigma_m + \frac{1-\alpha}{2(1+\alpha)}\sigma_1 = \frac{2\sigma_+^0}{1+\alpha}, \text{ 当 } F \geq F' \text{ 时,} \quad (10)$$

$$F' = \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 \right] + \frac{3(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}\sigma_m + \frac{1-\alpha}{2(1+\alpha)}\sigma_3 = \frac{2\sigma_+^0}{1+\alpha}, \text{ 当 } F \leq F' \text{ 时,} \quad (10')$$

式(10)和(10')可以看作是考虑了平均正应力 σ_m (静水应力) 和最大正应力 σ_1 (或最小正应力 σ_3) 影响的双剪应力强度理论。

四、晶体和多晶体金属滑移的非 Schmid 效应和临界双剪应力准则

双剪应力强度准则,也可以推广应用于晶体的多滑移问题的研究。

在宏观力学中, Tresca 于 1864 年建立了最大剪应力屈服准则;晶体的临界剪应力定律则于 1924 年第一届国际应用力学大会上由 Schmid^[9] 提出。它们的准则与某些材料和晶体的实验资料相一致。但是, Tresca 准则和 Schmid 滑移定律,对于某些材料和晶体也存在一些差异。这是由于其它剪应力也将影响材料的塑性变形。

多年来,曾经观察到晶体滑移的多滑移系统和非 Schmid 效应。Schmid 自己^[10], Seeger^[11] 等人曾指出,有些滑移并不仅仅在一个系统上进行,而有几个等价的滑移系统同时参加形变。例如,钠卤化物与钾卤化物晶体通常有两个十二面体的滑移系统,而 NaCl, KCl, KBr, KI 等碱金属卤化物晶体往往在十二面体滑移系统上首先发生滑移, Seeger 把它们称为十二面体滑移^[11]。Seeger 还指出,一般多晶体在很小的形变时就要出现多滑移。Scholl 还证明,对面心立方金属的实验,一开始就得到多滑移,同时,其临界剪应力要高于单滑移的临界剪应力。Schmid 和 Seeger 也指出,对这个效应做出定量的解释还存在着困难。

近十余年来,这一问题的研究得到进一步发展。东京大学 Taira 和 Hayashi 于 1971 年指出^[12],在多晶体金属中,晶体不能在简单滑移系统中发生变形,而必须在多滑移系统中变形。因为单滑移系统将在晶界上产生一些缝隙,但实际情况并不如此。在多晶聚合体中,为了满足力学条件,晶体滑移必须多于四个滑移系。他们又指出,多于四个滑移系统的组合,应考虑到晶格的对称性和力学条件。因此常用一个八面体、十二面体、二十四面体等表示多滑移系统。

最近 Asaro 和 Rice^[13] 也指出,除了滑移面上的剪应力 $\tau_{\max}$ 影响剪切变形外,其它剪应力也将影响剪切变形,因为其它剪应力也将促进主滑移系统的剪切变形。他们把这种与 Schmid 定律的差异,称为非 Schmid 效应。

显然,由于滑移现象的多样性,已经不可能用单一的 Schmid 剪应力定律来表述各种晶体材料的塑性变形规律。

根据晶体的菱形十二面体滑移系和相应的空间应力状态的双剪应力准则,可以导出一个

类似的晶体临界双剪应力准则^[14]。

立方单元体的空间应力状态以及从立方体截取出来的矩形体,如图 5 的 (a)~(d) 所示;从这些矩形体截取出来的正交八面体如图 5 中的 (f), (g) 和 (h) 所示;从正交八面体中截取出来的菱形十二面体如图 5(e) 所示。这两个滑移模型,即菱形十二面体滑移模型和正交八面体滑移模型,可用来表示晶体在复杂应力状态下的多滑移系统,并建立相应的晶体临界双剪应力准则。

晶体临界双剪应力准则认为,当十二面体多滑移系统或正交八面体多滑移系统上的两个剪应力之和达到某一临界值时,晶体开始发生滑移。临界双剪应力准则可以解释一些晶体和多晶体的多滑移系统和非 Schmid 效应。

最后还要指出,临界双剪应力准则,预示了菱形十二面体多滑移系和正交八面体多滑移系。但这里的八面体不同于正八面体,正八面体是一种等倾八面体,而这里的八面体是一种各个面都相互垂直的八面体,故称之为正交八面体。

五、双剪应力强度理论与实验资料的比较

σ - τ 复合应力状态是机器结构中最常见的一种应力状态。这时双剪应力屈服准则和广义双剪应力强度理论分别表述为

$$f = 0.75\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + 0.25\sigma = \sigma^0 \quad \text{当 } \sigma \geq 0 \text{ 时}, \quad (11)$$

$$f' = 0.75\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} - 0.25\sigma = \sigma^0 \quad \text{当 } \sigma \leq 0 \text{ 时} \quad (11')$$

和

$$F = (3 + \beta)\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + (1 + 3\beta)\sigma = 4c \quad \text{当 } F \geq F' \text{ 时}, \quad (12)$$

$$F' = (3 - \beta)\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + (3\beta - 1)\sigma = 4c \quad \text{当 } F \leq F' \text{ 时}. \quad (12')$$

(12)和(21')式中的条件相当于

$$F \geq F' \text{ 为 } \frac{1}{2}(\sigma + \beta\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) \geq 0,$$

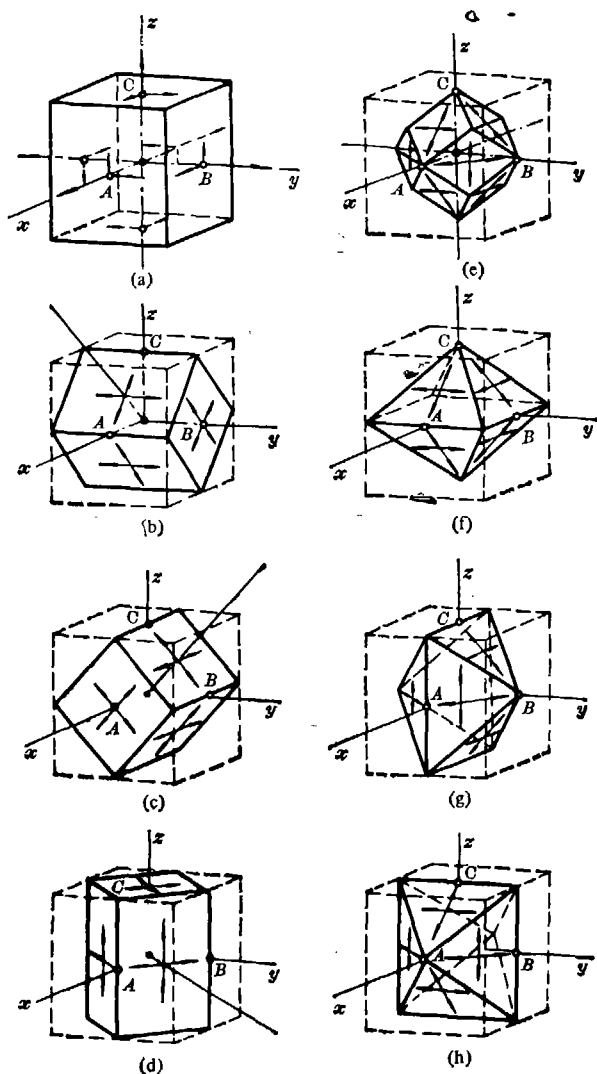


图 5 在复杂应力状态下的菱形十二面体多滑移系统和正交八面体多滑移系统

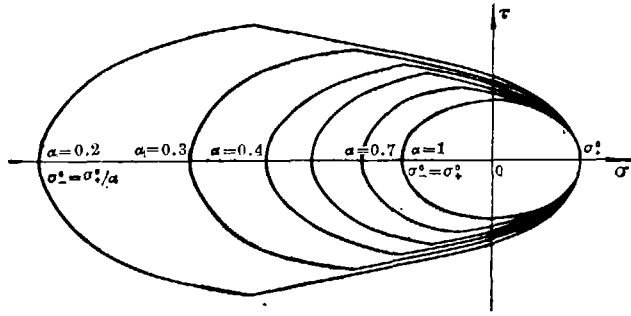
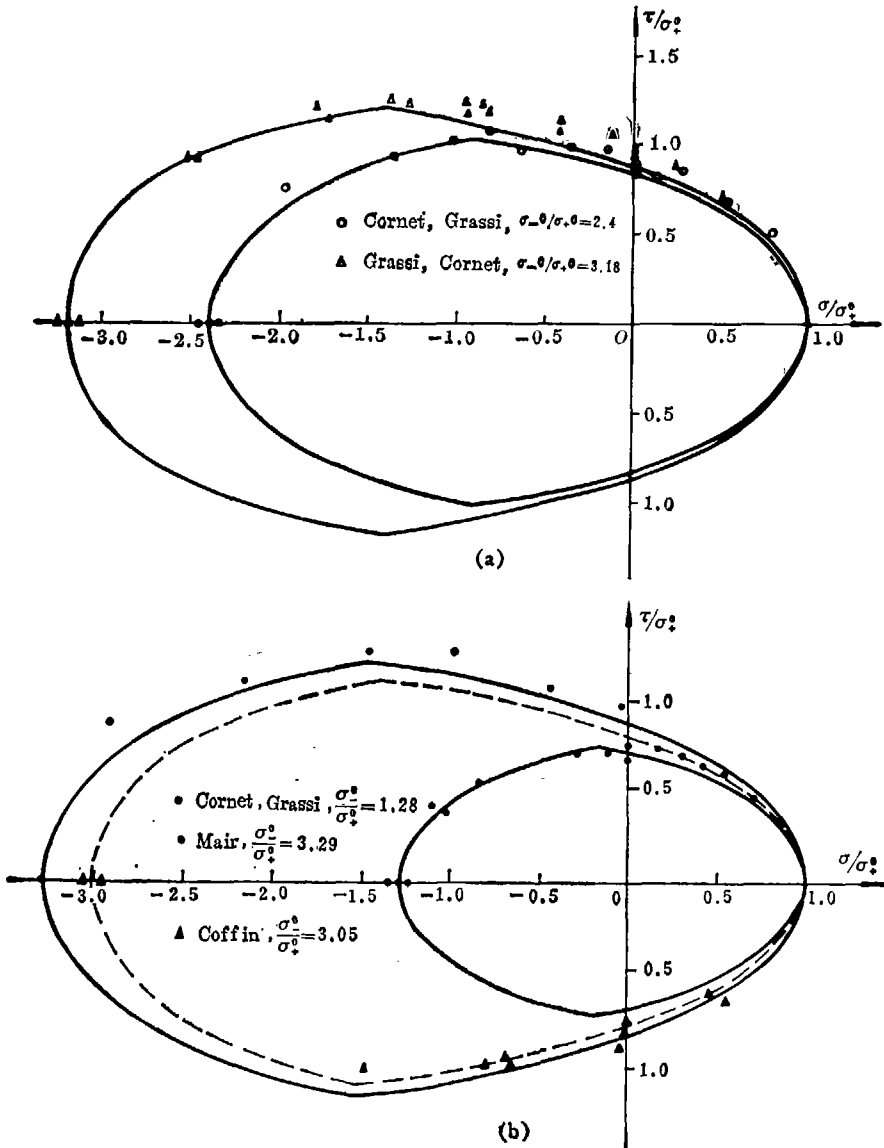
图6 双剪应力强度理论在 σ - τ 复合应力状态的极限迹线

图7 广义双剪应力强度理论与铸铁实验资料的比较

$$F \leq F' \text{ 为 } \frac{1}{2}(\sigma + \beta\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) \leq 0.$$

对于不同拉压强度比 $\alpha = \sigma_+^0/\sigma_-^0$ 的极限线,如图 6 所示。这些极限线,由两组曲线相交的内曲线所组成, $\alpha = 1$ 时为双剪应力屈服迹线(即 $\sigma_+^0 = \sigma_-^0$)。

双剪应力屈服准则与几种塑性材料的初始屈服面的实验资料的比较已在文献[3]中进行了讨论。广义双剪应力强度理论与 Cornet 和 Crassi^[15-17] 以及 Mair^[18,19], 等所作的灰铸铁和孕育铸铁在 σ - τ 复合应力状态下的实验结果的比较如图 7(a) 和 (b) 所示。图 7(a) 中 Δ 为灰铸铁实验点, $\circ$ 为孕育铸铁的实验点。图 7(b) 则为 Cornet 和 Crassi^[17] 以及 Mair^[18], Coffin^[19] 等对不同铸铁所得到的实验结果。

在图 8 中给出了三种不同标号混凝土 ($\circ$ ——400 号, $\times$ ——300 号, Δ ——200 号) 在拉剪和压剪复合应力状态下的实验结果^[20]。对于这些结果, 冈岛达雄、Bresler 以及坪井善胜等分别提出了不同的经验公式^[20], 但都没有得出一个理论表达式。在图 8 中, 根据材料的拉压强度比, 绘出了广义双剪应力强度理论所预示的相应的强度极限迹线。

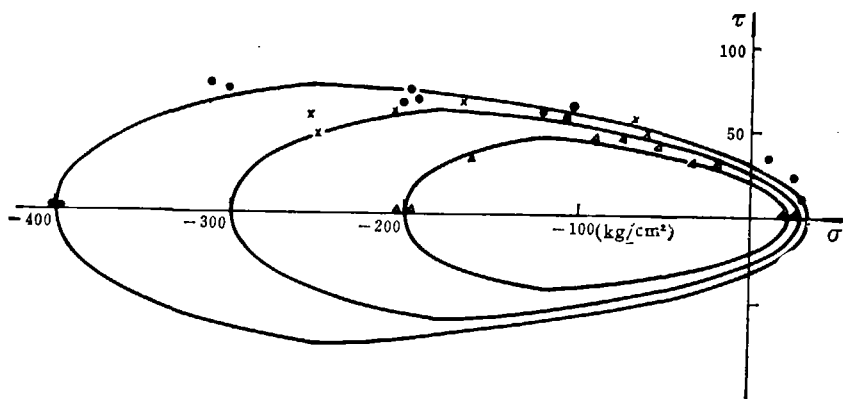


图 8 广义双剪应力强度理论与三种不同标号混凝土实验结果的比较

从以上这些试验结果以及文献[3]中的试验资料对比中可见, 双剪应力强度理论与一些材料的实验资料的符合程度是令人满意的。

六、结 论

材料在复杂应力状态下的强度理论, 是一个复杂而重要的问题。关于这一问题的现有的大量研究, 大多以最大剪应力准则或正八面体剪应力准则为基础。但是由于各种材料的破坏和晶体滑移现象的复杂性和多样性, 似乎还不可能用单一的理论或准则去说明各种不同材料在复杂应力状态下的破坏和滑移现象。因此, 必然存在一些不同的理论和假设去适合不同材料和晶体在复杂应力状态下的破坏和滑移。

本文把菱形十二面体模型作为连续介质力学的单元体, 系统地提出了双剪应力强度理论。它包括双剪应力屈服准则(应力空间)、双剪应变屈服准则(应变空间)、考虑 SD 效应和静水应力效应的广义双剪应力强度理论, 以及晶体滑移的临界双剪应力准则。

双剪应力强度理论与某些钢和铝^[3] 以及一些铸铁^[15-19] 和混凝土^[20] 的实验结果较为符合。

参 考 文 献

- [1] Drucker, D. C., A more fundamental approach to plastic stress strain relations, *Proc. 1st U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 1951, 487—491.
- [2] Ильюшин А. А., *ПММ*, **25**(1961), 503—507.
- [3] Yu Mao-Hong (俞茂饒), Twin shear stress yield criterion, *Inter. J. Mech. Sci.*, **25**(1983), 71—74.
- [4] Palmer, A. C., Maier, G. Drucker, D. C., *J. Appl. Mech.*, **34**(1967), 464—470.
- [5] Naghdi, P. M., Trapp, J. A., *J. Appl. Mech.*, **42**(1975), 61—66.
- [6] Drucker, D. C., Plasticity theory, strength differential (SD) phenomenon, and volume expansion in metals and plastics, *Metall. Trans.*, **4**(1973), 667—673.
- [7] Richmond, O., Spizig, W. A., Pressure dependence and dilatancy of plastic flow, 15th ICTAM, 1980.
- [8] Zienkiewicz, O. C., Generalized plasticity and some models for geomechanics, *Appl. Mathe. Mech.*, **3**(1982), 267—280.
- [9] Schmid, E., Yield point of crystals, critical stress law, *Proc. First Int. Congr. Appl. Mech.*, 1924, 342.
- [10] Schmid, E., Boas, W., 晶体范性学(钱临照译), 科学出版社, 1958, 104—116.
- [11] Seeger, A., 晶体的范性及其理论(张宏图译), 科学出版社, 1963, 45.
- [12] Taira, S., Hayashi, K., *Proc. Mechanical Behavior of materials*, 1971, Vol. 1, 152—163.
- [13] Asaro, R. J., Rice, J. R., Strain localization in ductile single crystals, *J. Mech. and Phys. Solids*, **25**(1977), 305—338.
- [14] 俞茂饒、何丽南, 金属塑性变形的双剪应力准则, 科学通报, **28**(1983), 10: 638—639.
- [15] Cornet, I., Grassi, R. C., *J. Appl. Mech.*, **16**(1949), 178—182.
- [16] Grassi, R. C., Cornet, I., *J. Appl. Mech.*, **22**(1955), 172—174.
- [17] Cornet, I., Grassi, R. C., *Trans. ASME, Series D*, **83**(1961), 1: 39—44.
- [18] Mair, W. M., *J. Strain Analysis*, **3**(1968), 4: 254—263.
- [19] Coffin, L. F., *J. Appl. Mech.*, **17**(1950), 233.
- [20] 徐积善, 强度理论及其应用, 水利电力出版社, 1984, 231—233.