中国科学: 数学　2017 年　第 47 卷　第 1 期: 77～96
SCIENTIA SINICA　Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates
综　述

有限维和无穷维空间上的 KAM 理论

献给张芷芬教授 90 华诞

尤建功[1*], 耿建生[2], 徐君祥[3]

1. 南开大学陈省身数学研究所, 天津 300071;
2. 南京大学数学系, 南京 210093;
3. 东南大学数学系, 南京 210096
E-mail: jyou@nju.edu.cn, jgeng@nju.edu.cn, xujun@seu.edu.cn

收稿日期: 2016-08-31; 接受日期: 2016-11-02; 网络出版日期: 2016-12-12; * 通信作者
国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2014CB340701) 和国家自然科学基金 (批准号: 11471155, 11371090 和 11271180) 资助项目

摘要　Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) 理论是 20 世纪最重要的数学成就之一. 近年来, 很多数学和物理分支中, 如天体力学、凝聚态物理、动力系统、偏微分方程、数学物理和算子谱理论, 出现了形形色色与 KAM 相关但经典 KAM 理论不能解决的问题, 刺激了 KAM 理论和方法的进一步发展. 本文对有限维和无穷维 KAM 理论的最新研究成果给出一个简要的综述 (并不很全面), 内容包括 KAM 理论中的非退化条件、低维不变环面及其有关 Hamilton 偏微分方程的 KAM 定理.

关键词　KAM 理论　Hamilton 系统　不变环面　小分母　非退化条件　Hamilton 偏微分方程

MSC (2010) 主题分类　37K55, 35B10

1　有限维 KAM 理论

Hamilton 系统是由辛流形上的 Hamilton 函数确定. 在局部坐标下, 通常可以写成下列形式:

$$\dot{q} = H_p(p, q), \quad \dot{p} = -H_q(p, q), \quad (q, p) \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{2n},$$

其中 H 是 Hamilton 函数, 相应的辛结构为 $dq \wedge dp$, n 是自由度.

Hamilton 系统有许多重要的自然科学背景, 最重要的例子就是著名的 N 体问题, 它是由 N 个质点构成的一个 Newton 系统, 只考虑质点之间的万有引力作用. 多体问题首先来源于太阳系的数学模型, 而太阳系的稳定性问题长时间以来一直是数学、力学和天文等科学家非常感兴趣的问题, 参见文献 [1].

1.1　可积和近可积 Hamilton 系统

最简单的 Hamilton 系统是可积系统, 它的相空间结构和动力学性质完全清楚, 因此, Hamilton 系统的可积性问题长久以来一直吸引着许多科学家的注意. 这方面最重要的成果是 Liouville 可积性定理, 这个结论由 Arnold [1] 证明.

英文引用格式: You J G, Geng J S, Xu J X. KAM theory in finite and infinite dimensional spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 77–96, doi: 10.1360/N012016-00154

　

定理 1.1 (Liouville 定理) 设 H 是 $2n$- 维辛流形上的 Hamilton 函数, 且有 n 个相互独立对合的首次积分 $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n$. 令

$$M_f = \{x \mid F_i(x) = f_i, i = 1, 2, \ldots, n\},$$

其中 $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n$, 则 M_f 是光滑流形, 且关于 H 的 Hamilton 流是不变的. 如果 M_f 还是紧的连通流形, 则它同胚于下列 n 维环面:

$$\mathbb{T}^n = \{(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \bmod 2\pi\} = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n.$$

此外, H 在流形 M_f 上的相流是条件周期运动, 也就是说, 在角坐标 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ 下, 有 $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, 其中 $\omega = \omega(f)$ 是拟周期频率.

Liouville 定理说明, 通过适当选取辛坐标, 一个可积系统在不变环面附近具有如下形式:

$$H(q, p) = h(p), \quad (q, p) \in \mathbb{T}^n \times D,$$

其中 p 称为作用变量, 而 q 称为角变量. 此时容易看到, 相空间被下列所有不变环面所充满:

$$\mathbb{T}_\omega = \{\mathbb{T}^n \times \{p_0\} \mid p_0 \in D\},$$

且该不变环面上的拟周期流可以表示为 $q(t) = q_0 + \omega(p_0)t$, $p(t) = p_0$, 其中 $\omega = h_p$ 是频率.

拟周期运动是可积 Hamilton 系统的典型 (typical) 现象, 可积 Hamilton 系统的相空间结构和动力学性质清楚而且简单. 但是, 不是所有的 Hamilton 系统都是可积的. 1892 年, Poincaré [2] 证明了著名的不可积定理, 它说明可积系统在通有的 (generic) 扰动下是不可积的 (也可参见文献 [3]). 例如, 当 $N \geqslant 3$ 时, N 体问题就是不可积的.

但是, 如果忽略行星之间的相互引力, 此时对应于太阳系的多体问题就变成可积的. 既然太阳占有太阳系中的绝对主要质量, 行星之间的相互引力相对于太阳的引力来说是非常小的, 因此, 太阳系就可以作为一个可积系统的小扰动. 出于这样的考虑, 人们开始研究可积系统的小扰动系统, 也就是近可积系统.

考虑下列近可积 Hamilton 函数 $H(q, p) = h(p) + f(q, p)$, 其中 $(q, p) \in \mathbb{T}^n \times D$, 这里 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界连通区域, f 是小扰动项. 从动力学的稳定性来看, 知道可积系统的什么性质在小扰动下可以保持下来是很重要的. 在小扰动下, 一个可积系统什么样的不变环面能保持下来? 而什么样的不变环面会破裂? 这些问题都是近可积 Hamilton 系统的基本问题.

这些近可积 Hamilton 系统的基本问题与天体力学中的稳定性问题有重要联系, 这些问题受到许多天文学家和数学家, 如 Kepler, Newton, Lagrange, Liouville, Delaunay 和 Weierstrass 等的关注. 历史上, 太阳系的稳定性问题一直受到科学家的关注. 事实上, 由于太阳系中的实际运动是拟周期运动, 因此太阳系的永久稳定性被认为是理所当然的. 既然 Poincaré 定理说明了 N ($N \geqslant 3$) 体问题是不可积的, 许多数学家试图给出太阳系稳定性的理论证明, 这极大地推动了可积系统扰动理论的发展.

1.2 经典 KAM 定理

关于解析近可积系统的不变环面问题, 1954 年 Kolmogorov [4, 5] 宣布了在一定的非退化条件下大多数未扰动可积 Hamilton 系统的不变环面在小扰动下仍然保持下来, 且给出了证明的基本思路; 而完整的证明后来由 Arnold [6] 和 Moser [7] 给出. Moser 的结果还适用于有限光滑系统. 这些结论现在简称为 (经典的) KAM 定理.

定理 1.2 [4–9] 考虑一个如上述给出的近可积 Hamilton 函数 $H(q,p)=h(p)+f(q,p)$. 假设频率映射 $\omega=h_p$ 在下列意义下非退化:

$$\det\left(\frac{\partial\omega}{\partial p}(p)\right)\neq 0,\quad \forall\, p\in D, \tag{1.1}$$

且 $\omega=h_p(p_0)$ 满足下列 Diophantine 条件:

$$|\langle\omega,k\rangle|\geqslant\frac{\alpha}{|k|^\tau},\quad \forall\, k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}, \tag{1.2}$$

其中 $\alpha>0$, $\tau>n-1$. 如果 f 充分小, 则由 $H(p,q)$ 生成的 Hamilton 系统有一个以 ω 为频率的不变环面, 它只是未扰动可积系统的不变环面 $\mathbb{T}_\omega$ 的小小变形. 在这个意义下, 我们通常说未扰动系统不变环面 $\mathbb{T}_\omega$ 在小扰动下保持下来. 所有保持下来的不变环面以频率为参数构成一个 Cantor 型集合, 在 Lebesgue 测度意义下占据了相空间的绝大部分区域.

KAM 定理说明, 对于具有上述非退化条件的近可积 Hamilton 系统, 拟周期运动是典型现象 (typical), 保持下来的不变环面在 Lebesgue 测度意义下充满了相空间的绝大部分区域. KAM 定理推翻了传统的遍历假设: "通有的 Hamilton 系统在 (几乎) 每一个紧的连通的能量超曲面上是遍历的". 关于这方面的问题, 参见文献 [3,10,11].

显然, 所有不变环面组成一个稳定的区域, 而这片稳定区域在 Lebesgue 测度意义下占据了相空间的绝大部分地方. 因此, Kolmogorov 结论说明了测度意义下的稳定性, 同时也从理论上对太阳系稳定性问题给出了一个肯定的答案.

Kolmogorov 结论完整的证明首先是由 Arnold 在实解析情形下给出的 (参见文献 [6,8]), 后来, Pöschel [12] 又给出了一个简洁的证明. 事实上, 关于 Kolmogorov 定理有各种各样的证明, 参见文献 [13–19]. 同时, 对于平面上具有椭圆不动点的有限光滑的保面积映射, Moser [7] 发展了一种快速收敛方法, 证明了不变曲线的存在性. 与 Kolmogorov 定理类似, Moser 的方法同样有小分母的问题. 事实上, 对于拟周期问题, 小分母引起的困难是本质性的. 这方面的问题可参见文献 [20–25].

下面给出 KAM 理论的基本思想和框架, 详细证明可参见文献 [12]. 主要思路是通过辛变换找到保持下来的不变环面附近的规范形. 为此, 首先在未扰动系统的不变环面处作线性化. 考虑变换 $p=\xi+I$, $q=\theta$, 则

$$H(q,p)=e+N+P(\xi;\theta,I),$$

其中 $e=h(\xi)$, $N=\langle\omega(\xi),I\rangle$, $\omega(\xi)=h_p(\xi)$, $P(\xi;\theta,I)=f_h(I,\xi)+f(\theta,\xi+I)$, $\xi\in\Pi\subset D$ 作为参数, 这里 e 是一个通常忽略不计的能量常数, N 是一个规范形, $\omega:\xi\to\omega(\xi)$ 称为频率映射, P 是小扰动项.

在此变换下, Hamilton 系统化为

$$\dot\theta=H_I=\omega(\xi)+P_I(\xi;\theta,I),\quad \dot I=-H_\theta=-P_\theta(\xi;\theta,I). \tag{1.3}$$

这样, 一族不变环面 $\mathbb{T}^n\times\{p\}$ 的保持性问题转化为一族 Hamilton 系统 (1.3) 的不变环面的保持性问题. 通过引进参数 ξ, 不变环面的频率问题可以从 KAM 步骤中独立出来处理, 这个技巧首先是由 Moser [7] 和 Pöschel [26] 发展起来的, 现在成为许多 KAM 理论的一个标准程序.

然后构造一个辛映射, 它是时间等于 1 的 Hamilton 流映射 $\Phi=X_F^t|_{t=1}$, 其中 F 是生成流映射的 Hamilton 函数. 在此辛映射下, Hamilton 函数 H 变为

$$H\circ\Phi=N_++\{N,F\}+R-[R]+P_+,$$

其中记号 $[R]$ 是指 R 在 $\mathbb{T}^n$ 上的积分平均值, $\{\cdot,\cdot\}$ 是 Poisson 括号积. 这时新的规范形为 $N_+ = N+[R] = \langle I, \omega_+(\xi)\rangle$, $\omega_+ = \omega + \hat{\omega}$, 这里 $\hat{\omega} = \partial_I[R]$. 而新的扰动项是

$$P_+ = \int_0^1 \{(1-t)\{N,F\} + R, F\} \circ X_F^t dt + (P-R)\circ\Phi.$$

如果下列关于 F 的线性同调方程有解:

$$\{N,F\} + R - [R] = 0, \tag{1.4}$$

那么, 通过辛变换 Φ, Hamilton 函数 H 变为 $H_+ = N_+ + P_+$, 其中 N_+ 是新的规范形, P_+ 是一个更小的扰动项. 如果上述过程可以重复的话, 那么新的 Hamilton 函数 H_+ 就如人们期待的那样越来越接近于一个可积的规范形了.

接下来解同调方程 (1.4), 这是 KAM 方法最重要和最关键的步骤. 将 R 和 F 展开成 Fourier 级数, 通过比较 Fourier 系数, 形式上可以得到 $F_k = 0$, 如果 $k=0$; $F_k = \frac{1}{\mathrm{i}\langle\omega(\xi),k\rangle}R_k$, 如果 $k\neq 0$ 且 $\langle\omega(\xi),k\rangle \neq 0$.

容易明白, 上述想法其实就是 Newton 逼近的思路, 其目的是, 通过解一个近似线性方程 (1.4), 找到不变环面更近似的规范形. 但是, 由于小分母导致的本质性困难, 很难得到近似线性方程解的有效控制. 事实上, 当 $0\neq\omega\in\mathbb{R}^n$ 且 $n\geqslant 2$ 时,

$$\inf_{0\neq k\in\mathbb{Z}^n} |\langle\omega,k\rangle| = 0 \quad \text{且} \quad \sup_{0\neq k\in\mathbb{Z}^n} |\langle\omega,k\rangle| = \infty.$$

这说明线性算子 $\mathcal{L}F = \{N,F\}$ 以及它的逆算子 $\mathcal{L}^{-1}$ 都是无界的, 于是对于解方程 (1.4) 来说标准的隐函数定理就失效了, 参见文献 [27].

为了获得同调方程的一个可控的解, 人们不得不假设小分母条件 (1.2), 这个条件也称作强非共振条件或 Diophantine 条件, 来控制逼近解的范数, 这样才能保证 KAM 迭代的收敛.

对于解析系统, Diophantine 条件 (1.2) 可以减弱为下列形式的小分母条件:

$$|\langle k,\omega\rangle| \geqslant \phi(|k|), \quad \forall\, 0\neq k\in\mathbb{Z}^n,$$

其中 ϕ 是一个逼近函数, 这里逼近函数是这样一类函数: 当 $|k|\to\infty$ 时, 比负指数函数 (如 $a^{-|k|}$ $(a>1)$) 衰减慢, 但比负指数的幂函数 (如 $|k|^{-\tau}$ $(\tau > n-1)$) 衰减快. 上述由逼近函数给出的小分母条件对于解析系统来说是最优的, 关于这方面的问题, 参见文献 [17, 28–30].

另一方面, 如果 $\tau > n-1$, 所有满足条件 (1.2) 的 Diophantine 向量构成一个没有任何内点的 Cantor 型集合. 而在 KAM 步骤中, 频率向量通常会有一点漂移, 因此, 小分母是非常重要而困难的问题. 我们通常要求频率映射依赖于某个参数, 且满足像 (1.1) 类似的非退化条件, 这样才能保证无穷次 KAM 步骤后, 满足小分母条件的参数集合是非空的.

1.3 最佳的非退化条件

在 KAM 定理中, Kolmogorov 非退化条件 (1.1) 是充分条件, 但不是必要的; 后来许多学者试图寻找较弱的非退化条件.

1971 年, Brjuno [31, 32] 提出了一个非退化条件

$$\operatorname{rank}\left(\omega, \frac{\partial\omega}{\partial p}\right) = n,$$

它也称为 Brjuno 非退化条件. 显然它比 (1.1) 弱一些.

20 世纪 80 年代末, Rüssmann [30] 宣布解析情形下的非退化条件可减弱为

$$\forall\,(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\quad a_1\omega_1(p)+a_2\omega_2(p)+\cdots+a_n\omega_n(p)\neq 0,\quad \text{在 } O \text{ 上}. \tag{1.5}$$

从几何上看, 条件 (1.5) 等价于频率映射 ω 的像不会完全落在任何一个过原点的超平面上.

大家知道, Rüssmann 非退化条件 (1.5) 是保证 KAM 定理结论成立最弱的非退化条件 (参见文献 [14,18]), 然而那个时候 Rüssmann 并没有给出证明, 原因是几何条件 (1.5) 不利于做分析.

1990 年, Cheng 和 Sun [33] 以及 Herman [34,35] 对一类特殊的三维映射, 在较弱的非退化条件下证明了一个 KAM- 型结论, 其中未扰动系统的频率依赖于一个一维参数. 1992 年, 这个结论进一步由 Xia [36] 推广到高维保面积映射.

1994 年, Cheng 和 Sun [37] 在一个较弱的非退化条件下证明了 Hamilton 系统的 KAM 定理. 几何上说, 这个非退化条件等同于频率映射的像可以表示为一族充分弯曲的曲线. 这个结论较大地改进了 Brjuno 非退化条件, 但还是稍强于 Rüssmann 非退化条件 (1.5).

1994 年, Xu 等 1) 给出了下列解析条件:

$$\operatorname{rank}\left\{\omega(p),\frac{\partial^\beta\omega}{\partial p^\beta}\;\middle|\;\forall\,\beta\in\mathbb{Z}_+^n,|\beta|\leqslant n-1\right\}=n,\quad \exists\,p\in O, \tag{1.6}$$

并且证明了它等价于 Rüssmann 非退化条件 (1.5). 利用此条件, 他们给出了 Rüssmann 非退化条件下 KAM 定理的严格证明. 1997 年, Xu 等研究成果 1) 的压缩版发表于文献 [38]; 徐君祥[39] 后来还给出过一个小的改进结果.

2001 年, 也就是在非退化条件 (1.5) 宣布 10 年以后, Rüssmann [17] 本人也给出了文献 [30] 中结论的一个证明. 了解有关更多的信息, 参见文献 [15,18,24,25,40].

1.4 Melnikov 定理和低维不变环面

低维不变环面的问题对于理解 Lagrange 环面的毁坏机理是非常重要的, 这方面的早期工作归功于 Melnikov [41,42] 和 Moser [9], 他们分别考虑了低维椭圆不变环面和低维双曲不变环面问题.

考虑一族实解析近可积 Hamilton 函数 $H=N+P$, 其中

$$N=\langle\omega,y\rangle+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\Omega_j(u_j^2+v_j^2) \tag{1.7}$$

是一个规范形, P 是一个小扰动, 相空间为 $\mathcal{P}=\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$, 赋予辛结构 $dx\wedge dy+du\wedge dv$, $\omega=(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n)$ 称为切向频率向量, 而 $\Omega=(\Omega_1,\Omega_2,\dots,\Omega_m)$ 称为法向频率向量.

如果 $P=0$, 则 $H=N$ 是在低维不变环面处的一个规范形. 显然, $(u,v)=(0,0)$ 是沿法向 (u,v) 的一个平衡点. 如果 $\Omega_j\neq 0\ (\forall\,j)$, 那么 $(0,0)$ 还是一个非退化的椭圆平衡点, 这样未扰动系统有一个椭圆低维不变环面 $\mathbb{T}^n\times\{0\}\times\{0\}\times\{0\}$, 切向频率为 ω, 法向频率为 Ω. 我们假设 Ω 解析依赖于 ω.

为了考虑椭圆低维不变环面问题, 我们首先引进下列小分母条件:

$$\langle\omega,k\rangle+\Omega_j(\omega)\neq 0,\quad \forall\,k\in\mathbb{Z}^n,\quad j=1,2,\dots,m, \tag{1.8}$$

1) Xu J, You J, Qiu Q. Invariant tori of nearly integrable Hamiltonian system with degeneracy. Preprint, ETH-Zürich, 1994, ISSN 0465–7926.

$$\langle \omega, k\rangle \pm \Omega_i(\omega) \pm \Omega_j(\omega) \neq 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^n, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.9}$$

(1.8) 称为第一 Melnikov 条件, 而 (1.9) 称为第二 Melnikov 条件. 这里的切向频率向量 ω 也作为参数.

定理 1.3 [41–43] 假设 Melnikov 条件 (1.8) 和 (1.9) 成立. 如果 P 充分小, 对于大多数参数 ω (在 Lebesgue 测度意义下), 在参数 ω 处的扰动系统有一个椭圆低维不变环面, 其切向频率是 ω 的一个小的漂移.

这个结论由 Melnikov [41,42] 在 1965 年提出, 完整的证明由 Eliasson [43] 在 1988 年给出. Pöschel [26] 也给出了一个不同的证明. 这个结论又进一步由 Kuksin [44,45] 和 Wayne [46] 推广到无穷维情形, 从此以后, Hamilton 偏微分方程的 KAM 理论蓬勃发展. 关于无穷维 KAM 理论, 我们将在下一节内容进行讨论.

Melnikov 定理中的第二 Melnikov 条件不是必须的. 1997 年, Bourgain [47] 在第一 Melnikov 条件下证明了低维不变环面的存在性. 1999 年, You [48] 用 KAM 方法得到了重法频率时 (这时第二 Melnikov 条件不成立) 低维不变环面的保存性和线性稳定性. 2001 年, Xu 和 You [49] 进一步用 KAM 方法在第一 Melnikov 条件下得到了低维不变环面的保存性和线性稳定性.

定理 1.4 [47,49] 假设 Melnikov 条件 (1.8) 成立. 如果 P 充分小, 那么对于大多数参数 ω (在 Lebesgue 测度意义下), 在参数 ω 处的扰动系统有一个线性稳定的椭圆低维不变环面.

值得注意的是, 文献 [50] 中的 Craig-Wayne 方法得不到不变环面附近的规范形, 因此不能说明保持下来的不变环面有线性稳定性, 文献 [48,49] 利用 KAM 方法不仅得到了不变环面的保持性, 同时还得到了不变环面的线性稳定性. 此后, 在各种较弱的非退化或非共振或正则性假设条件下, 有许多关于椭圆低维不变环面工作, 这里就不详细介绍, 除了上文提及的文献外, 请参见文献 [51–54].

比起椭圆情形, 双曲情形会简单些. 设

$$N = \langle \omega, y\rangle + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \Omega_j (u_j^2 - v_j^2), \tag{1.10}$$

如果 $\Omega_j \neq 0\ (\forall\, j)$, 则 $(u, v) = (0, 0)$ 是非退化的双曲平衡点. 双曲不变环面的保持性较早前由 Moser [9], Zehnder [27] 和 Graff [55] 得到.

定理 1.5 [9,27,55] 设 N 由 (1.10) 给出, 且 $(u, v) = (0, 0)$ 是非退化的双曲平衡点. 如果 P 充分小, 且 ω 满足小分母条件 (1.2), 则扰动系统 $H = N + P$ 有一个双曲的低维不变环面, 以 ω 为切向频率.

对非退化双曲情形, Melnikov 条件是不必要的, 许多关于 Lagrange 环面的 KAM- 型结论都可以推广到这种情形, 参见文献 [48, 56, 57].

到目前为止, 在非退化情形下, 关于低维不变环面的 KAM 定理已经取得了丰富的成果. 然而, 如果法向平衡点是退化的, 这对 KAM 理论带来很大的困难. 这种退化的情形会出现在共振 Lagrange 环面在小扰动下破裂分解成低维环面的时候, 有关这方面的问题, 我们可参见 Treshchev、Eliasson、Broer、Hassmann、Küpper、程崇庆、尤建功、李勇、易英飞、丛福仲和韩月才等的工作. 双曲的情形参见文献 [58–64]; 椭圆情形参见文献 [65–68], 一般退化情形参见文献 [69–75].

1.5 广义 Hamilton 系统

广义 Hamilton 系统 (也称 Poisson 系统) 由 Hamilton 函数和 Poisson 结构确定. Poisson 结构是一种 Lie 代数结构, 由满足 Jacobi 恒等式的双线性反对称形式定义. Poisson 结构可以是退化的.

在非退化的时候, Poisson 结构局部上就是标准的辛结构, 此时广义 Hamilton 系统局部上就是标准的 Hamilton 系统.

设 $M = D \times \mathbb{T}^n \times W \times W$, 其中 $D \subset \mathbb{R}^m$ 是区域, $W \subset \mathbb{R}^r$ 是 $\mathbb{R}^r$ 中以原点为中心的邻域. M 上的一个 Poisson 结构由下列结构矩阵定义:

$$\begin{pmatrix} 0 & -A(I) & 0 & 0 \\ A^{\mathrm{T}}(I) & B(I) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{r\times r} \\ 0 & 0 & E_{r\times r} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

其中 $(I,\varphi,u,v) \in M$, $A(I)$ 是秩为 m 的 $m\times n$ 矩阵函数, $B(I)$ 是反对称矩阵函数, $E_{r\times r}$ 是 r 阶恒等矩阵.

在上述定义的 Poisson 结构下, 对应于 $H(I,\varphi,u,v)$ 的广义 Hamilton 系统为

$$\begin{pmatrix} \dot{I} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A(I) \\ A^{\mathrm{T}}(I) & B(I) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_I \\ H_\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H_v \\ H_u \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

类似于标准的 Hamilton 系统, 称 I 为作用变量, φ 为角变量, (u,v) 为法向变量. 容易看到, 广义 Hamilton 系统中, 作用变量和角变量可以有不同的维数, 相空间 M 可以是奇数维. 因此, 广义 Hamilton 系统包含了标准 Hamilton 系统和保面积映射, 是比较广泛的一类系统.

如果

$$H = N = h(I) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\Omega_j(u_j^2 \pm v_j^2),$$

那么, 它是一个可积形式, 有不变环面 $\{I\}\times\mathbb{T}^n\times\{0\}\times\{0\}$, 频率向量 $\omega(I) = A^{\mathrm{T}}(I)h_I(I)$, $I\in D$.

标准的 KAM 理论并不能直接应用于广义 Hamilton 系统, 这方面较早的工作归功于 Li 和 Yi [76,77] 及 Cong [78]; 他们成功地建立了广义 Hamilton 系统的 KAM 理论, 且将一些经典的 KAM 定理推广到广义 Hamilton 系统.

定理 1.6 [76] 考虑近可积实解析广义 Hamilton 函数

$$H(I,\varphi) = N(I) + f(I,\varphi),$$

相应的系统由 (1.12) 给出, 其中 $r=0$. 设频率映射 $\omega(I) = A^{\mathrm{T}}(I)N_I(I)$ 满足 Rüssmann 非退化条件. 如果 f 充分小, 那么, 对应于 $H(I,\varphi)$ 的广义 Hamilton 系统有依赖于某参数的一族不变环面, 它们构成一个 Cantor 型集合, 在 Lebesgue 测度意义下, 占据了相空间中的绝大部分区域.

李勇和易英飞的课题组还把低维不变环面的 KAM 定理推广到了广义 Hamilton 系统, 参见文献 [56, 57, 70, 79–83].

1.6 其他方面进展

在解同调方程时, 小分母会导致光滑性损失, 因此, KAM 方法对于正则性条件是非常敏感的. 通常我们需要足够的光滑性来补偿小分母带来的光滑性损失. 虽然许多 KAM 定理首先是在解析条件下得到的, 但是它们在较弱的正则假设条件下也成立. 这方面一个重要的工作是 Rüssmann [29] 得到的, 他把 Moser 的关于保面积映射的 KAM 定理的 C^{333} 正则条件减弱到 C^5, 然后 Herman [34,35] 进一步

减弱到 $C^{3+\varepsilon}$. 此外, 许多 Hamilton 系统的 KAM 定理在 Gevrey 或 C^{μ} ($\mu > 2\tau+2$) 光滑情形下也成立, 其中 τ 是 Diophantine 条件 (1.2) 中的常数. 有关 KAM 理论的正则性问题, 可参见文献 [16,25,84–86].

虽然 KAM 理论起源于 Hamilton 系统, 现在它已成为研究拟周期问题强有力的工具. 自从 Moser 关于可逆系统拟周期运动的保持性工作以后, 许多类似的 KAM- 型结果推广到了可逆系统, 特别地, 文献 [9,14,20,87–89] 在可逆系统的 KAM 理论方面作出了重要贡献.

此外, KAM 理论还可以应用于辛映射, 且得到了许多 KAM- 型结论 [9,14,20,87–89].

另外一个与 KAM 理论密切相关的活跃的研究方向是拟周期线性系统和线性斜积系统 (co-cycles) 的约化问题以及它们在拟周期 Schrödinger 算子谱理论中的应用. 限于篇幅, 这里就不讨论了, 有兴趣的读者, 关于线性拟周期约化的问题可参见文献 [28,90–95], 关于线性斜积系统可参见文献 [96–100].

2 Hamilton 偏微分方程的 KAM 理论

很自然, 人们希望把有限维 Hamilton 系统的 KAM 理论推广到无穷维 Hamilton 系统, 即 Hamilton 函数有如下形式:

$$H(\theta,I,z,\bar{z},\xi) = \langle\omega(\xi),I\rangle + \sum_{n\in\Lambda}\Omega_n(\xi)z_n\bar{z}_n + P(\theta,I,z,\bar{z},\xi), \quad \xi\in\mathcal{O}^b, \tag{2.1}$$

其中 $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_b)\in\mathbb{T}^b$, $I=(I_1,\dots,I_b)\in\mathbb{R}^b$, $z=(z_n)_{n\in\Lambda}$ 属于某一 Hilbert 空间, Λ 是指标集, 通常 $\Lambda=\mathbb{Z}^1$ 或 $\Lambda=\mathbb{Z}^d$. 我们称 (θ,I) 为切坐标, z_n 和 $\bar{z}_n$ 为法坐标.

与有限维 Hamilton 系统不同的是, 如果仅假设扰动充分小, 无穷维 Hamilton 系统的 KAM 理论一般来讲是不正确的. 于是人们关心有物理背景的由 Hamilton 偏微分方程定义的无穷维 Hamilton 系统或无穷格点上定义的 Hamilton 系统, 一个原因是这类无穷维 Hamilton 系统有物理意义, 另一个原因是这类 Hamilton 系统有一些内在的结构使得 KAM 方法有效. 此前人们只能用变分方法得到周期解的存在性 (参见文献 [101,102]), 但变分法得不到拟周期解.

2.1 一维 Hamilton 偏微分方程的 KAM 理论

对 Hamilton 偏微分方程进行 Fourier 级数展开, 再对切方向引入作用 - 角变量变换后, 可得到相应的 Hamilton 函数 (2.1), 它满足

(A1) 非退化条件 (nondegeneracy): 映射 $\xi\to\omega(\xi)$ 是 $\mathcal{O}$ 和它的像之间的 C^1 微分同胚.

(A2) 法频的渐近增长性 (asymptotics of normal frequencies):

$$\Omega_n = |n|^a. \tag{2.2}$$

(A3) 扰动正则性 (regularity of the perturbation): 扰动 P 是关于参数 C^1 光滑的解析函数, 另外, 扰动 P 是正则的, 即 X_P 将 H^s 中的序列映为 $H^{s-\delta}$ 的序列, $\|X_P\|^{\delta}<\infty$. 这里, a 衡量法频 Ω_n 的增长速度, δ 衡量 Hamilton 向量场 X_P 的正则性.

例如, 对 Dirichlet 边界条件的一维波方程

$$u_{tt}-u_{xx}+M_\xi u+u^3=0, \quad u(t,0)=u(t,\pi)=0, \tag{2.3}$$

我们有 $a=1$, $\delta=-1$. 对 Dirichlet 边界条件的一维 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}u_t-u_{xx}+M_\xi u+|u|^2u=0, \quad u(t,0)=u(t,\pi)=0, \tag{2.4}$$

我们有 $a=2$, $\delta=0$. Fourier 乘子 M_ξ 定义为

$$M_\xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=\omega_n(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \quad n=i_1,\ldots,i_b,$$
$$M_\xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=0, \quad n\neq i_1,\ldots,i_b.$$

Hamilton 偏微分方程的 KAM 理论 (KAMPDEs) 起源于 20 世纪 80 年代的 Kuksin [45] 和 Wayne [46] 的工作, 他们独立证明了后面的 KAM 结果.

定理 2.1 假设 (2.1) 满足 (A1)–(A3), $(a,\delta)=(1,-1)$ 或 $(2,0)$, 另外, 扰动 P 充分小, 则有后面结论: 存在 Cantor 集 $\mathcal{O}_\gamma\subset\mathcal{O}$, $\mathrm{meas}(\mathcal{O}\setminus\mathcal{O}_\gamma)=O(\gamma)$ 和映射 (关于 θ 解析, 关于参数 ξ 是 C^1_W 的)

$$\Psi:\mathbb{T}^b\times\mathcal{O}_\gamma\to D(r,s)\times\mathcal{O},$$

其中 Ψ 是近乎恒同变换, 使得对任意 $\xi\in\mathcal{O}_\gamma$, $\theta\in\mathbb{T}^b$, 曲线 $t\to\Psi(\theta+\omega t,\xi)$ 是 Hamilton 系统 (2.1) 的线性稳定拟周期解.

定理 2.1 能应用于 Dirichlet 边界条件的一维波方程和一维 Schödinger 方程.

定理 2.2 [45, 46] 对 Lebesgue 测度意义下大多数的 ξ, (2.3) 有一族线性稳定的拟周期解.

对方程 (2.4) 也有同样的结果. 从技术观点来看, Dirichlet 边界条件下的一维波方程是使得 KAM 方法能够应用的最简单的一类无穷维 Hamilton 系统. 原因如下: 第一, 法频是单的且相互之间有一定的距离, 这保证所需要解的同调方程是数量方程. 第二, 扰动的向量场有 -1 阶的光滑性, 这保证测度估计的可行性.

对 Dirichlet 边界条件的一维 Schrödinger 方程而言, $\delta=0$, 这意味着向量场的光滑性比波方程差, 一般情形下这会给测度估计带来麻烦, 幸运的是, 法频 $\Omega_n=|n|^2$ 随着 $n\to\infty$ 会互相远离, 这使得测度估计可行.

当我们考虑周期边界条件的一维波方程时, 我们遇到了重法频带来的困难. 在 20 世纪 90 年代, 即使是有限维的情形也没有结果, 为了克服这个困难, Craig 和 Wayne [50, 103] 利用了 Nash-Moser 迭代和 Lyapunov-Schmidt 分解, 对有小特征值的无穷维矩阵的逆得到了很好的估计, 从而成功地构造了周期边界条件的一维波方程和一维 Schrödinger 方程的周期解. Bourgain [104–107] 进一步发展了 Craig 和 Wayne 的方法证明了 Dirichlet 或周期边界条件下高维波方程和高维 Schrödinger 方程拟周期解的存在性, 没有外参数的情形可参见文献 [108]. 关于有限光滑的外力驱动的情形及单位球面的情形, 参见文献 [109–111]. 我们需要强调的是, Craig 和 Wayne 及 Bourgain 的方法对证明拟周期解的存在性是很有效的方法, 但不能得到线性稳定性, 因此, 他们的结果弱于 KAM 方法得到的结果.

在 20 世纪 90 年代, 人们甚至怀疑 KAM 方法不能处理重法频的情形 (参见文献 [106]). 1999 年, You [48] 首先在有限维情形克服了重法频带来的困难. 2000 年, Chierchia 和 You [112] 进一步证明了一个可以处理重法频的无穷维 KAM 定理, 这个定理应用于周期边界条件的一维波方程. 从此以后人们开始发展无穷维 KAM 理论来处理更复杂的 Hamilton 偏微分方程.

定理 2.3 [112] 对大多数的 ξ, 周期边界条件的一维波方程

$$u_{tt}-u_{xx}+M_\xi u+u^3=0, \quad u(t,x)=u(t,x+2\pi) \tag{2.5}$$

有线性稳定的拟周期解.

从技术观点来看, Chierchia 和 You [112] 允许更一般的标准形, 准确地讲, 他们考虑更一般的标准形

$$\langle\omega(\xi),I\rangle+\sum_{n\in\Lambda}\langle\Omega_n(\xi)z_n,\bar{z}_n\rangle,$$

其中 $\Omega_n(\xi)$ 是有限维矩阵, z_n 是有限维向量, 相应的同调方程是线性向量方程或线性矩阵方程, 事实上, 文献 [112] 是文献 [48] 的无穷维推广.

对周期边界条件的一维 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}u_t - u_{xx} + M_\xi u + |u|^2 u = 0, \quad u(t,x) = u(t,x+2\pi), \tag{2.6}$$

我们有 $\Omega_n = n^2$, $n \in \mathbb{Z}$, $\delta = 0$. 因此, 非线性项的正则性弱于波方程, 这会给测度估计带来麻烦. 为了克服这个困难, Geng 和 You [113] 证明了一个满足如下衰减条件的 KAM 定理, 并将它应用于周期边界条件的一维 Schrödinger 方程:

衰减假设 (decay assumption):

$$\left\| \frac{\partial^2 P}{\partial q_n \partial q_m} \right\| \leqslant \varepsilon \mathrm{e}^{-|n+m|\rho},$$
$$\left\| \frac{\partial^2 P}{\partial q_n \partial \bar{q}_m} \right\| \leqslant \varepsilon \mathrm{e}^{-|n-m|\rho},$$
$$\left\| \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{q}_n \partial \bar{q}_m} \right\| \leqslant \varepsilon \mathrm{e}^{-|n+m|\rho}.$$

定理 2.4 [113] 对大多数的 ξ, 周期边界条件的一维 Schrödinger 方程 (2.6) 有一族线性稳定的拟周期解.

上面的这些结果都是处理带有外参数的 Hamilton 偏微分方程, 对于没有外参数的 Hamilton 偏微分方程, 人们需要利用标准形技巧得到 "扭转" 的近可积系统.

定理 2.5 [15] Dirichlet 边界条件的一维 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}u_t - u_{xx} + mu + |u|^2 u = 0, \quad u(t,0) = u(t,\pi) = 0$$

有 Cantor 族线性稳定的拟周期解.

定理 2.6 [114] Dirichlet 边界条件的一维波方程

$$u_{tt} - u_{xx} + mu + u^3 = 0, \quad u(t,0) = u(t,\pi) = 0$$

有 Cantor 族的线性稳定的拟周期解.

定理 2.7 [115] 周期边界条件的一维波方程

$$u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0, \quad u(t,x) = u(t,x+2\pi)$$

有 Cantor 族的线性稳定的拟周期解.

有大量的文献处理这种情形, 如文献 [116–118] 等.

当人们考虑周期边界条件的 KdV (Korteweg-de Vries) 方程

$$u_t = -u_{xxx} + (M_\xi u + u^3)_x, \quad u(t,x) = u(t,x+2\pi) \tag{2.7}$$

时, 新的困难出现, 在这种情形下, $a=3$, $\delta=1$, 这样扰动是无界的. 为了 KAM 迭代依然奏效, 我们不得不把一些非可积的项放入标准形, 导致的麻烦是人们不得不解依赖于角变量的同调方程. Kuksin [119] 克服了这个困难给出了一个可应用于 KdV 方程的 KAM 定理, 也可参见文献 [120, 121].

定理 2.8 [119–121] 对大多数的 ξ, 方程 (2.7) 有一族线性稳定的拟周期解.

注 2.1 上面的定理适用于情形 $0 < \delta < a - 1$.

当考虑 Dirichlet 边界条件的带导数 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}u_t - u_{xx} + M_\xi u - \mathrm{i}(|u|^2 u)_x = 0, \quad u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \tag{2.8}$$

时, 人们发现 $\Omega_n = n^2$, $n \geqslant 1$, $\delta = 1$. 这样 $0 < \delta = a - 1$, 因此正则性弱于 KdV 方程. Liu 和 Yuan [122,123] 通过改进的 Kuksin 引理证明了一个可以应用于 (2.8) 的 KAM 定理.

定理 2.9 [122,123] 方程 (2.8) 满足假设 (A1)、(A2) ($a = 2$) 和 (A3) ($\delta = 1$), 且有一族线性稳定的拟周期解.

注 2.2 上面的定理适用于情形 $0 < \delta \leqslant a - 1$.

当 $a - 1 < \delta \leqslant a$ 时, Baldi 等 [124] 证明了扰动的 Airy 方程

$$u_t + u_{xxx} + \varepsilon\partial_x(f(\lambda\omega t, x, u, u_x, u_{xx})) = 0, \quad x \in \mathbb{T}, \quad f \in C^k \tag{2.9}$$

拟周期解的存在性, 在这种情形下, $\Omega_n = n^3$, $n \geqslant 1$, $\delta = 3$. 关键点是线性 Airy 方程的约化问题, 约化到常系数的方程不能通过 KAM 得到, 而是在 KAM 迭代以前, 首先进行一些坐标变换 (参见文献 [125,126]), 这仅降低扰动的阶数而不是扰动的大小.

定理 2.10 [124] 方程 (2.9) 有一族线性稳定的拟周期解.

注 2.3 上面的定理适用于情形 $0 < \delta \leqslant a$. 自治的情形参见脚注 2).

定理 2.11 3) 带有曲面张力条件的水波方程有一族线性稳定的拟周期解.

这方面的研究目前非常活跃, 人们还在发展 KAM 方法来处理更复杂的 Hamilton 偏微分方程.

2.2 高维 Hamilton 偏微分方程的 KAM 理论

当考虑高维 Hamilton 偏微分方程时, 随着 n 趋于无穷大, 法频的重数也趋于无穷大, 这将带来相当大的麻烦. 高维梁方程

$$u_{tt} + \Delta^2 u + M_\xi u + u^3 = 0, \quad x \in \mathbb{T}^d \tag{2.10}$$

同时具有波方程和 Schrödinger 方程的优点, 从而 KAM 定理处理起来较为容易. 事实上, 这时 $\Omega_n = |n|^2$, $n \in \mathbb{Z}^d$, $\delta = -1$.

定理 2.12 [127,128] 方程 (2.10) 有线性稳定的拟周期解.

部分双曲的拟周期解 (真正的非线性现象) 也能通过 KAM 得到.

定理 2.13 [129] 方程 (2.10) 有 Cantor 族的部分双曲的拟周期解.

注 2.4 球面上的 Klein-Gordon 方程有相似的结论, 参见文献 [130,131].

(A3) 中 $\delta = 0$ 是更困难的情形. 高维 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}u_t - \Delta u + M_\xi u + f(x, u, \bar{u}) = 0, \quad x \in \mathbb{T}^d \tag{2.11}$$

恰属于这种情形, 这时 $\Omega_n = |n|^2$, $n \in \mathbb{Z}^d$, $\delta = 0$.

Eliasson 和 Kuksin [132] 证明了一个满足下面假设的 KAM 定理并应用于高维 Schrödinger 方程:

(A4) Töplitz-Lipschitz 性质: 对任意固定的 $n, m \in \mathbb{Z}^d$, $c \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, 存在极限

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial^2 P}{\partial q_{n+tc}\partial q_{m-tc}}, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\partial^2 P}{\partial q_{n+tc}\partial \bar{q}_{m+tc}}, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{q}_{n+tc}\partial \bar{q}_{m-tc}}.$$

2) Baldi P, Berti M, Montalto R. KAM for autonomous quasi-linear perturbations of KdV. Preprint, 2015

3) Berti M, Montalto R. Quasi-periodic standing wave solutions of gravity-capillary water waves. Preprint, 2016

另外, 存在 $K>0$, 使得当 $|t|>K$ 时, P 满足

$$\left\|\frac{\partial^2 P}{\partial q_{n+tc}\partial q_{m-tc}}-\lim_{t\to\infty}\frac{\partial^2 P}{\partial q_{n+tc}\partial q_{m-tc}}\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{|t|}\mathrm{e}^{-|n+m|\rho},$$

$$\left\|\frac{\partial^2 P}{\partial q_{n+tc}\partial \bar{q}_{m+tc}}-\lim_{t\to\infty}\frac{\partial^2 P}{\partial q_{n+tc}\partial \bar{q}_{m+tc}}\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{|t|}\mathrm{e}^{-|n-m|\rho},$$

$$\left\|\frac{\partial^2 P}{\partial \bar{q}_{n+tc}\partial \bar{q}_{m-tc}}-\lim_{t\to\infty}\frac{\partial^2 P}{\partial \bar{q}_{n+tc}\partial \bar{q}_{m-tc}}\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{|t|}\mathrm{e}^{-|n+m|\rho}.$$

定理 2.14 [132] 对大多数的 ξ, 方程 (2.11) 有线性稳定的拟周期解.

注 2.5 Geng 和 You [133] 通过增加零动量假设给了一个简化的证明.

当方程没有外参数时, 我们需要利用标准形技巧得到振幅对频率的扭转, 高维情形化标准形是更加困难的. Bourgain [106, 134] 证明了二维 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}u_t-\Delta u+mu+u|u|^2=0 \tag{2.12}$$

两个频率拟周期解的存在性.

定理 2.15 [106] 固定两个圆周 $|i_1|=|i_2|=R$, $i_1\neq -i_2$ 上的整点 $i_1,i_2\in\mathbb{Z}^2$, 方程 (2.12) 有如下形式的拟周期解:

$$u(t,x)=\sum_{j=1}^{2}\xi_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_j t+\langle i_j,x\rangle)}+O(|\xi|^3)$$

满足

$$\omega_j=|i_j|^2+m+O(|\xi|^2),\quad j=1,2.$$

Bourgain [106] (也可参见文献 [107]) 指出, b ($b>2$) 个频率拟周期解的标准形分析更加困难, 所以上面结果的推广还远远没有解决. 原因如下: 人们知道 KAM 理论适用于好的主部加扰动的 Hamilton 函数, 好的主部在 KAM 迭代中起着重要的作用. 对没有外参数的 Hamilton 系统, 人们不得不用标准形技巧转换 Hamilton 函数为好的主部 (通常是扭转的可积项) 加扰动的形式, 因为方程 (2.12) 的线性部分是完全共振的, 所以对非线性 Schrödinger 方程 (2.12) 而言得到好的主部是非常困难的. 这个困难在文献 [106, 132, 134] 中通过增加外参数而避免掉了.

因为三次 Schrödinger 方程 (2.12) 的线性部分是完全共振的, 可积的标准形是几乎不可能的, 因此一些依赖于角变量的二次项 $\sum_{|n|\neq|m|}P_{nm}(\theta)z_n\bar{z}_m$ 将被放入标准形中. 这样, 文献 [132] 的 KAM 定理不能应用到 (2.12), 我们不得不仔细选择切方向使得标准形中的非可积项尽可能少以使得同调方程尽可能容易求解, 相似的想法已用在文献 [128] 中.

Geng 等 [135] 考虑了二维非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}u_t-\triangle u+|u|^2u=0,\quad x\in\mathbb{T}^2,\quad t\in\mathbb{R}, \tag{2.13}$$

$$u(t,x_1,x_2)=u(t,x_1+2\pi,x_2)=u(t,x_1,x_2+2\pi). \tag{2.14}$$

通过仔细选择切频, 许多共振项能被避免, 然后得到的标准形尽管依赖角变量 θ 但比 Bourgain 的标准形简单得多. 事实上, 在每一步 KAM 迭代中, 同调方程能被分解成无穷多至多四阶的线性方程组, 最终可以得到一族小振幅的拟周期解.

定理 2.16 [135] 非线性 Schrödinger 方程 (2.13) 有 Cantor 族的解析的拟周期解.

这个结果将 Bourgain 的二维不变环面存在结果 (参见文献 [106]) 推广到任意有限维不变环面的存在性. 我们强调, 除了拟周期解的存在性, 定理 2.16 还得到了好的标准形, 可以用于研究解的线性稳定性或其他性质, 例如, 我们在文献 [135] 中还构造了部分双曲的拟周期解, 这是真正的非线性现象.

定理 2.16 也可应用于更一般的二维非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}u_t - \triangle u + f(|u|^2)u = 0, \quad x \in \mathbb{T}^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

其中 f 是原点邻域内的实解析函数, 且满足 $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. 然而, 空间三维或三维以上的非线性 Schrödinger 方程与二维有本质差别, 最近, Procesi 和 Procesi [136] 将空间二维情形推广到空间高维情形.

2.3 无穷维离散 Hamilton 系统的 KAM 理论

考虑 Hamilton 函数为

$$H = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[V_n|\psi_n|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi_n|^4 + \varepsilon_1(\psi_{n+1} + \psi_{n-1})\bar{\psi}_n + \varepsilon_2|\psi_{n+1} + \psi_{n-1}|^2\psi_n\bar{\psi}_n \right]$$

的 Hamilton 方程

$$\mathrm{i}\dot{\psi}_n = -\frac{\partial H}{\partial \bar{\psi}_n},$$

即离散的无穷维 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\dot{\psi}_n + V_n\psi_n + \beta|\psi_n|^2\psi_n + \varepsilon_1(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) + \varepsilon_2|\psi_{n+1} + \psi_{n-1}|^2\psi_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.15}$$

这个方程有时也称为离散的 GP (Gross-Pitaevskii) 方程, 它是凝聚态动力性态的数学模型 (参见文献 [137]).

无序的非线性动力系统局域化的研究是数学物理中的一个重要研究分支, 最初源于 Fröhlich 等 [138] 的工作.

定理 2.17 [138] 当 $\varepsilon_1 = 0$, ε_2 充分小, $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是独立同分布的随机变量时, 上面方程有无穷维的紧的不变环面.

$\epsilon_1 = 0$ 情形的另一些研究工作可参见文献 [139–141]. 我们指出, $\epsilon_1 = 0$ 是一个 "toy" 模型, 物理意义较弱.

Fröhlich 等 [138] 提出了后面的猜想 (参见文献 [138]): Consider the equation

$$\mathrm{i}\dot{q}_n + \epsilon(q_{n+1} + q_{n-1}) + V_n q_n + \delta|q_n|^2 q_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.16}$$

with $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ i.i.d. random variables. If ϵ and δ are small enough, with the equation in a large class, then for "most" initial conditions ("Most", e.g., with respect to the uniform measure on finite-dimensional unit spheres), $q^0 = (q_n^0)_{n\in\mathbb{Z}}$, of finite support, the solutions $q^t = (q_n^t)_{n\in\mathbb{Z}}$ of (2.16) satisfy

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} t^{-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|q_n^t|^2 = 0.$$

目前这个猜想已有一些突破性的结果:

定理 2.18 [142] 当 ϵ 和 δ 充分小时, 方程 (2.16) 有一族拟周期解.

注 2.6 Bourgain 和 Wang [143] 也考虑了无物理背景的方程, 非线性项为 $\lambda_n|q_n|^2q_n$, $|\lambda_n| < \epsilon(1+|n|)^{-\tau}$, $\tau > 0$ 充分小. 通过构造辛变换生成能量孤岛, 他们证明了, 如果 ϵ 充分小, 那么解的扩散速度 (H^1 范数) 随时间在 $V = (V_n)$ 的全概率意义下至多是多项式增长的. 另外, Wang 和 Zhang [144] 关于方程 (2.16) 也给出了一个 Nekhoroshev 类型的结果, 他们证明了长时间的 Anderson 局域化.

定理 2.19 [145] 对大多数的 $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\tilde{\alpha}$ 是 Diophantine 数, ϵ 充分小时, 离散的 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\dot{q}_n + \epsilon(q_{n+1} + q_{n-1}) + \tan \pi(x + n\tilde{\alpha})q_n + \epsilon|q_n|^2 q_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.17}$$

有一族拟周期解.

这个结果借助了 Bellissard 等 [146] 的工作, 他们研究了方程 (2.17) 对应的线性算子即 Maryland 算子的性质, Maryland 算子有纯点谱, 且对任意截断的近似算子相应的特征函数一致衰减.

Geng 等 [147] 研究了一维离散非线性 Schrödinger 方程的 “动态局域化”,

$$\mathrm{i}\dot{q}_n + \epsilon(q_{n+1} + q_{n-1}) + V(n\tilde{\alpha} + x)q_n + |q_n|^2 q_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.18}$$

其中 $0 < \epsilon \ll 1$, V 是 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上的非常值的实解析函数, $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$ 是 Diophantine 数, 即存在 $\tilde{\tau} > 1$ 和 $\tilde{\gamma} > 0$ 使得

$$|n\tilde{\alpha}|_1 \geqslant \frac{\tilde{\gamma}}{|n|^{\tilde{\tau}}}, \quad n \neq 0, \tag{2.19}$$

其中 $|x|_1$ 是 x 到整数的距离, 因此 $0 \leqslant |x|_1 \leqslant \frac{1}{2}$. 与文献 [148] 一样, 我们要求非常值实解析函数 V 满足

$$\sup_{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} |\partial^m V(x)| \leqslant C L^m m!, \quad m \geqslant 0, \quad C, L > 0, \tag{2.20}$$

且满足横截条件

$$\max_{0 \leqslant m \leqslant \tilde{s}} |\partial_\varphi^m (V(x+\varphi) - V(x))| \geqslant \tilde{\xi} > 0, \quad \forall x, \quad \forall \varphi, \tag{2.21}$$

$$\max_{0 \leqslant m \leqslant \tilde{s}} |\partial_x^m (V(x+\varphi) - V(x))| \geqslant \tilde{\xi} |\varphi|_1, \quad \forall x, \quad \forall \varphi, \tag{2.22}$$

其中 $\tilde{\xi}, \tilde{s} > 0$. 显然, $V(x) = \cos 2\pi x$ 满足上述条件.

借助于 Eliasson [148] 的工作, Geng 等 [147] 证明了一个抽象的 KAM 定理, 并应用它到方程 (2.18) 得到了 “动态局域化” 结果. 从 KAM 观点来看, 文献 [147] 的主要技术困难如下:

(i) 与文献 [138] 不同, 人们不得不处理二阶扰动;

(ii) 与文献 [142] 不同, 我们的证明沿袭了传统的 KAM 方法;

(iii) 与文献 [145] 比较, 主要的困难是相应的线性算子有无穷阶共振的点谱.

定理 2.20 [147] 考虑一维离散 Schrödinger 方程 (2.18), 固定 $\mathcal{J} = \{n_1, \ldots, n_b\} \subset \mathbb{Z}$, $b > 1$, 存在充分小的 $\epsilon_* = \epsilon_*(C, L, \tilde{\xi}, \tilde{s}, \tilde{\gamma}, \tilde{\tau}, \mathcal{J})$, 使得当 $0 < \epsilon < \epsilon_*$ 时, 我们有以下结论:
存在 Cantor 集 $\mathcal{O}_\epsilon = \mathcal{O}_\epsilon(x) \subset [0,1]^b$ 满足 $[0,1]^b \setminus \mathcal{O}_\epsilon \to 0, \quad \epsilon \to 0$, 对于初值 $q^0 \in \mathcal{O}_\epsilon$ (紧支集 $\mathcal{J}$), 方程 (2.18) 有拟周期解 $q^t = (q_n^t)_{n \in \mathbb{Z}}$ 满足

$$\sup_t \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{2d} |q_n^t|^2 < \infty, \quad \forall\, d > 0.$$

Hamilton 偏微分方程的 KAM 理论 (KAMPDEs) 目前仍然是非常活跃的研究方向, 人们还在继续发展 KAM 理论来研究更多的偏微分方程.

致谢 感谢审稿人的仔细审阅以及提出的一些具体修改意见.

参考文献

1 Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1981
2 Poincaré H. Les Méthodes Nouvelles De la Méchanics Célesete, vols. I–III. Paris: Gauthier-Villars, 1892–1899. English translation: Goroff D L. New Methods in Celestial Mechanics. College Park: American Institute of Physics, 1993
3 Kunze M, Meyer K R. Generic Hamiltonian dynamical systems are neither integrable nor ergodic. Mem Amer Math Soc, 1974, 144: 1–52
4 Kolmogorov A N. On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function (Russian). Dokl Akad Nauk SSSR, 1954, 98: 527–530
5 Kolmogorov A N. Preservation of conditionally periodic movements with small change in the Hamilton function. In: Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems. Lecture Notes in Physics, vol. 93. Berlin: Springer-Verlag, 1979, 51–56
6 Arnold V I. Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the persistence of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian. Russian Math Surveys, 1963, 18: 9–36
7 Moser J. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. Nachr Akad Wiss Göttingen Math-Phys Kl II, 1962, 2: 1–20
8 Arnold V I. Dynamical Systems, vol. 3. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 3. Berlin: Springer-Verlag, 1988
9 Moser J. Convergent series expansions for quasi-periodic motions. Math Ann, 1976, 169: 136–176
10 Arnold V I, Avez A. Ergodic Problems of Classical Mechanics, 2nd ed. Redwood City: Addison-Wesley, 1989
11 Arnold V I, Kozlov V V, Neishtadt A I. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics (Russian), 2nd ed. Moscow: Editorial URSS, 2002
12 Pöschel J. A lecture on the classical KAM theorem. In: Smooth Ergodic Theory and Its Applications. Providence: Amer Math Soc, 2001, 707–732
13 Bounemoura A, Fischler S. The classical KAM theorem for Hamiltonian systems via rational approximations. Regul Chaotic Dyn, 2014, 19: 251–265
14 Broer H, Huitema G, Sevryuk M. Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems: Order Amidst Chaos. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1645. Berlin: Springer-Verlag, 1996
15 Kuksin S B, Pöschel J. Invariant Cantor manifolds of quasiperiodic oscillations for a nonlinear Schrödinger equation. Ann of Math (2), 1996, 143: 149–179
16 Pöschel J. Integrability of Hamiltonian system with Cantor tori. Comm Pure Appl Math, 1982, 213: 653–695
17 Rüssmann H. Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems. Regul Chaotic Dyn, 2001, 6: 119–204
18 Sevryuk M B. KAM stabe Hamiltonians. J Dyn Control Syst, 1995, 1: 351–366
19 Xu J, Lu X. General KAM theorems and their applications to invariant tori with prescribed frequencies. Regul Chaotic Dyn, 2016, 21: 107–125
20 Broer H, Huitema G, Takens F, et al. Unfoldings and bifurcations of quasi-periodic tori. Mem Amer Math Soc, 1990, 83: 1–175
21 Eliasson L H, Fayad B, Krikorian R. KAM tori near an analytic elliptic fixed point. Regul Chaotic Dyn, 2013, 18: 801–831
22 Eliasson L H, Fayad B, Krikorian R. Around the stability of KAM tori. Duke Math J, 2015, 164: 1733–1775
23 Fayad B, Krikorian R. Herman's last geometric theorem. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2009, 42: 193–219
24 Sevryuk M B. The classical KAM theory at the dawn of the twenty-first century. Mosc Math J, 2003, 3: 1113–1144
25 Sevryuk M B. KAM-tori, persistence and smoothness. Nonlinearity, 2008, 21: T177–T185
26 Pöschel J. On elliptic lower dimensional tori in Hamiltonian systems. Math Z, 1989, 202: 559–608
27 Zehnder E. Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems II. Comm Pure Appl Math, 1976, 29: 49–111
28 Rüssmann H. On the one-dimensional Schrödinger equation with a quasiperiodic potential. Ann New York Acad Sci, 1980, 357: 90–107
29 Rüssmann H. On the existence of invariant curves of twist mappings of an annulus. In: Geometric Dynamics. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1007. Berlin: Springer, 1983, 677–712
30 Rüssmann H. On twist Hamiltonians. Talk on the Colloque International: Mécanique Céleste et Systèmes Hamiltoniens. Marseille, 1990
31 Brjuno A. Analytic form of differential equations, I. Trans Moscow Math Soc, 1971, 25: 131–288

32 Brjuno A. Analytic form of differential equations, II. Trans Moscow Math Soc, 1972, 26: 199–239
33 Cheng C, Sun Y. Existence of invariant tori in three-dimensional measure preserving mapping. Celestial Mech Dynam Astronom, 1990, 47: 275–292
34 Herman M. Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau. Astérisque, 1983, 103: 1–221
35 Herman M. Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau. Astérisque, 1986, 144: 1–243
36 Xia Z. Existence of invariant tori in volume-preserving diffeomorphisms. Ergodic Theory Dynam Systems, 1992, 12: 621–631
37 Cheng C, Sun Y. Existence of KAM tori in degenerate Hamiltonian systems. J Differential Equations, 1994, 114: 288–335
38 Xu J, You J, Qiu Q. Invariant tori for nearly integrable Hamiltonian systems with degeneracy. Math Z, 1997, 226: 375–387
39 徐君祥. KAM 定理中较弱的非退化条件. 中国科学 A 辑, 1995, 25: 1009–1018
40 Chow S, Li Y, Yi Y. Persistence of invariant tori on sub-manifolds in Hamiltonian systems. J Nonlinear Sci, 2002, 12: 585–617
41 Melnikov V K. On some cases of conservation of conditionally periodic motions under a small change of the Hamiltonian function. Soviet Math Dokl, 1965, 6: 1592–1596
42 Melnikov V K. A family of conditionally periodic solutions of a Hamiltonian system. Soviet Math Dokl, 1968, 9: 882–886
43 Eliasson L H. Perturbations of stable invariant tori for Hamiltonian systems. Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (5), 1988, 15: 115–147
44 Kuksin S B. Perturbation of conditionally periodic solutions of infinite-dimensional Hamiltonian systems (Russian). Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat, 1988, 52: 41–63; translation in Math USSR-Izv, 1989, 32: 39–62
45 Kuksin S B. Nearly Integrable Infinite Dimensional Hamiltonian Systems. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1556. Berlin: Springer, 1993
46 Wayne C E. Periodic and quasi-periodic solutions for nonlinear wave equations via KAM theory. Comm Math Phys, 1990, 127: 479–528
47 Bourgain J. On Melnikov's persistency problem. Math Res Lett, 1997, 4: 445–458
48 You J. Perturbations of lower dimensional tori for Hamiltonian systems. J Differential Equations, 1999, 152: 1–29
49 Xu J, You J. Persistence of lower-dimensional tori under the first Melnikov's non-resonance condition. J Math Pures Appl (9), 2001, 80: 1045–1067
50 Craig W, Wayne C E. Newton's method and periodic solutions of nonlinear wave equations. Comm Pure Appl Math, 1993, 46: 1409–1498
51 Gentile G, Gallavotti G. Degenerate elliptic tori. Comm Math Phys, 2005, 257: 319–362
52 Gentile G. Degenerate lower-dimensional tori under the Brjuno condition. Ergodic Theory Dynam Systems, 2007, 27: 427–457
53 Liu Z. Persistence of lower dimensional invariant tori on sub-manifolds in Hamiltonian systems. Nonlinear Anal, 2005, 61: 1319–1342
54 Sevryuk M B. Partial preservation of frequencies in KAM theory. Nonlinearity, 2006, 19: 1099–1140
55 Graff S M. On the continuation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems. J Differential Equations, 1974, 15: 1–69
56 Huang Q, Cong F, Li Y. Persistence of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems. J Differential Equations, 2000, 164: 355–379
57 Li Y, Yi Y. Persistence of hyperbolic tori in Hamiltonian systems. J Differential Equations, 2005, 208: 344–387
58 Eliasson L H. Biasymptotic solutions of perturbed integrable Hamiltonian systems. Bull Braz Math Soc (NS), 1994, 25: 57–76
59 Gallatti G, Gentile G. Hyperbolic low-dimensional invariant tori and summations of divergent series. Comm Math Phys, 2002, 227: 421–460
60 Han Y, Li Y, Yi Y. Degenerate lower dimensional tori in Hamiltonian systems. J Differential Equations, 2006, 227: 670–691
61 You J. A KAM theorem for hyperbolic-type degenerate lower dimensional tori in Hamiltonian systems. Comm Math Phys, 1998, 192: 145–168
62 Broer H, Hanßmann H, You J. On the destruction of resonant Lagrangean tori in Hamiltonian systems. In: Recent Trends in Dynamical Systems. Basel: Springer, 2013, 317–333
63 Cong F, Küpper T, Li Y, et al. KAM-type theorem on resonant surfaces for nearly integrable Hamiltonian systems.

J Nonlinear Sci, 2000, 10: 49–68
64 Treshchev D V. The mechanism of destruction resonance tori in Hamiltonian systems. Sb Math, 1991, 68: 181–203
65 Cheng C. Birkhoff-Kolmogorov-Arnold-Moser tori in convex Hamiltonian systems. Comm Math Phys, 1996, 177: 529–559
66 Cheng C. Lower dimensional invariant tori in the regions of instability of nearly integrable Hamiltonian systems. Comm Math Phys, 1999, 203: 385–419
67 Cheng C, Wang S. The surviving of lower dimensional tori from a resonant torus of Hamiltonian systems. J Differential Equations, 1999, 155: 311–326
68 Cheng C, Wang L. Destruction of Lagrangian torus for positive definite Hamiltonian systems. Geom Funct Anal, 2013, 23: 848–866
69 Han Y, Li Y, Yi Y. Invariant tori in Hamiltonian systems with high order proper degeneracy. Ann Henri Poincaré, 2010, 10: 1419–1436
70 Li Y, Yi Y. Persistence of lower dimensional tori of general types in Hamiltonian systems. Trans Amer Math Soc, 2004, 357: 1565–1600
71 Cheng C. A KAM theory for resonant tori and a generalization of Poincaré-Birkhoff fixed point theorem. In: First International Congress of Chinese Mathematicians. Providence: Amer Math Soc, 2001, 397–401
72 Cheng C. Hamiltonian systems: Stable or unstable? Milan J Math, 2006, 74: 295–312
73 Chierchia L, Gallavotti G. Drift and diffusion in phase space. Ann Inst H Poincaré Phys Théor, 1994, 69: 1–144
74 Li Y, Yi Y. A quasi-periodic Poincaré's theorem. Math Ann, 2003, 326: 649–690
75 Rudnev M, Wiggins S. KAM theory near multiplicity one resonant surfaces in perturbations of a-priori stable Hamiltonian systems. J Nonlinear Sci, 1997, 7: 177–209
76 Li Y, Yi Y. Persistence of invariant tori in generalized Hamiltonian systems. Ergodic Theory Dynam Systems, 2002, 22: 1233–1261
77 Li Y, Yi Y. Nekhoroshev and KAM stabilities in generalized Hamiltonian systems. J Dynam Differential Equations, 2006, 18: 577–614
78 Cong F, Li Y. Existence of higher dimensional invariant tori for Hamiltonian systems. J Math Anal Appl, 1998, 222: 255–267
79 Cong F, Li Y. Invariant hyperbolic tori for Hamiltonian systems with degeneracy. Discrete Contin Dyn Syst, 1997, 3: 371–382
80 Cong F, Hong J, Han Y. Near invariant tori on exponentially long time for Poisson systems. J Math Anal Appl, 2007, 334: 59–68
81 Huang Q, Cong F, Li Y. Persistence of elliptic invariant tori for Hamiltonian systems. Nonlinear Anal, 2001, 45: 241–260
82 Liu B, Zhu W, Han Y. Persistence of lower-dimensional hyperbolic tori in generalized Hamiltonian systems. J Math Anal Appl, 2006, 322: 251–275
83 Liu Z, Yihe D, Huang Q. Persistence of hyperbolic tori in generalized Hamiltonian systems. Northeast Math J, 2005, 21: 447–464
84 Cheng C. Non-existence of KAM torus. Acta Math Sin Engl Ser, 2011, 27: 397–404
85 Chierchia L, Qian D. Moser's theorem for lower dimensional tori. J Differential Equations, 2004, 206: 55–93
86 Maró S. A mechanical counterexample to KAM theory with low regularity. Phys D, 2014, 283: 10–14
87 Hanßmann H. Quasi-periodic bifurcations in reversible systems. Regul Chaotic Dyn, 2011, 16: 51–60
88 Liu B. On lower dimensional invariant tori in reversible systems. J Differential Equations, 2001, 176: 158–194
89 Sevryuk M B. The reversible context 2 in KAM theory: The first steps. Regul Chaotic Dyn, 2011, 16: 24–38
90 Dingaburg E, Sinai Y. The one-dimensional Schrödinger equation with a quasi-periodic potential. Funct Anal Appl, 1975, 9: 279–289
91 Eliasson L H. Almost reducibility of linear quasi-periodic systems. Proc Sympos Pure Math, 2001, 69: 679–705
92 Eliasson L H. On reducibility of Schrödinger equations with quasiperiodic in time potential. Comm Math Phys, 2009, 286: 125–135
93 Hou X, You J. Almost reducibility and non-perturbative reducibility of quasi-periodic linear systems. Invent Math, 2012, 190: 209–260
94 Jorba A, Simó C. On the reducibility of linear differential equations with quasiperiodic coefficients. J Differential Equations, 1992, 98: 111–124
95 Jorba A, Simó C. On quasi-periodic perturbations of elliptic equilibrium points. SIAM J Math Anal, 1996, 27: 1704–1737

96 Wang Y, You J. Examples of discontinuity of Lyapunov exponent in smooth quasiperiodic cocycles. Duke Math J, 2013, 162: 2363–2412
97 Wang Y, Zhang Z. Uniform positivity and continuity of Lyapunov exponents for a class of C^2 quasiperiodic Schrödinger cocycles. J Funct Anal, 2015, 268: 2525–2585
98 You J, Zhou Q. Simple counter-examples to Kotani-Last conjecture via reducibility. Int Math Res Not IMRN, 2015, 2015: 9450–9455
99 You J, Zhou Q. Phase transition and semi-global reducibility. Comm Math Phys, 2014, 152: 1095–1113
100 You J, Zhang S. Hölder continuity of the Lyapunov exponent for analytic quasiperiodic Schrödinger cocycle with weak Liouville frequency. Ergodic Theory Dynam Systems, 2014, 34: 1395–1408
101 Rabinowitz P H. Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations, Part I. Comm Pure Appl Math, 1967, 20: 145–205
102 Rabinowitz P H. Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations, Part II. Comm Pure Appl Math, 1969, 22: 15–39
103 Craig W, Wayne C E. Periodic solutions of nonlinear Schrödinger equations and the Nash-Moser method. In: Hamiltonian Mechanics. New York: Springer, 1994, 103–122
104 Bourgain J. Construction of quasi-periodic solutions for Hamiltonian perturbations of linear equations and applications to nonlinear PDE. Int Math Res Not IMRN, 1994, 1994: 475–497
105 Bourgain J. Construction of periodic solutions of nonlinear wave equations in higher dimension. Geom Funct Anal, 1995, 5: 629–639
106 Bourgain J. Quasiperiodic solutions of Hamiltonian perturbations of 2D linear Schrödinger equations. Ann of Math (2), 1998, 148: 363–439
107 Bourgain J. Green's function estimates for lattice Schrödinger operators and applications. SIAM Rev, 2005, 47: 600–602
108 Wang W M. Supercritical nonlinear Schrödinger equations, I: Quasi-periodic solutions. Duke Math J, 2016, 165: 1129–1192
109 Berti M, Bolle P. Quasi-periodic solutions with Sobolev regularity of NLS on T^d with a multiplicative potential. J Eur Math Soc (JEMS), 2013, 15: 229–286
110 Berti M, Bolle P. Sobolev quasi-periodic solutions of multidimensional wave equations with a multiplicative potential. Nonlinearity, 2012, 25: 2579–2613
111 Berti M, Corsi L, Procesi M. An abstract Nash-Moser theorem and quasi-periodic solutions for NLW and NLS on compact Lie groups and homogeneous manifolds. Comm Math Phys, 2015, 334: 1413–1454
112 Chierchia L, You J. KAM tori for 1D nonlinear wave equations with periodic boundary conditions. Comm Math Phys, 2000, 211: 498–525
113 Geng J, You J. A KAM theorem for one dimensional Schrödinger equation with periodic boundary conditions. J Differential Equations, 2005, 209: 1–56
114 Pöschel J. Quasi-periodic solutions for a nonlinear wave equation. Comment Math Helv, 1996, 71: 269–296
115 Yuan X. Quasi-periodic solutions of completely resonant nonlinear wave equations. J Differential Equations, 2006, 230: 213–274
116 Bambusi D. On long time stability in Hamiltonian perturbations of non-resonant linear PDEs. Nonlinearity, 1999, 12: 823–850
117 Liang Z, You J. Quasi-periodic solutions for 1D Schrödinger equations with higher order nonlinearity. SIAM J Math Anal, 2005, 36: 1965–1990
118 Geng J, Yi Y. Quasi-periodic solutions in a nonlinear Schrödinger equation. J Differential Equations, 2007, 233: 512–542
119 Kuksin S B. A KAM-theorem for equations of the Korteweg-de Vries type. Rev Math Phys, 1998, 10: 1–64
120 Kappler T, Pöschel J. Kdv & KAM ergebnisse der mathematik und ihrer grenzgebiete 3. Math Intelligencer, 2004, 26: 76–77
121 Bambusi D, Graffi S. Time quasi-periodic unbounded perturbations of Schrödinger operators and KAM methods. Comm Math Phys, 2001, 219: 465–480
122 Liu J, Yuan X. Spectrum for quantum Duffing oscillator and small-divisor equation with large variable coefficient. Comm Pure Appl Math, 2010, 63: 1145–1172
123 Liu J, Yuan X. A KAM theorem for Hamiltonian partial differential equations with unbounded perturbations. Comm Math Phys, 2011, 307: 629–673
124 Baldi P, Berti M, Montalto R. KAM for quasi-linear and fully nonlinear forced perturbations of Airy equation. Math

Ann, 2014, 359: 471–536
125 Baldi P. Periodic solutions of fully nonlinear autonomous equations of Benjamin-Ono type. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2013, 30: 33–77
126 Iooss G, Plotnikov P, Toland J. Standing waves on an infinitely deep perfect fluid under gravity. Arch Ration Mech Anal, 2005, 177: 363–478
127 Geng J, You J. A KAM theorem for Hamiltonian partial differential equations in higher dimensional spaces. Comm Math Phys, 2006, 262: 343–372
128 Geng J, You J. KAM tori for higher dimensional beam equations with constant potentials. Nonlinearity, 2006, 19: 2405–2423
129 Eliasson L H, Grebert B, Kuksin S B. KAM for the nonlinear beam equation. ArXiv:1412.2803, 2015
130 Grebert B. KAM for KG on S^2 and for the quantum harmonic oscillator on $\mathbb{R}^2$. ArXiv:1410.8084, 2014
131 Grebert B, Paturel E. KAM for the Klein-Gordon equation on S^d. ArXiv:1601.00610, 2016
132 Eliasson L H, Kuksin S B. KAM for the nonlinear Schrödinger equation. Ann of Math (2), 2010, 172: 371–435
133 Geng J, You J. A KAM theorem for higher dimensional nonlinear Schrödinger equations. J Dynam Differential Equations, 2013, 25: 451–476
134 Bourgain J. Nonlinear Schrödinger equations. In: Hyperbolic Equations and Frequency Interactions. IAS/Park City Mathematics Series, vol. 5. Providence: Amer Math Soc, 1999, 3–157
135 Geng J, Xu X, You J. An infinite dimensional KAM theorem and its application to the two dimensional cubic Schrödinger equation. Adv Math, 2011, 226: 5361–5402
136 Procesi C, Procesi M. A KAM algorithm for the resonant nonlinear Schrödinger equation. Adv Math, 2015, 272: 399–470
137 Trombettoni A, Smerzi A. Discrete solitons and breathers with dilute Bose-Einstein condensates. Phys Rev Lett, 2001, 86: 2353–2356
138 Fröhlich J, Spencer T, Wayne C E. Localization in disordered, nonlinear dynamical systems. J Stat Phys, 1986, 42: 247–274
139 Pöschel J. Small divisors with spatial structrue in infinite dimensional Hamiltonian systems. Comm Math Phys, 1990, 127: 351–393
140 Yuan X. Construction of quasi-periodic breathers via KAM technique. Comm Math Phys, 2002, 226: 61–100
141 Geng J, Viveros J, Yi Y. Quasi-periodic breathers in Hamiltonian networks of long-range coupling. Phys D, 2008, 237: 2866–2892
142 Bourgain J, Wang W M. Quasi-periodic solutions of nonlinear random Schrödinger equations. J Eur Math Soc (JEMS), 2008, 10: 1–45
143 Bourgain J, Wang W M. Diffusion bound for a nonlinear Schrödinger equation. In: Mathematical Aspect of Nonlinear Dispersive Equations. Princeton: Princeton University Press, 2007, 21–42
144 Wang W M, Zhang Z. Long time Anderson localization for the nonlinear random Schrödinger equation. J Stat Phys, 2009, 134: 953–968
145 Geng J, Zhao Z. Quasi-periodic solutions for one-dimensional discrete nonlinear Schrödinger equations with tangent potential. SIAM J Math Anal, 2013, 45: 3651–3689
146 Bellissard J, Lima R, Scoppola E. Localization in ν-dimensional incommensurate structures. Comm Math Phys, 1983, 88: 465–477
147 Geng J, You J, Zhao Z. Localization in one-dimensional quasi-periodic nonlinear systems. Geom Funct Anal, 2014, 24: 116–158
148 Eliasson L H. Discrete one-dimensional quasi-periodic Schrödinger operators with pure point spectrum. Acta Math, 1997, 179: 153–196

KAM theory in finite and infinite dimensional spaces

YOU JianGong, GENG JianSheng & XU JunXiang

Abstract Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) theory is one of the greatest mathematical achievements of the last century with great impact in science. In recent years, various problems with KAM arise in many branches of mathematics and physics, such as celestial mechanics, condensed matter physics, dynamical systems, Hamiltonian

PDEs, mathematical and physical equations, and operator spectral theory. These problems cannot be solved easily by the classical KAM theory, and then motivated the further development of KAM theory. In this paper, we give a brief (not complete) survey on the recent development of both finite dimensional and infinite dimensional KAM theory, including the non-degeneracy condition, KAM for lower dimensional tori, and KAM for PDEs.

Keywords **KAM theory, Hamiltonian systems, invariant tori, small divisors, non-degeneracy conditions, Hamiltonian PDEs**

MSC(2010) **37K55, 35B10**

doi: 10.1360/N012016-00154