中 国 科 学

1984 年 9 月 A 辑 第 9 期

标准与非标准矢量波函数之间的转换关系式及其应用

周 学 松

(华东师范大学微波研究室,上海)

摘 要

本文提出标准与非标准矢量波函数的概念,导出圆柱坐标系统、圆球坐标系统中标准与非标准矢量波函数之间的转换关系式,推广了戴振铎(C. T. Tai)教授的结果,为某些需要同时使用不同坐标系统描写边界条件的边值问题提供了一种求解方法. 作为应用实例,研究了平面分层媒质中埋入体的电磁辐射和散射问题,对梅冠香(K. K. Mei)教授提出的广义 Sommerfeld 积分和多极子展开式给出了更简便而合理的证明.

一、引 言

电磁理论中求解齐次 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{F} = 0 \tag{1}$$

时, Hansen[1] 首先引进一组矢量波函数 $\bar{L}$, $\bar{M}$ 和 $\bar{N}$[1]. 这种直接求解矢量方程的方法得到了 Stratton[2], Morse 和 Feshbach[3] 的承认; 1971 年,戴振铎教授[4]更加详细地阐述了各种矢量波函数的表示和性质,并以它为基础求出不同问题的并矢 Green 函数. 但是,他们的工作只是限于一些简单而规则的情况,即可以单用一种坐标系统描写边界条件的边值问题. 而有些实际问题比较复杂,需要同时使用不同坐标系统来描写边界条件. 例如,平面分层媒质中埋入体的辐射和散射问题,需要同时使用圆球坐标和直角坐标(三维埋入体)或者圆柱坐标和直角坐标(两维埋入体)来描写边界条件. 这样,单用标准矢量波函数就很难求解. 为此,我们根据具体求解边值问题的需要,选取不同的领示矢量和生成函数集构造出某些非标准矢量波函数. 在圆柱坐标和圆球坐标系统中,严格导出标准与非标准矢量波函数之间的显式转换关系,并用它求解了某些需要用混合坐标系统描写边界条件的边值问题,得到较为满意的结果.

二、标准和非标准矢量波函数

用矢量波函数求解方程 (1) 时,必须注意选取和构造适当的矢量波函数. 不同坐标系统中,领示矢量和生成函数集要遵从一定的判据[3], 否则, 构造的矢量波函数将是不完备的. 我们定义凡遵从判据构造的是标准矢量波函数;反之,即为非标准矢量波函数. 常用的十一个可

本文 1983 年 5 月 14 日收到.

1) 文中使用符号 $(\bar{M}, \bar{N})$ 等,实际上应该是列阵形式,上下标中的 (x, y, z) 和 (λ, μ) 表示每次只相应取一个值.

分离变量的坐标系统中，仅有六个坐标系统可以构造出标准矢量波函数[5]．除较简单的直角坐标系统外，本文将详细研究圆柱和圆球坐标系统中的标准和非标准矢量波函数及其相互转换关系式．如有需要，可以类似地得到椭圆柱，抛物柱和圆锥坐标系统中相应的结果．

圆柱坐标系统中，构造矢量波函数的生成函数集是标量 Helmholtz 方程

$$\{\nabla^2 + [(\lambda^2,\ \mu^2) + h^2]\}\psi_{{}^{e}_{0}n(\lambda,\mu)}(h) = 0 \tag{2}$$

的解，即

$$\psi_{{}^{e}_{0}n(\lambda,\mu)}(h) = J_n[(\lambda,\ \mu)r]{}^{\cos}_{\sin}\, n\varphi e^{ihz}. \tag{3}$$

按照判据，只有选择领示矢量 $\hat{z}$ 时，构造的一组矢量波函数

$$\bar{L}_{{}^{e}_{0}n(\lambda,\mu)}(h) = \nabla\psi_{{}^{e}_{0}n(\lambda,\mu)}(h), \tag{4a}$$

$$\bar{M}_{{}^{e}_{0}n(\lambda,\mu)}(h) = \nabla \times [\hat{z}\psi_{{}^{e}_{0}n(\lambda,\mu)}(h)], \tag{4b}$$

$$\bar{N}_{{}^{e}_{0}n(\lambda,\mu)}(h) = \frac{1}{k_{(\lambda,\mu)}}\nabla \times \nabla \times [\hat{z}\psi_{{}^{e}_{0}n(\lambda,\mu)}(h)] \tag{4c}$$

才是正交、归一完备系、称之为标准圆柱矢量波函数．其中有关系式

$$k_{(\lambda,\mu)}^2 = (\lambda^2,\ \mu^2) + h^2. \tag{5}$$

在研究圆柱波导中电磁波传输，导体或介质圆柱在自由空间中的电磁散射以及平直地面等边值问题时，可以很方便地使用标准圆柱矢量波函数求得正确解答．但是，如果边值问题中既包括有圆柱面，又有平面界面，需要同时使用圆柱坐标和直角坐标系统来描写边界条件，单用标准圆柱矢量波函数就会遇到困难．为此，我们定义另外两组矢量波函数，即生成函数仍用(3)式，而领示矢量选取易于适应平面界面的直角坐标单位矢量 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$，由此得到

$$\bar{L}^{(x,y)}_{{}^{e}_{0}n(\lambda,\mu)}(h) = \nabla\psi_{{}^{e}_{0}n(\lambda,\mu)}(h), \tag{6a}$$

$$\bar{M}^{(x,y)}_{{}^{e}_{0}n(\lambda,\mu)}(h) = \nabla \times [(\hat{x},\ \hat{y})\psi_{{}^{e}_{0}n(\lambda,\mu)}(h)], \tag{6b}$$

$$\bar{N}^{(x,y)}_{{}^{e}_{0}n(\lambda,\mu)}(h) = \frac{1}{k_{(\lambda,\mu)}}\nabla \times \nabla \times [(\hat{x},\ \hat{y})\psi_{{}^{e}_{0}n(\lambda,\mu)}(h)]. \tag{6c}$$

显然，(6)式定义的两组矢量波函数的构造中，领示矢量的选取违反了标准判据，我们称它们为非标准圆柱矢量波函数．

圆球坐标系统中，构造矢量波函数的生成函数集是标量 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_{{}^{e}_{0}mn}(k) = 0 \tag{7}$$

的解，即

$$\psi_{{}^{e}_{0}mn}(k) = j_n(kR)P_n^m(\cos\theta){}^{\cos}_{\sin}\, m\varphi. \tag{8}$$

按照判据，只有选择领示矢量为 $\bar{R}$ 时，构造的一组矢量波函数

$$\bar{L}_{{}^{e}_{0}mn}(k) = \nabla\psi_{{}^{e}_{0}mn}(k), \tag{9a}$$

$$\bar{M}_{{}^{e}_{0}mn}(k) = \nabla \times [\bar{R}\,\psi_{{}^{e}_{0}mn}(k)], \tag{9b}$$

$$\bar{N}_{{}^{e}_{0}mn}(k) = \frac{1}{k}\nabla \times \nabla \times [\bar{R}\psi_{{}^{e}_{0}mn}(k)] \tag{9c}$$

才是正交归一完备系，称之为标准圆球矢量波函数．在研究电、磁偶极子或多极子辐射，导体或介质球在自由空间中的电磁散射等边值问题时，可以很方便地使用标准圆球矢量波函数求

得正确解答．但是，如果边值问题中既包括有圆球面，又有平面界面，需要同时使用圆球坐标和直角坐标系统来描写边界条件，单用标准圆球矢量波函数就会遇到困难．为此，我们定义另外三组矢量波函数，即生成函数仍用（8）式，而领示矢量选取易于适应平面界面的直角坐标单位矢量 $\hat{x}$，$\hat{y}$ 和 $\hat{z}$，由此得到

$$\bar{L}^{(x,y,z)}_{\substack{e\\0}mn}(k)=\nabla\psi_{\substack{e\\0}mn}(k),\tag{10a}$$

$$\bar{M}^{(x,y,z)}_{\substack{e\\0}mn}(k)=\frac{1}{k}\nabla\times[(\hat{x},\hat{y},\hat{z})\psi_{\substack{e\\0}mn}(k)],\tag{10b}$$

$$\bar{N}^{(x,y,z)}_{\substack{e\\0}mn}(k)=\frac{1}{k^2}\nabla\times\nabla\times[(\hat{x},\hat{y},\hat{z})\psi_{\substack{e\\0}mn}(k)].\tag{10c}$$

显然，(10)式定义的三组矢量波函数的构造中，领示矢量的选取违反了标准判据，我们称它们为非标准圆球矢量波函数．

根据具体边值问题描写边界条件方便的需要，可以构造出各种非标准矢量波函数．单独一组非标准矢量波函数并非正交归一完备系，任意矢量场不能按它展开．如果能找到标准与非标准矢量波函数之间转换关系，因为标准矢量波函数是完备系，再从转换关系即可得到某些非标准矢量波函数的适当组合也可构造一组完备系．这样，我们即可将任意矢量场按方便计算的要求，以标准或非标准矢量波函数展开，最后得到正确解答．

三、标准与非标准圆柱矢量波函数的转换关系

从(4)和(6)式可见，标准和非标准圆柱矢量波函数的生成函数集相同．而表示纵向部份的 $\bar{L}$ 和 $\bar{L}^{(x,y)}$ 的构造中，并未涉及领示矢量，所以标准和非标准圆柱矢量波函数的纵向部份相同，即

$$\bar{L}_{\substack{e\\0}n(\lambda,\mu)}(h)=\bar{L}^{(x,y)}_{\substack{e\\0}n(\lambda,\mu)}(h).\tag{11}$$

但是，表示横向部份的矢量波函数的构造中与领示矢量的选取密切相关．所以 $\bar{M}$，$\bar{N}$ 与 $\bar{M}^{(x,y)}$ 和 $\bar{N}^{(x,y)}$ 的表示大不相同．戴振铎教授[4]曾导出一组关系式是

$$(\bar{M},\bar{N})^{(x)}_{\substack{e\\0}n(\lambda,\mu)}(h)=\frac{1}{2}\left\{\frac{-ih}{(\lambda,\mu)}[(\bar{M},\bar{N})_{\substack{e\\0}(n+1)(\lambda,\mu)}(h)-(\bar{M},\bar{N})_{\substack{e\\0}(n-1)(\lambda,\mu)}(h)]\right.$$
$$\left.\pm\frac{h_{(\lambda,\mu)}}{(\lambda,\mu)}[(\bar{N},\bar{M})_{\substack{0\\e}(n+1)(\lambda,\mu)}(h)+(\bar{N},\bar{M})_{\substack{0\\e}(n-1)(\lambda,\mu)}(h)]\right\}.\tag{12}$$

(12) 式给出了非标准圆柱矢量波函数 $\bar{M}^{(x)}$，$\bar{N}^{(x)}$ 以标准圆柱矢量波函数 $\bar{M}$，$\bar{N}$ 的线性组合表示式．我们能否反过来用 $\bar{M}^{(x)}$，$\bar{N}^{(x)}$ 来表示 $\bar{M}$ 和 $\bar{N}$ 呢？很遗憾，答案是否定的．首先，标准圆柱矢量波函数是完备系，任意矢量函数(如 $\bar{M}^{(x)}$ 或 $\bar{N}^{(x)}$) 可以用 $\bar{L}$，$\bar{M}$ 和 $\bar{N}$ 显式表示．而非标准圆柱矢量波函数并非完备系，所以希望单用 $\bar{M}^{(x)}$ 和 $\bar{N}^{(x)}$ 完整地表示 $\bar{M}$ 和 $\bar{N}$ 可能性不大．其次，(12)式 λ（或 μ）相应的方程只有四个，而需要表示的未知函数却有八个，即 $\bar{M}_{\substack{e\\0}(n+1)\lambda}(h)$，$\bar{M}_{\substack{e\\0}(n-1)\lambda}(h)$，$\bar{N}_{\substack{e\\0}(n+1)\lambda}(h)$ 和 $\bar{N}_{\substack{e\\0}(n-1)\lambda}(h)$．如果希望用代数方法找到 $\bar{M}$ 和 $\bar{N}$ 的展开式，就应该再设法增加四个方程．最后，(12) 式中 $\bar{L}$ 和 $\bar{L}^{(x)}$ 并没有出现，要表示横向部份 $\bar{M}$，$\bar{N}$ 只需要非标准圆柱矢量波函数的横向部份就够了．为此，我们再定义一组非标准圆柱矢量波函数 $\bar{L}^{(y)}$，$\bar{M}^{(y)}$ 和 $\bar{N}^{(y)}$．可以导出(见附录)，$\bar{M}^{(y)}$ 和 $\bar{N}^{(y)}$ 用 $\bar{M}$ 和 $\bar{N}$ 显示表示式为：

$$(\bar{M}, \bar{N})^{(y)}_{\substack{e\\o}n(\lambda,\mu)}(h) = \frac{1}{2}\left\{\mp \frac{ih}{(\lambda, \mu)}[(\bar{M}, \bar{N})_{\substack{o\\e}(n+1)(\lambda,\mu)}(h) + (\bar{M}, \bar{N})_{\substack{o\\e}(n-1)(\lambda,\mu)}(h)]\right.$$

$$\left. - \frac{k_{(\lambda,\mu)}}{(\lambda, \mu)}[(\bar{N}, \bar{M})_{\substack{e\\o}(n+1)(\lambda,\mu)}(h) - (\bar{N}, \bar{M})_{\substack{e\\o}(n-1)(\lambda,\mu)}(h)]\right\}. \tag{13}$$

取本征值为 λ (或 μ),联立(12)和(13)式中的八个方程,即可解出以 $\bar{M}^{(x)}$, $\bar{N}^{(x)}$ 和 $\bar{M}^{(y)}$, $\bar{N}^{(y)}$ 线性组合表示 $\bar{M}$ 和 $\bar{N}$ 的表达式是

$$(\bar{M}, \bar{N})_{\substack{e\\o}n(\lambda,\mu)}(h) = \frac{i(\lambda, \mu)}{2h}\{[(\bar{M}, \bar{N})^{(x)}_{\substack{e\\o}(n-1)(\lambda,\mu)}(h) - (\bar{M}, \bar{N})^{(x)}_{\substack{e\\o}(n+1)(\lambda,\mu)}(h)]$$

$$\mp[(\bar{M}, \bar{N})^{(y)}_{\substack{o\\e}(n-1)(\lambda,\mu)}(h) + (\bar{M}, \bar{N})^{(y)}_{\substack{o\\e}(n+1)(\lambda,\mu)}(h)]\} \tag{14a}$$

或

$$(\bar{M}, \bar{N})_{\substack{e\\o}n(\lambda,\mu)}(h) = \frac{(\lambda, \mu)}{2k_{(\lambda,\mu)}}\{[(\bar{N}, \bar{M})^{(y)}_{\substack{e\\o}(n+1)(\lambda,\mu)}(h) - (\bar{N}, \bar{M})^{(y)}_{\substack{e\\o}(n+1)(\lambda,\mu)}(h)]$$

$$\mp[(\bar{N}, \bar{M})^{(x)}_{\substack{o\\e}(n+1)(\lambda,\mu)}(h) + (\bar{N}, \bar{M})^{(x)}_{\substack{o\\e}(n-1)(\lambda,\mu)}(h)]\}. \tag{14b}$$

把戴振铎教授给出的(12)式和本文导出的(13)和(14)式合在一起,即完整地给出了以 λ (或 μ) 作为本征值的标准与非标准圆柱矢量波函数之间的转换关系式. 有了这些关系,我们便可能求解一般需要同时使用圆柱和直角坐标系统描写边界条件的边值问题. 例如,平面分层媒质中两维埋入体的电磁辐射和散射场求解.

如果把(14)式改写成

$$(\bar{M}, \bar{N})_{\substack{e\\o}n(\lambda,\mu)}(h) = \frac{i(\lambda, \mu)}{2h}\{[(\bar{M}, \bar{N})^{(x)}_{\substack{e\\o}(n-1)(\lambda,\mu)}(h) \pm (\bar{M}, \bar{N})^{(y)}_{\substack{o\\e}(n-1)(\lambda,\mu)}(h)]$$

$$- [(\bar{M}, \bar{N})^{(x)}_{\substack{e\\o}(n+1)(\lambda,\mu)}(h) \pm (\bar{M}, \bar{N})^{(y)}_{\substack{o\\e}(n+1)(\lambda,\mu)}(h)]\} \tag{15a}$$

或

$$(\bar{M}, \bar{N})_{\substack{e\\o}n(\lambda,\mu)}(h) = \frac{(\lambda, \mu)}{2k_{(\lambda,\mu)}}\{-[(\bar{N}, \bar{M})^{(y)}_{\substack{e\\o}(n-1)(\lambda,\mu)}(h) \pm (\bar{N}, \bar{M})^{(x)}_{\substack{o\\e}(n-1)(\lambda,\mu)}(h)]$$

$$+ [(\bar{N}, \bar{M})^{(y)}_{\substack{e\\o}(n+1)(\lambda,\mu)}(h) \mp (\bar{N}, \bar{M})^{(x)}_{\substack{o\\e}(n+1)(\lambda,\mu)}(h)]\}, \tag{15b}$$

非标准圆柱矢量波函数 $(\bar{M}, \bar{N})^{(x)}_{\substack{e\\o}n(\lambda,\mu)}(h) \pm (\bar{M}, \bar{N})^{(y)}_{\substack{o\\e}n(\lambda,\mu)}(h)$ 是领示矢量取为 $\hat{x} \pm i\hat{y}$ 构造的旋转多极子场. 可以认为在平均收敛的意义上说,任意矢量场既可以用标准圆柱矢量波函数展开,又可以用旋转多极子场展开,要根据具体边值问题的不同需要来决定.

四、标准与非标准圆球矢量波函数的转换关系

从(9)和(10)式可见,标准和非标准圆球矢量波函数的生成函数集相同,所以它们的纵向部份不变,即

$$\bar{L}_{\substack{e\\o}mn}(k) = \bar{L}^{(x,y,z)}_{\substack{e\\o}mn}(k). \tag{16}$$

表示横向部份的矢量波函数有关系式[4]

$$(\bar{M}, \bar{N})^{(x)}_{\substack{e\\o}mn}(k) = \pm\frac{1}{2n(n+1)}[(\bar{N}, \bar{M})_{\substack{o\\e}(m+1)n}(k) + (n+m)(n-m+1)$$

$$\cdot(\bar{N}, \bar{M})_{\substack{o\\e}(m-1)n}(k)] + \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}[(\bar{M}, \bar{N})_{\substack{e\\o}(m+1)(n+1)}(k)$$

$$
\begin{aligned}
&-(n-m+1)(n-m+2)(\bar{M},\bar{N})_{\substack{e\\o}(m-1)(n+1)}(k)]\\
&-\frac{1}{2n(2n+1)}[(\bar{M},\bar{N})_{\substack{e\\o}(m+1)(n-1)}(k)-(n+m-1)(n+m)\\
&\quad\cdot(\bar{M},\bar{N})_{\substack{e\\o}(m-1)(n-1)}(k)],
\end{aligned}
\tag{17a}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{M},\bar{N})^{(y)}_{\substack{e\\o}mn}(k)={}&-\frac{1}{2n(n+1)}[(\bar{N},\bar{M})_{\substack{e\\o}(m+1)n}(k)-(n+m)(n-m+1)\\
&\cdot(\bar{N},\bar{M})_{\substack{e\\o}(m-1)n}(k)]\pm\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}[(\bar{M},\bar{N})_{\substack{o\\e}(m+1)(n+1)}(k)+(n-m+1)\\
&\cdot(n-m+2)(\bar{M},\bar{N})_{\substack{o\\e}(m-1)(n+1)}(k)]\mp\frac{1}{2n(2n+1)}[(\bar{M},\bar{N})_{\substack{o\\e}(m+1)(n-1)}(k)\\
&+(n+m-1)(n+m)(\bar{M},\bar{N})_{\substack{o\\e}(m-1)(n-1)}(k)],
\end{aligned}
\tag{17b}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{M},\bar{N})^{(z)}_{\substack{e\\o}mn}(k)={}&\mp\frac{m}{n(n+1)}(\bar{N},\bar{M})_{\substack{o\\e}mn}(k)\\
&+\frac{1}{2n+1}\left[\frac{n-m+1}{n+1}(\bar{M},\bar{N})_{\substack{e\\o}m(n+1)}(k)+\frac{n+m}{n}(\bar{M},\bar{N})_{\substack{e\\o}m(n-1)}(k)\right].
\end{aligned}
\tag{17c}
$$

(17)式给出了非标准圆球矢量波函数以标准圆球矢量波函数线性组合的表示式．我们希望能找到标准圆球矢量波函数以非标准圆球矢量波函数的某些线性组合来表示．一般地说，这种表示并不一定能够写得出来．

分析(17)式可见未知函数多于方程个数,只有设法消去某些未知量才有可能求解．另外,从上节中已知在 x-y 平面上取 $\hat{x}\pm i\hat{y}$ 作领示矢量构造的旋转多极子场是很有用处的量．为此,我们先构造旋转多极子场,即

$$
\begin{aligned}
&(\bar{M},\bar{N})^{(x)}_{\substack{e\\o}mn}(k)\pm(\bar{M},\bar{N})^{(y)}_{\substack{o\\e}mn}(k)\\
&=\pm\frac{(m+n)(n-m+1)}{n(n+1)}(\bar{N},\bar{M})_{\substack{o\\e}(m-1)n}(k)\\
&\quad-\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(n+1)(2n+1)}(\bar{M},\bar{N})_{\substack{e\\o}(m-1)(n+1)}(k)\\
&\quad+\frac{(n+m-1)(n+m)}{n(2n+1)}(\bar{M},\bar{N})_{\substack{e\\o}(m-1)(n-1)}(k),
\end{aligned}
\tag{18a}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\bar{M},\bar{N})^{(x)}_{\substack{e\\o}mn}(k)\mp(\bar{M},\bar{N})^{(y)}_{\substack{o\\e}mn}(k)\\
&=\pm\frac{1}{n(n+1)}(\bar{N},\bar{M})_{\substack{o\\e}(m+1)n}(k)+\frac{1}{(n+1)(2n+1)}(\bar{M},\bar{N})_{\substack{e\\o}(m+1)(n+1)}(k)\\
&\quad-\frac{1}{n(2n+1)}(\bar{M},\bar{N})_{\substack{e\\o}(m+1)(n-1)}(k).
\end{aligned}
\tag{18b}
$$

经过必要的变换和一些代数运算可得

$$
\begin{aligned}
(\bar{M},\bar{N})_{\substack{e\\o}mn}(k)={}&\frac{1}{2}\{2(n-m+1)(\bar{M},\bar{N})^{(z)}_{\substack{e\\o}m(n+1)}(k)\\
&+(n-m+1)(m-n+2)[(\bar{M},\bar{N})^{(x)}_{\substack{e\\o}(m-1)(n+1)}(k)\mp(\bar{M},\bar{N})^{(y)}_{\substack{o\\e}(m-1)(n+1)}(k)]\\
&+[(\bar{M},\bar{N})^{(x)}_{\substack{e\\o}(m+1)(n+1)}(k)\pm(\bar{M},\bar{N})^{(y)}_{\substack{o\\e}(m+1)(n+1)}(k)]
\end{aligned}
\tag{19a}
$$

或

$$
\begin{aligned}
(\bar{M},\ \bar{N})_{\substack{e\\o}mn}(k) = \frac{1}{2}\{&2(n+m)(\bar{M},\ \bar{N})^{(z)}_{\substack{e\\o}m(n-1)}(k) \\
&+(n+m-1)(n+m)[(\bar{M},\ \bar{N})^{(x)}_{\substack{e\\o}(m-1)(n-1)}(k) \mp (\bar{M},\ \bar{N})^{(y)}_{\substack{o\\e}(m-1)(n-1)}(k)] \\
&-[(\bar{M},\ \bar{N})^{(x)}_{\substack{e\\o}(m+1)(n-1)}(k) \pm (\bar{M},\ \bar{N})^{(y)}_{\substack{o\\e}(m+1)(n-1)}(k)]
\end{aligned}
\tag{19b}
$$

或

$$
\begin{aligned}
(\bar{M},\ \bar{N})_{\substack{e\\o}mn}(k) = \pm\frac{1}{2}\{&2m(\bar{N},\ \bar{M})^{(z)}_{\substack{o\\e}mn}(k) \\
&+(n+m)(n-m+1)[(\bar{N},\ \bar{M})^{(x)}_{\substack{o\\e}(m-1)n}(k) \pm (\bar{N},\ \bar{M})^{(y)}_{\substack{e\\o}(m-1)n}(k)] \\
&+[(\bar{N},\ \bar{M})^{(x)}_{\substack{o\\e}(m+1)n}(k) \mp (\bar{N},\ \bar{M})^{(y)}_{\substack{e\\o}(m+1)n}(k)].
\end{aligned}
\tag{19c}
$$

把戴振铎教授给出的(17)式和本文导出的 (19) 式合在一起,即完整地给出了标准与非标准圆球矢量波函数之间的转换关系式. 有了这些关系，我们便可能求解一般需要同时使用圆球和直角坐标系统描写边界条件的边值问题. 例如，平面分层媒质中三维埋入体的电磁辐射和散射场求解.

从 (19) 式可以看到，$\bar{M}$ 既可以按 $\bar{M}^{(x,y,z)}$ 展开，又可以按 $\bar{N}^{(x,y,z)}$ 展开；$\bar{N}$ 既可以按 $\bar{N}^{(x,y,z)}$ 展开,又可以按 $\bar{M}^{(x,y,z)}$ 展开. 另外,三种表示法的不同在于下标的选取方式. (19b) 式是固定下标 $(n-1)$，m 值从 $(m-1)$ 变到 $(m+1)$；(19c) 式是固定下标 n，m 值从 $(m-1)$ 变到 $(m+1)$；(19a) 式是固定下标 $(n+1)$，m 值从 $(m-1)$ 变到 $(m+1)$. 因为生成函数中有缔合 Legendre 函数,要求下标满足条件 $|m| \leqslant n$. 在这一前提下,可根据具体边值问题求解方便的需要任意选取一种表示.

五、在某些边值问题中的应用

用矢量波函数研究电磁场边值问题是一种很直接而有效的方法. 均匀各向同性媒质中，可以用矢位把电、磁场表示为:

$$
\bar{E} = -\frac{1}{\epsilon}\nabla\times\bar{A}_e + \frac{1}{i\omega\mu\epsilon}\nabla\times\nabla\times\bar{A}_m,
\tag{20a}
$$

$$
\bar{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\bar{A}_m + \frac{1}{i\omega\mu\epsilon}\nabla\times\nabla\times\bar{A}_e,
\tag{20b}
$$

式中 $\bar{A}_e$ 为矢量电位，$\bar{A}_m$ 为矢量磁位. 如果把生成函数和领示矢量的乘积就定义为电、磁矢位,可以很方便地把矢量波函数与电、磁场型联系起来,如表 1 所示.

表 1

模 式	矢 位	模 式 场 型
$TE(a)$	$\bar{A}_e = \bar{a}\psi$	$\bar{e}^{TE(a)} = -\frac{1}{\epsilon}\bar{M}(a)$ $\bar{h}^{TE(a)} = -\frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}}\bar{N}^{(a)}$
$TM(a)$	$\bar{A}_m = \bar{a}\psi$	$\bar{e}^{TM(a)} = -\frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}}\bar{N}^{(a)}$ $\bar{h}^{TM(a)} = \frac{1}{\mu}\bar{M}^{(a)}$

表中的模式是相对于矢位方向(即 $\hat{a}$) 定义的. 例如，$TE(a)$ 模是指在矢位方向上无电场分量；$TM(a)$ 模是指在矢位方向上无磁场分量. 矢量波函数 $\bar{M}^{(a)}$ 既可以表示 $TE(a)$ 模的电场,又可以表示 $TM(a)$ 模的磁场；$\bar{N}^{(a)}$ 既可以表示 $TE(a)$ 模的磁场,又可以表示 $TM(a)$ 模的电场. 主要取决于电、磁矢位的选取不同而定. 以圆柱波导为例，若取领示矢量为 $\hat{z}$，生成函数采用 $\psi_{\substack{e\\o}n\lambda}(h)$，则矢量磁位是 $\bar{A}_m = \hat{z}\psi_{\substack{e\\o}n\lambda}(h)$. 所以,标准圆柱矢量波函数 $\bar{M}_{\substack{e\\o}n\lambda}(h)$ 相应于圆柱波导中 TM 模的磁场；$\bar{N}_{\substack{e\\o}n\lambda}(h)$ 相应于 TM 模的电场. 如果仍取领示矢量为 $\hat{z}$，而生成函数用 $\psi_{\substack{e\\o}n\mu}(h)$，则矢量电位是 $\bar{A}_e = \hat{z}\psi_{\substack{e\\o}n\mu}(h)$，则 $\bar{M}_{\substack{e\\o}n\mu}(h)$ 相应于圆柱波导中的 TE 模电场；$\bar{N}_{\substack{e\\o}n\mu}(h)$ 相应于 TE 模磁场. 林为干教授[6]的著作中,介绍了标准圆球矢量波函数，标准圆柱矢量波函数在均匀环电流辐射、导电球及圆柱导体散射等问题中的应用.

非标准圆球和圆柱矢量波函数,可以很方便地应用于同时需要使用圆球和直角坐标系统，或者圆柱和直角坐标系统描写边界条件的边值问题. 平面分层媒质中埋入体电磁辐射和散射问题的研究中,梅冠香教授提出单矩量法[7],用广义 Sommerfeld 积分求出多极子展开式[8],这种方法无疑是成功的。他们为了适应单矩量法中的数学球面和平面界面的边界条件，最初选择的电、磁矢位是

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_m \\ \bar{A}_e \end{pmatrix} = \hat{z}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=|m|}^{\infty}\begin{pmatrix} \alpha_{m,n} \\ \beta_{m,n} \end{pmatrix}\frac{1}{k}h_n^{(1)}(kR)P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}. \tag{21}$$

可是按这种电、磁模式场型 (即 $\bar{e}_{mn}^{TM(z)}$, $\bar{h}_{mn}^{TM(z)}$, $\bar{e}_{mn}^{TE(z)}$ 和 $\bar{h}_{mn}^{TE(z)}$) 展开的辐射场一直是发散级数。最后附加一项圆极化矢量位,即

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_m \\ \bar{A}_e \end{pmatrix} = (\hat{x} + i\hat{y})\sum_{m=0}^{\infty}\begin{pmatrix} \gamma_{\pm m} \\ \eta_{\pm m} \end{pmatrix}\frac{1}{k}h_m^{(1)}(kR)P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}, \tag{22}$$

其相应的电、磁模式场型是 $\bar{e}_{\pm M}^{RTM}$, $\bar{h}_{\pm m}^{RTM}$, $\bar{e}_{\pm m}^{RTE}$ 和 $\bar{h}_{\pm m}^{RTE}$，才得到正确的展开结果。张和梅的原意是补上了被遗漏的 R^{-m} 项,但这样处理逻辑上似乎欠周密. 其实,根据本文的观点，可以明确地分析原展开式的发散原因,从而得到正确的答案。(21) 式相应的是非标准圆球矢量波函数,它是一个非完备函数集,当然不能完整地表示任意矢量场。由 (17) 和 (18) 式,令 $n = m$, $m+1$, ……, 可得(如两个下标相同,简写成一个下标)

$$(\bar{M}, \bar{N})_{\substack{e\\o}m}(k) = m(2m-1)[(\bar{M}, \bar{N})^{(x)}_{\substack{e\\o}(m-1)}(k) \mp (\bar{M}, \bar{N})^{(y)}_{\substack{o\\e}(m-1)}(k)], \tag{23a}$$

$$\begin{aligned}(\bar{M}, \bar{N})_{\substack{e\\o}m(m+1)}(k) &= (m+1)(2m+1)(\bar{M}, \bar{N})^{(z)}_{\substack{e\\o}m}(k) \\ &\pm m(2m+1)(2m-1)[(\bar{N}, \bar{M})^{(x)}_{\substack{o\\e}(m-1)}(k) \pm (\bar{N}, \bar{M})^{(y)}_{\substack{e\\o}(m-1)}(k)]. \end{aligned}\tag{23b}$$

$$\begin{aligned}(\bar{M}, \bar{N})_{\substack{e\\o}m(m+2)}(k) &= \frac{(2m+3)(m+2)}{2}(\bar{M}, \bar{N})^{(z)}_{\substack{e\\o}m(m+1)}(k) \\ &\pm \frac{m(2m+3)(2m+1)}{2}(\bar{N}, \bar{M})^{(z)}_{\substack{o\\e}m}(k) - m(m+1)(2m+1) \\ &\cdot (2m-1)[(\bar{M}, \bar{N})^{(x)}_{\substack{e\\o}(m-1)}(k) \mp (\bar{M}, \bar{N})^{(y)}_{\substack{o\\e}(m-1)}(k)], \end{aligned}\tag{23c}$$

……

当固定 m 值让 n 从 m 开始依次递推下去,可以看到标准圆球矢量波函数 $(\bar{M}, \bar{N})_{\substack{e\\o}mn}(k)$ 可以

用非标准圆球矢量波函数 $(\bar{M}, \bar{N})^{(z)}_{\substack{e\\0}mi}(k)(i=m, m+1, \cdots n-1)$ 和 $(\bar{M}, \bar{N})^{(x)}_{\substack{e\\0}(m-1)}(k)\pm(\bar{M}, \bar{N})^{(y)}_{\substack{0\\e}(m-1)}(k)$ 的线性迭加表示．由此得到和梅冠香教授完全一致的展开式是

$$\begin{pmatrix}\bar{E}\\ \bar{H}\end{pmatrix} = \sum_{M=-\infty}^{\infty}\sum_{n=|m|}^{\infty}\left[\alpha'_{mn}\begin{pmatrix}\bar{e}^{TE(z)}_{mn}\\ \bar{h}^{TE(z)}_{mn}\end{pmatrix} + \beta_{mn}\begin{pmatrix}\bar{e}^{TM(z)}\\ \bar{h}^{TM(z)}\end{pmatrix}\right] + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\gamma_{\pm m}\begin{pmatrix}\bar{e}^{RTE}_{\pm m}\\ \bar{h}^{RTE}_{\pm m}\end{pmatrix} + \eta_{\pm m}\begin{pmatrix}\bar{e}^{RTM}_{\pm m}\\ \bar{h}^{RTM}\end{pmatrix}\right]. \tag{24}$$

附 录

关于 (13) 式的推导

$$\bar{M}^{(y)}_{\substack{e\\0}n\lambda}(h) = \nabla\times[\hat{y}\psi_{\substack{e\\0}n\lambda}(h)] = \Big\{\Big(-\hat{r}\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}n\varphi\cos\varphi + \hat{\varphi}\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}n\varphi\sin\varphi\Big)ihJ_n(\lambda r) + \hat{z}\frac{1}{r}\Big[r\frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r}\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}n\varphi\cos\varphi \pm nJ_n(\lambda r)\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}n\varphi\sin\varphi\Big]\Big\}e^{ihz}, \tag{A-1}$$

$$\frac{1}{2}\Big\{\mp\frac{ih}{\lambda}[\bar{M}_{\substack{0\\e}(n+1)\lambda}(h)+\bar{M}_{\substack{0\\e}(n-1)\lambda}(h)] - \frac{k_\lambda}{\lambda}[\bar{N}_{\substack{e\\0}(n+1)\lambda}(h) - \bar{N}_{\substack{e\\0}(n-1)\lambda}(h)]\Big\}$$
$$= \Big\{\Big(-\hat{r}\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}n\varphi\cos\varphi + \hat{\varphi}\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}n\varphi\sin\varphi\Big)ihJ_n(\lambda r) + \hat{z}\frac{\lambda}{2}\Big[-J_{n+1}(\lambda r)\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}(n+1)\varphi + J_{n-1}(\lambda r)\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}(n-1)\varphi\Big]\Big\}e^{ihz}. \tag{A-2}$$

比较 (A-1) 和(A-2) 式,两者 r 和 φ 分量已完全一样．再将 (A-1) 式中 z 分量取出,有

$$\frac{1}{r}\Big[r\frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r}\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}n\varphi\cos\varphi \pm nJ_n(\lambda r)\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}n\varphi\sin\varphi\Big]e^{ihz}$$
$$= \frac{\lambda}{2}\Big[J_{n-1}(\lambda r)\Big(\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}n\varphi\sin\varphi \pm \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}n\varphi\sin\varphi\Big) - J_{n+1}(\lambda r)\Big(\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}n\varphi\cos\varphi \mp \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}n\varphi\sin\varphi\Big)\Big]e^{ihz}$$
$$= \frac{\lambda}{2}\Big[-J_{n+1}(\lambda r)\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}(n+1)\varphi + J_{n-1}(\lambda r)\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}(n-1)\varphi\Big]e^{ihz}. \tag{A-3}$$

由此得到

$$\bar{M}^{(y)}_{\substack{e\\0}n\lambda}(h) = \frac{1}{2}\Big\{\mp\frac{ih}{\lambda}[\bar{M}_{\substack{0\\e}(n+1)\lambda}(h) - \bar{M}_{\substack{0\\e}(n-1)\lambda}(h)] - \frac{k_\lambda}{\lambda}[\bar{N}_{\substack{e\\0}(n+1)\lambda}(h) - \bar{N}_{\substack{e\\0}(n-1)\lambda}(h)]\Big\}. \tag{A-4}$$

将 (A-4) 式取一次旋度并除以 k, 即得到 $\bar{N}^{(y)}_{\substack{e\\0}n\lambda}(h)$ 的表示式．再将 λ 换成 μ, 最后可得

$$(\bar{M}, \bar{N})^{(y)}_{\substack{e\\0}n(\lambda,\mu)}(h) = \frac{1}{2}\Big\{\mp\frac{ih}{(\lambda,\mu)}[(\bar{M}, \bar{N})_{\substack{0\\e}(n+1)(\lambda,\mu)}(h) + (\bar{M}, \bar{N})_{\substack{0\\e}(n-1)(\lambda,\mu)}(h)] - \frac{k_{(\lambda,\mu)}}{(\lambda,\mu)}[(\bar{N}, \bar{M})_{\substack{e\\0}(n+1)(\lambda,\mu)}(h) - (\bar{N}, \bar{M})_{\substack{e\\0}(n-1)(\lambda,\mu)}(h)]\Big\}. \tag{A-5}$$

戴振铎和梅冠香教授与作者进行过有益的讨论;华东师范大学 83 级毕业生张敏娅同学对文中公式做过推导和验证,在此一并致谢．

参 考 文 献

[1] Hansen, W. W., *Phys. Rev.*, 4 (1935), 139—143; *J. A. P.*, 7 (1936), 460—465; *J. A. P.*, 8 (1937), 282—286.

[2] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, 1941.
[3] Morse, P. M. and Feshach, N., *Methods of Theoretical Physics*, 1953.
[4] Tai, C. T. (戴振铎), *Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory* (电磁理论中的并矢 Green 函数), 1971; 华东师范大学微波研究室译, 1979.
[5] Spence, R. D. and Wells, C. P., *The Theory of Electromagnetic Wave*, A Symposium, 1951, 95—104.
[6] 林为干, 微波理论与技术, 1979.
[7] Mei, K. K., *IEEE Trans. on AP*, AP-22 (1971), 6: 760—766.
[8] Chang Shu-Kong and Me, K. K., ibid., AP-28 (1980), 504—512.