中国科学

1982 年 4 月　　A 辑　　第 4 期

论 Einstein 引力理论中坐标的物理意义和场方程的解

周培源

（中国科学院、北京大学）

摘　　要

本文联系引力势（它满足 Einstein 引力场方程）的边值条件指出坐标的物理意义. 由于 Bianchi 恒等式，引力场方程要得到确定解必须辅之以谐和条件. 除了无穷大平面，在所考虑的引力体之外的一定区域，度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的 g_{00} 分量应成为 Newton 引力势. 我们用上述条件来求出球对称质量和具有均匀线密度的无穷长杆的静态解. 对于具有均匀表面密度的无穷大平面，上述关于 g_{00} 的条件是解的必然结果，为此可以用等效原理把解确定下来，以便能导出 Galileo 的自由落体定律. 这个结果的分析可以作为一个例子显示出坐标的物理意义. 这样的程序可以用于求解 Einstein 理论中普遍的引力问题.

Einstein 在广义相对论中，在发现引力规律和运动方程的同时，还指出：物理规律在数学上应遵循协变性原理. 这是他对物理学的一个极为重要的贡献. 物理规律若用代数方程或微分方程来表达都是张量方程，在坐标变换下这些方程是协变的. 的确，广义相对论发表以后，所有在 Einstein 以前发现的物理规律都被证明是张量方程，而以前并没有注意到这个事实.

另一方面，由于强调了物理规律的协变性，又导致了另一种观点，即认为：虽然物理规律和空时几何有基本的意义，而用以表达这些物理规律的坐标是没有物理意义的，因此坐标的选择仅仅是数学上方便与否的问题. 在这种观点指导下，一直假定：Einstein 引力场方程的任何两个解，只要可以用非奇异的实的坐标变换联系起来，就代表了所给引力问题的同一解.

这种观点并不是没有根源的. 在 Newton 理论中，空间和时间是分开的. 而在狭义相对论中，空间和时间构成一个整体——四维空时，它是以一个独立的实体的面貌出现的. 但在 Einstein 引力理论中，空时、物质、引力和物质运动被认作是彼此关联着的.

然而，无论是 Newton 的引力理论还是 Einstein 的引力理论都是宏观的物理理论. Einstein 理论所要解决的引力问题，也是 Newton 理论所要解决的问题，它们的差别仅在于 Einstein 理论更深入地理解了自然现象的本质，因而更精确地揭示了本质. 任何引力问题，在 Newton 理论中有解，在 Einstein 理论中也应该同样能解，只不过以更深刻的方式解决而已. 从 Einstein 引力理论在六十多年以前发表以来，并没有解决很多问题，有的问题即使数学上有了解，它的

本文于 1981 年 10 月 15 日收到.

物理意义却并不清楚. 场方程的非线性固然造成了数学上的困难，但实质上主要的障碍是物理的. 要使 Newton 理论能解的问题在 Einstein 理论中也能有解，必须先克服这些障碍.

我们将在本文中看到，那种认为坐标没有物理意义的观点是在 Einstein 引力理论中求解问题时遇到的困难之一. 事实上，根本无法避开或绕过坐标的物理意义的问题. 当我们求解运动物质的场方程，

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi\kappa}{c^2} T_{\mu\nu}, \tag{0.1}$$

时，我们必须首先确定物质的几何构形，这种构形的对称性，物质的密度分布、压力以及在空时中的运动速度，所有这些量都必须用坐标来表达. 很明显，如果物体内部的物质分布或者 $g_{\mu\nu}$ 在有限距离上的边界值不知道，场方程是不可能有确定解的. 一个有限物体的度规在无穷远处趋于平直空时的度规，这个条件是必要的，但却不是可以用来获得确定解的充分条件.

还有另一个重要的因素导致场方程 (0.1) 解的不确定性，这就是众所周知的在场方程之间存在着 Bianchi 恒等式：

$$R^{\nu}_{\mu,\nu} - \frac{1}{2} R_{,\mu} = 0. \tag{0.2}$$

换言之，由于上面的微分关系式，场方程 (0.1) 的独立的分量方程的数目是少于要确定的度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的分量数目，这样，方程 (0.1) 的解必定具有某种程度的不确定性.

下面将提出一个程序，按照这个程序，在 Einstein 理论中引力问题可以象 Newton 理论一样求解.

首先，在描述引力和物质运动的 Riemann 度规 $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ 中，我们将采用 Descartes 空间坐标 $x^r(r = 1, 2, 3)$ 和时间 $x^0(x^0 = t)$. 为了简化数学运算，我们可以用非奇异的实的坐标变换，从 Descartes 的空时坐标系变到其它坐标系，但要求每个变换都有它几何的或者物理的意义，如在以后所提出的无穷大平面引力场解的例子那样.

其次，由于在场方程 (0.1) 的分量之间存在着 Bianchi 关系 (0.2)，我们必须用另外四个微分关系来补充，以使得方程 (0.1) 的解确定.

我们采用谐和坐标条件，即 Descartes 空间和时间坐标 x^α 应该满足波动方程：

$$\Box^2 x^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}) = 0. \tag{0.3}$$

实际上，这些方程是加在度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的解上的四个微分关系. 为简化数学运算，我们可以从 x^α 坐标系变到其它坐标系 x'^μ，在这两个坐标系之间有下述熟知的关系[1]，

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}' = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \cdot \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \cdot \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \tau\sigma \end{matrix} \right\} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \cdot \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}, \tag{0.4}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta\alpha \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{-g}), \quad g^{\beta\gamma} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\sqrt{-g}\, g^{\lambda\beta}).$$

因此，在任一坐标系 x'^α 中，谐和条件 (0.3) 变为

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} g'^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g'}} \frac{\partial}{\partial x'^\sigma} (\sqrt{-g'}\, g'^{\lambda\sigma}) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} = 0. \tag{0.5}$$

第三个条件是，度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的 g_{00} 分量在引力物体周围空间的一定区域，应近似地等于 Newton 势．这一条件可以作为度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的边值条件．下面将看到，虽然这个条件可以用作求解具有球对称的质量、无穷长杆和有限物体引力场的普遍条件，但对无穷大平面情形，它是解的必然结果．为此，可以用等效原理作为确定解的条件.

我们将用上述程序求解三个简单的问题：球对称质量的静态引力场、带有均匀线物质密度的无穷长杆的静态引力场，以及带有均匀面物质分布的无穷大平面的静态引力场．在无穷大平面的引力场中，我们将给出 Galileo 的自由落体定律．在所有这三个问题中，非线性偏微分引力方程都退化为非线性常微分方程，并存在着严格解.

最后，我们把这种程序加以推广，以包括文献 [2, 3] 提出的运动理论和引力波理论[1]为例子，通过对自由落体定律的不同形式的分析，显示出坐标的物理意义.

一、球对称静态场

具有球对称质量分布的物体外面的静态引力场，其四维空时的 Riemann 度规可以写为：

$$ds^2 = e^{2\nu}dt^2 - e^{2\lambda}dr^2 - e^{2\mu}(r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2), \tag{1.1}$$

其中 λ, μ, ν 是 r 的待定函数，球极坐标 r, θ, φ 与 Descartes 空间坐标 x, y, z 的关系是下述变换方程：

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta. \tag{1.2}$$

众所周知，球对称静态场 (1.1) 在物体外的收缩的 Riemann-Christoffel 张量方程是场方程 (0.1) 中 $T_{\mu\nu} = 0$ 的特殊情况，它有四个非恒等于零的分量方程，并且其中两个是全同的．由于 Bianchi 恒等式 (0.2)，三个方程中仅有两个是彼此独立的，结果它们的解是不确定的.

Schwarzschild 用数学变换

$$r' = e^{\mu}r \tag{1.3}$$

把 e^{μ} 吸收到了坐标 r' 中，这就解决了这个困难．于是著名的 Schwarzschild 解就成为：

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r'}\right)dt^2 - \frac{1}{1 - \dfrac{2m}{r'}}dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{1.4}$$

其中积分常数 m 是用相对论单位表示的物体质量.

按照我们的程序，应保留原来的坐标 r，以作为由 (1.2) 式定义的杆的测量值，并用谐和条件 (0.5) 来确定 (1.3) 式中 r' 与 r 的确切关系．令

$$x'^0 = t, \quad x'^1 = r', \quad x'^2 = \theta, \quad x'^3 = \varphi. \tag{1.5}$$

定义 $x^r (r = 1, 2, 3)$ 分别代表 x, y, z．根据 (1.2) 和 (1.5) 式，坐标 x'^μ 变为 x^μ 的变换方程是：

$$\begin{aligned} &x^0 = x'^0 = t, && x^1 = x'^1\sin x'^2\cos x'^3, \\ &x^2 = x'^1\sin x'^2\sin x'^3, && x^3 = x'^1\cos x'^2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

利用 (1.6) 式计算 $\alpha = 1, 2, 3$ 的谐和条件 (0.5)，并得到相同的关系式：

$$\left(1 - \frac{2m}{r'}\right)\frac{d^2r}{dr'^2} + \frac{2}{r'^2}(r' - m)\frac{dr}{dr'} - \frac{2r}{r'} = 0, \tag{1.7}$$

而 (0.5) 式的 $\alpha = 0$ 的分量恒等于零．微分方程 (1.7) 的普遍解为

$$r = c_1(r' - m) + c_2\left[\frac{1}{2m}(r' - m)\ln\left(1 - \frac{2m}{r'}\right) + 1\right],$$

其中 c_1, c_2 为两个积分常数.

利用在大的 r 值下(1.4)式中的 g_{00} 应成为 Newton 势 $\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$ 这个条件，于是 $c_2 = 0$，并取 $c_1 = 1$，仍不失其普遍性. 这样，(1.4)式定义的度规就成为 $ds^2 = \frac{r - m}{r + m}dt^2 - \frac{r + m}{r - m}\times dr^2 - \left(1 + \frac{m}{r}\right)^2 r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$.

在这个解中由 $ds^2 = 0$ 确定的光速在 $\frac{m}{r}$ 的一阶近似下是各向同性的，但在二阶近似 $\frac{m^2}{r^2}$ 下就不再是各向同性的了.

二、轴对称静态场

描述具有轴对称物质分布的、物体外面的静态空时的普遍的 Riemann 度规，可以写为·

$$ds^2 = e^{2\nu}dt^2 - e^{2\lambda}d\rho^2 - e^{2\mu}dz^2 - 2e^{2\sigma}d\rho dz - \rho^2 e^{2\kappa}d\varphi^2, \tag{2.1}$$

其中 ρ, z, φ 为柱坐标，与 Descartes 坐标 x, y, z 的关系是：

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \tag{2.2}$$

λ, μ, ν, κ, σ 都为 ρ, z 的函数. 令

$$\begin{aligned} &x^0 = t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \\ &x'^0 = t, \quad x'^1 = \rho, \quad x'^2 = z, \quad x'^3 = \varphi. \end{aligned} \tag{2.3}$$

度规张量 $g'_{\mu\nu}$ 有下述非零分量：

$$\begin{aligned} &g'_{00} = e^{2\nu}, \quad g'_{11} = -e^{2\lambda}, \quad g'_{22} = -e^{2\mu}, \\ &g'_{12} = -e^{2\sigma}, \quad g'_{33} = -\rho^2 e^{2\kappa}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

而 $g'_{\alpha\beta}$ 的所有其它 α 不等于 β 的分量都等于零. 逆变张量 $g'^{\alpha\beta}$ 的分量可以由关系式 $g'^{\alpha\beta}g'_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$ 计算出来.

从(2.2)和(2.3)式可得变换方程：$x^0 = x'^0 = t$, $x^1 = x'^1\cos x'^3$, $x^2 = x'^1\sin x'^3$, $x^3 = x'^2$.

物体外面真空中的引力场方程在 x'^α 坐标系中可以写为：

$$R'_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\alpha\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}\alpha\\ \nu\beta\end{Bmatrix}' + \frac{\partial^2}{\partial x'^\mu\partial x'^\nu}\ln\sqrt{-g'}$$

$$- \begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}'\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\ln\sqrt{-g'} = 0. \tag{2.5}$$

在附录中给出了与(2.1)式度规相应的 $R'_{\mu\nu}$ 和第二类 Christoffel 符号的明显表达式.

三、无穷长杆的静态场

取 Descartes 空间坐标系的 z 轴表示给定的带有均匀线密度的无穷长杆. 于是由(2.1)式定义的协变张量 $g'_{\mu\nu}$ 和逆变张量 $g'^{\mu\nu}$ 的所有分量都是 ρ 的函数. 把由 $\alpha = 3$ 时的谐和条件(0.5)得出的关系积分，得

$$\frac{\rho e^{\kappa+\nu+2\sigma}}{(e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma})^{1/2}}=c_0, \tag{3.1}$$

其中 c_0 为积分常数,后面我们将证明它等于零.

由 $\alpha=1, 2$ 时 (0.5) 式的分量方程可以得到一个相同的方程

$$\frac{1}{\rho}e^{-2\kappa}-\frac{e^{2\mu}}{e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma}}\left[\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}+\frac{d\nu}{d\rho}+2\frac{d\mu}{d\rho}-\frac{d}{d\rho}\ln(e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma})\right]=0, \tag{3.2}$$

而 (0.5) 式的 $\alpha=0$ 的分量方程则恒等于零.

场方程 (2.5) 的五个非恒等于零的分量是

$$\begin{aligned}
R'_{00}=&-\frac{e^{2\nu+2\mu}}{e^{2\nu+2\mu}-e^{4\sigma}}\left\{\frac{d^2\nu}{d\rho^2}+\frac{d\nu}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}+\frac{d\nu}{d\rho}\right.\right.\\
&\left.\left.+2\frac{d\mu}{d\rho}-\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\ln(e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma})\right]\right\}=0,\\
R'_{11}=&\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{d\rho}\right)^2+\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}+\frac{d\nu}{d\rho}\right)\\
&+\frac{1}{2}\frac{1}{e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma}}\left[e^{2\lambda}\frac{d^2}{d\rho^2}e^{2\mu}-\left(e^{2\mu}\frac{d}{d\rho}e^{2\lambda}-\frac{d}{d\rho}e^{2\sigma}\right)\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}+\frac{d\nu}{d\rho}\right)\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}e^{2\lambda}\frac{d}{d\rho}e^{2\mu}\frac{d}{d\rho}\ln(e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma})\right]=0,\\
R'_{22}=&\frac{1}{2}\frac{e^{2\mu}}{e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma}}\left[\frac{d^2}{d\rho^2}e^{2\mu}+\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}+\frac{d\nu}{d\rho}\right)\frac{d}{d\rho}e^{2\mu}\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}e^{2\mu}\frac{d}{d\rho}\ln(e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma})\right]=0,\\
R'_{12}=&\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2\mu}}{e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma}}\left[\frac{d^2}{d\rho^2}e^{2\mu}+\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}+\frac{d\nu}{d\rho}\right)\frac{d}{d\rho}e^{2\mu}\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}e^{2\mu}\frac{d}{d\rho}\ln(e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma})\right]=0,\\
R'_{33}=&\frac{\rho^2e^{2\kappa+2\mu}}{e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma}}\left\{\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}\right)\left[\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}+\frac{d\nu}{d\rho}+2\frac{d\mu}{d\rho}\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\ln(e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma})\right]+\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}\right)\right\}=0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

在上述五个微分方程中,第三和第四个是相同的. 对第一、第五和第三等方程积分,得到

$$\frac{\rho e^{\kappa+\nu+2\mu}}{(e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma})^{1/2}}\frac{d\nu}{d\rho}=c_1, \tag{3.4}$$

$$\frac{\rho e^{\kappa+\nu+2\mu}}{(e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma})^{1/2}}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}\right)=c_2, \tag{3.5}$$

$$\frac{\rho e^{\kappa+\nu+2\mu}}{(e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma})^{1/2}}\frac{d\mu}{d\rho}=c_3, \tag{3.6}$$

其中 c_1, c_2, c_3 是积分常数.

比较 (3.4), (3.5) 式,以及比较 (3.5)、(3.6) 式并分别积分后,得

$$\nu=\frac{c_1}{c_2}(\ln\rho+\kappa),\quad 或\quad e^{\nu}=(\rho e^{\kappa})^{c_1/c_2},\tag{3.7}$$

$$\mu=\frac{c_3}{c_2}(\ln\rho+\kappa),\quad 或\quad e^{\mu}=(\rho e^{\kappa})^{c_3/c_2}.\tag{3.8}$$

在 (3.7) 与 (3.8) 式中的积分常数都取为零，仍不失其普遍性.

由方程 (3.1), (3.6) 和 (3.8) 式得

$$e^{2\sigma}=\frac{c_0}{c_3}e^{2\mu}\frac{d\mu}{d\rho}=\frac{c_0}{c_2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}\right)(\rho e^{\kappa})^{2c_3/c_2}.\tag{3.9}$$

由 (3.1), (3.7), (3.8) 和 (3.9) 式可以求得函数 $e^{2\lambda}$,

$$e^{2\lambda}=\frac{1}{c_2^2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}\right)^2(\rho e^{\kappa})^{2c_3/c_2}\left[(\rho e^{\kappa})^{2\left(1+\frac{c_1}{c_2}\right)}+c_0^2\right].\tag{3.10}$$

由 (3.3) 式的第二和第三两方程，可以得

$$\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{d\rho}\right)^2+\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}+\frac{d\nu}{d\rho}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}+\frac{d\nu}{d\rho}\right)\frac{d}{d\rho}\ln(e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma})=0.\tag{3.11}$$

把由关系式 (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) 所确定的函数 ν, μ, λ, σ 代入 (3.11) 式，可以得到积分常数之间的如下关系式，

$$c_3(c_1+c_2)+c_1c_2=0.\tag{3.12}$$

这样，(3.3) 式的五个方程都已满足，但函数 κ 仍未确定.

为确定 κ，我们可以把分别由 (3.7)—(3.10) 式得到的函数 $e^{2\nu}$, $e^{2\mu}$, $e^{2\sigma}$, $e^{2\lambda}$ 代入谐和条件 (3.2)，并得

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}\right)+\frac{1}{c_2^2}\rho\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\kappa}{d\rho}\right)^3(\rho e^{\kappa})^{\frac{2}{c_2}(c_1+c_3)}=0.\tag{3.13}$$

令

$$\xi=(\rho e^{\kappa})^{\frac{1}{c_2}(c_1+c_3)}.\tag{3.14}$$

于是 (3.13) 式就变为 $\xi\dfrac{d^2\rho}{d\xi^2}+\dfrac{d\rho}{d\xi}-\dfrac{1}{(c_1+c_3)^2}\xi\rho=0.$

这是变型 Bessel 方程，它的解为:

$$\rho=a_0I_0(n\xi)+a_1K_0(n\xi),\tag{3.15}$$

其中 $n=\dfrac{1}{|c_1+c_3|}$ · I_0,K_0 是变型 Bessel 函数，a_0, a_1 是两个积分常数. 对小的 z 值，$I_0(z)$, $K_0(z)$ 可以展开为[4]

$$I_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k},\ K_0(z)=-\left\{\ln\left(\frac{z}{2}\right)+\gamma\right\}I_0(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\right)\left(\frac{z^2}{4}\right)^k.$$

解 $K_0(n\xi)$ 没有物理意义，因此 (3.15) 式中 a_1 应等于零. 对于大的 z 值，$I_0(z)$ 有下面的渐近

展开式，$I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left\{1+\frac{1}{8z}+\frac{1\cdot 9}{2!(8z)^2}+\frac{1\cdot 9\cdot 25}{3!(8z)^3}+\cdots\cdots\right\}$. 当 ξ 很大时，我们得

$$\frac{\rho}{a_0} \sim \frac{e^{n\xi}}{\sqrt{2\pi n\xi}}, \text{ 或 } \quad \xi \sim \frac{1}{n}\ln\frac{\rho}{a_0}. \tag{3.16}$$

在杆的周围的一定区域内，函数 $e^{2\nu}$ 应成为它的 Newton 势，因此我们可以要求，在离杆距离大的地方 Einstein 解应该趋向于 Newton 解. 由 (3.7), (3.14) 式得

$$e^{2\nu} = \xi^{\frac{2c_1}{c_1+c_3}}. \tag{3.17}$$

比较 (3.17), (3.16) 式，可以得下述结果:

$$\frac{2c_1}{c_1+c_3} = 1, \quad \text{即} \quad c_3 = c_1. \tag{3.18}$$

由此关系式和 (3.12) 式可以得

$$c_1 \neq 0, \quad c_2 = -\frac{1}{2}c_1, \quad n = \frac{1}{2c_1} > 0. \tag{3.19}$$

因此 c_1 正比于此无穷长杆的线密度.

由关系式 (3.14), (3.7), (3.8) 以及 (3.18), (3.19) 中常数 c_2, c_3 的值，可以得以下结果

$$e^{2\nu} = \xi, \quad e^{2\mu} = \xi, \quad e^{2\kappa} = \frac{1}{\rho^2}\xi^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.20}$$

由 (3.20) 式所给出的函数关系，(3.1) 式应成为: $\frac{\xi^{1/4}e^{2\sigma}}{(e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma})^{1/2}} = c_0$.

若 $\xi = 0$, $c_0 = 0$. 故 $e^{2\sigma} = -g'_{12} = 0$.

由于 e^κ 由 (3.20) 式给出，常数 c_3, c_2 由 (3.18) 和 (3.19) 式给出，(3.10) 式中的函数 $e^{2\lambda}$ 就变为:

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{4c_1^2\xi^{1/2}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2}, \tag{3.21}$$

ρ 与 ξ 的关系由取 $a_1 = 0$ 的 (3.15) 式给出.

(3.20) 和 (3.21) 式给出的函数 $e^{2\nu}$, $e^{2\mu}$, $e^{2\kappa}$, $e^{2\lambda}$ 是由 (2.1) 式定义的具有均匀线密度的无穷长杆的引力场的度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的解.

四、无穷大平面的静态场

取 Descartes 空间坐标系的 xy 平面表示给定的带有均匀面密度的无穷大平面. 除了 g'_{33} 和 g'^{33} 以外，(2.1) 式中度规张量 $g'_{\mu\nu}$ 和 $g'^{\mu\nu}$ 的所有非零分量都是 z 的函数. 计算谐和条件 (0.5) 的分量方程，对 $\alpha = 3$ 的情形，得

$$\frac{e^{\kappa+\nu+2\sigma}}{(e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma})^{1/2}} - \rho\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{\kappa+\nu+2\lambda}}{(e^{2\lambda+2\mu}-e^{4\sigma})^{1/2}}\right] = 0. \tag{4.1}$$

因为 ρ, z 是两个独立变量，(4.1) 式左边第一项必须等于零. 显然 $e^{\kappa+\nu}$ 不可能等于零. 因此，根据 (2.1) 式并考虑 (2.4) 式规定的符号，应有

$$g'_{12} = -e^{2\sigma} = 0. \tag{4.2}$$

于是方程 (4.1) 就变为：

$$\frac{d\lambda}{dz}+\frac{d\kappa}{dz}+\frac{d\nu}{dz}-\frac{d\mu}{dz}=0.$$

对此方程积分，得

$$\lambda+\kappa+\nu-\mu=c_0=0, \tag{4.3}$$

其中 c_0 为积分常数，可取为零而不失其普遍性.

由 (0.5) 式 $\alpha=1, 2$ 的分量方程所导出的方程是相同的：

$$\frac{1}{\rho}\left(e^{-2\kappa}-e^{-2\lambda}\right)=0, \tag{4.4}$$

故有

$$\kappa=\lambda. \tag{4.5}$$

(0.5) 式 $\alpha=0$ 的分量方程恒等于零. 把 (4.3) 和 (4.5) 式联立起来，可求得

$$2\lambda+\nu-\mu=0. \tag{4.6}$$

采用 (2.3)，(2.4) 式所规定的符号，并考虑到关系式 (4.2)，(4.5)，由 (2.5) 式可以求得度规 (2.1) 式的场方程中非恒等于零的仅有以下四个分量：

$$\begin{aligned}
R'_{00}&=-e^{2\nu-2\mu}\left[\frac{d^2\nu}{dz^2}+\left(\frac{d\nu}{dz}\right)^2+2\frac{d\lambda}{dz}\frac{d\nu}{dz}-\frac{d\mu}{dz}\frac{d\nu}{dz}\right]=0,\\
R'_{11}&=e^{2\lambda-2\mu}\left[\frac{d^2\lambda}{dz^2}+2\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2-\frac{d\lambda}{dz}\frac{d\mu}{dz}+\frac{d\lambda}{dz}\frac{d\nu}{dz}\right]=0,\\
R'_{22}&=2\frac{d^2\lambda}{dz^2}+2\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2+\frac{d^2\nu}{dz^2}+\left(\frac{d\nu}{dz}\right)^2-2\frac{d\lambda}{dz}\frac{d\mu}{dz}-\frac{d\mu}{dz}\frac{d\nu}{dz}=0,\\
R'_{33}&=\rho^2e^{2\lambda-2\mu}\left[\frac{d^2\lambda}{dz^2}+2\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2-\frac{d\lambda}{dz}\frac{d\mu}{dz}+\frac{d\lambda}{dz}\frac{d\nu}{dz}\right]=0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

在上述一组四个微分方程中，第二和第四是全同的. 利用谐和条件 (4.6)，可以把第一、第二两方程变为：

$$\frac{d^2\nu}{dz^2}=0,\quad \frac{d^2\lambda}{dz^2}=0.$$

对方程积分，并再次利用 (4.6) 式，可以得到

$$\nu=c_1z,\quad \lambda=c_2z,\quad \mu=(c_1+2c_2)z, \tag{4.8}$$

其中 c_1，c_2 为两个积分常数，函数 ν，λ 中的两个可加常数已置为零而不失其普遍性.

把 (4.8) 式 λ，μ，ν 的函数式代入 (4.7) 式的第三个方程，得 $2c_2(c_2+2c_1)=0$. 由此，

$$c_2=0\quad 或\quad c_2+2c_1=0. \tag{4.9}$$

可以把带有均匀面密度的无穷大平面的引力场的关于度规 (2.1) 式的解总括为： $g'_{00}=e^{2c_1z}$，$g'_{11}=-e^{2c_2z}$，$g'_{22}=-e^{2(c_1+2c_2)z}$，$g'_{12}=0$，$g'_{33}=-\rho^2e^{2c_2z}$. c_2 的值由 (4.9) 式给出. 对小的 z 值，g_{00} 可以展开为：

$$g'_{00}=1+2c_1z+\cdots\cdots. \tag{4.10}$$

这就是 Newton 势，因此积分常数 c_1 正比于平面的面密度.

有趣的是，由谐和条件 (0.5) 中的两个关系式 (4.1) 和 (4.4)，可以得到三个关系式——(4.2)，(4.5)，(4.6)，而场方程 (4.7) 中仅有两个方程给出了 ν，λ 的独立解，(4.7) 式的第三个方程给出的则是积分常数的一个关系式 (4.9).

从(4.10)式我们注意到，对(4.9)式给出的两个 c_2 值，在平面附近的 g'_{00} 都变为 Newton 势. 为了确定究竟 c_2 的哪个值代表物理解，我们求助于等效原理. 从对称性考虑，在无穷大平面引力场中，自由下落的升降机内部，空时应该是 Minkowski 型的，这个要求只有在 $c_2=0$ 时才能满足. 在度规，

$$ds^2 = e^{2c_1z}dt^2 - e^{2c_1z}dz^2 - d\rho^2 - \rho^2d\varphi^2, \tag{4.11}$$

中，我们作如下坐标变换:

$$t' = \frac{1}{c_1}e^{c_1z}\sinh c_1t,\quad z' = \frac{1}{c_1}(e^{c_1z}\cosh c_1t - e^{c_1h}),$$
$$\rho' = \rho,\quad \varphi' = \varphi, \tag{4.12}$$

其中初值条件为: 当 $(t, z, \rho, \varphi) = (0, h, 0, 0)$ 时，$(t', z', \rho', \varphi') = (0, 0, 0, 0)$，于是可以得到

$$ds^2 = dt'^2 - dz'^2 - d\rho'^2 - \rho'^2d\varphi'^2. \tag{4.13}$$

令 $c_1 = \frac{g}{c^2}$ 其中 g 为引力常数，c 为真空中的光速，并采用 c·g·s 单位制. (4.12)式所定义的函数 t', z' 可以按 g/c^2 的幂次展开:

$$t' = t\left[1 + \frac{1}{6}\cdot\frac{g}{c^2}(6z + gt^2) + \cdots\cdots\right],$$
$$z' = z - h + \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{24}\cdot\frac{g}{c^2}[12(z^2 - h^2) + 12zgt^2 + g^2t^4] + \cdots\cdots. \tag{4.14}$$

由(4.14)式可以看出，坐标变换(4.12)式的物理意义: 它表示了两个不同的观察者所用的两个不同的坐标系之间的关系，一个是固定在无穷大平面上的坐标系 (t, z, ρ, φ)，另一个是向平面自由下落的坐标系 $(t', z', \rho', \varphi')$.

在固定的坐标系 (t, z, ρ, φ) 中，一个距离平面 h 的粒子由静止开始自由下落，其轨迹可以由(4.12)式中令 $z'=0$ 得出，或者由求解这个自由落体在(4.11)式所定义的引力场中的测地线微分方程得到，其结果为:

$$z = h - \frac{c^2}{g}\ln\cosh\frac{g}{c}t = h - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{12}\cdot\frac{g^3}{c^2}t^4 - \cdots\cdots,$$
$$\frac{dz}{dt} = -c\tanh\frac{g}{c}t = -gt + \frac{1}{3}\frac{g^3}{c^2}t^3 - \cdots\cdots. \tag{4.15}$$

这正是 Galileo 的自由落体定律在 Einstein 引力理论中的说明. 若初始高度 h 很大，在经过很长的时间 t 后，自由落体的速度将趋近于光速.

五、讨论和结论

从上述求解 Einstein 引力场方程的程序中，我们可以看出，狭义相对论的 Minkowski 空时也是 Einstein 引力理论的运动学基础. 坐标变换(1.2)和(2.2)式所显示的空间测度的 Euclid 特征，正是表达了这种思想. 文献[2, 3]用逐级逼近的方法求解场方程时，实际上用的就是 Minkowski 空时. 近似方法仅仅是一种数学方法，它不可能改变空时的特征. 既然平直空时是近似求解方法的运动学基础，它也必定能适用于场方程的严格求解，包括本文所述的三个特殊问题的求解. 而且平直空时和量子场论、规范场理论是一致的. 因此，场方程(0.1)

和谐和条件 (0.5) 描述的是在 Minkowski 空时中物质的运动和引力现象.

由于仅仅依靠场方程解是不确定的，人们一直企图用引进对 $g_{\mu\nu}$ 的额外的假定来使解确定. 例如，在 Schwarzschild 解中，可以把变换 (1.3) 式解释为在度规 (1.1) 式的解上加了一个额外条件 $\mu = 0$. 对于轴对称的静态引力场，则假设分量 g_{00} 是 Newton 势[5]. 这一点对 Schwarzschild 解也适用. 静态场的各向同性解也已给出[6,7]. 但所有这些尝试，本质上是带有特殊性的，仅仅适用于特殊的问题.

虽然文献 [8, 9] 曾用过谐和条件，但通常把它看作是为了给出一组谐和坐标，而现在却把它看作是加在场方程解上的普遍的物理条件. Einstein 等人[2,3]在发展他们的运动理论时用了这个条件. 他们的近似方法也可用于求解有限大小物体的静态场. 把谐和条件用于弱引力场的方程还预言了引力波的存在[1].

我们用 Newton 势作为球对称和轴对称静态场的一定区域内 g_{00} 的边值条件，从而确定了它们的解. 这一边值条件也可用于有限物体的静态引力场. 但对无穷大平面的引力场，必须进一步利用等效原理以确定它的解.

无穷大平面的另一个解相应于 (4.9) 式中 $c_2 = -2c_1$ 的情形，其度规为:

$$ds^2 = e^{2c_1 z}dt^2 - e^{-6c_1 z}dz^2 - e^{-4c_1 z}(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2), \tag{5.1}$$

它不满足等效原理，但可以导致与 Galileo 自由落体定律 (4.15) 式不同的形式.

经过坐标变换，

$$t' = t, \quad z' = \frac{c^2}{g} e^{-gz/c^2}, \quad \rho' = \rho, \quad \varphi' = \varphi \quad \left(\text{取} \quad c_1 = \frac{c^2}{g}\right). \tag{5.2}$$

度规 (5.1) 呈各向同性的形式[10]，

$$ds^2 = \left(\frac{c^2}{gz'}\right)^2 dt'^2 - \left(\frac{gz'}{c^2}\right)^4 (dz'^2 + d\rho'^2 + \rho'^2 d\varphi'^2). \tag{5.3}$$

z' 的物理意义显然与原来的坐标 z 的意义不同. 度规 (5.3) 式在 z' 坐标系内不可能导致 Galileo 的自由落体定律.

如果我们作坐标变换，

$$t'' = t, \quad z'' = \frac{c^2}{2g}(e^{2gz/c^2} - 1), \quad \rho'' = \rho, \quad \varphi'' = \varphi, \tag{5.4}$$

则度规 (5.1) 式变为 Levi-Civita[11] 给出的形式，

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2g}{c^2} z''\right) dt''^2 - \frac{1}{\left(1 + \frac{2g}{c^2} z''\right)^5} dz''^2 - \frac{1}{\left(1 + \frac{2g'}{c^2} z''\right)^2} (d\rho''^2 + \rho''^2 d\varphi''^2). \tag{5.5}$$

由这个度规可以导出不同于 (4.15) 式和 (5.1) 式的 Galileo 自由落体定律的第三种形式. 类似地，我们可以对度规 (4.11) 式实行与 (5.4) 式相同的坐标变换，并得到[5]

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2g}{c^2} z''\right) dt''^2 - \frac{1}{1 + \frac{2g}{c^2} z''} dz''^2 - d\rho''^2 - \rho''^2 d\varphi''^2. \tag{5.6}$$

由 (5.6) 式可以得到 Galileo 自由落体定律的第四种形式. 但是计算结果表明, 根据 (5.6) 式所得到的自由落体的速度将达到一个极大值,然后逐渐减小. 如果落体初始高度很大,当时间很大时,这个速度将趋于零. 这在物理上是无法接受的. 此外, 对于由 (4.9) 式给出的无穷大平面的两个不同的解,度规 (5.5) 和 (5.6) 式的形式并不满足谐和条件. 因此, 按照我们的程序, (4.11) 式是既满足谐和条件又满足等效原理的关于无穷大平面的唯一解.

从上面无穷大平面例子的分析中更可以看出坐标的物理意义. Descartes 空间坐标和时间定义了一个 Minkowski 空时,在这个空时里的 Einstein 场方程和谐和条件是物质的引力规律. Riemann 弯曲空时不过是描述引力现象的数学语言.

最后, 作者对于周如玲、丁浩刚、章德海和黄永念等同志在完成这一研究中所给予的帮助和协助,表示谢意.

附 录

(2.5) 式中五个不恒等于零的分量方程为:

$$R'_{00} = -\frac{\partial}{\partial\rho}\begin{Bmatrix}1\\00\end{Bmatrix}' - \frac{\partial}{\partial z}\begin{Bmatrix}2\\00\end{Bmatrix}' + 2\begin{Bmatrix}0\\01\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1\\00\end{Bmatrix}' + 2\begin{Bmatrix}0\\02\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}2\\00\end{Bmatrix}'$$

$$-\begin{Bmatrix}1\\00\end{Bmatrix}'\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\sqrt{-g'} - \begin{Bmatrix}2\\00\end{Bmatrix}'\frac{\partial}{\partial z}\ln\sqrt{-g'} = 0,$$

$$R'_{11} = -\frac{\partial}{\partial\rho}\begin{Bmatrix}1\\11\end{Bmatrix}' - \frac{\partial}{\partial z}\begin{Bmatrix}2\\11\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}0\\10\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}0\\10\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}1\\11\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1\\11\end{Bmatrix}' + 2\begin{Bmatrix}2\\11\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'$$

$$+\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}3\\13\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}3\\13\end{Bmatrix}' + \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\ln\sqrt{-g'} - \begin{Bmatrix}1\\11\end{Bmatrix}'\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\sqrt{-g'}$$

$$-\begin{Bmatrix}2\\11\end{Bmatrix}'\frac{\partial}{\partial z}\ln\sqrt{-g'} = 0,$$

$$R'_{22} = -\frac{\partial}{\partial\rho}\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}' - \frac{\partial}{\partial z}\begin{Bmatrix}2\\22\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}0\\20\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}0\\20\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}1\\21\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1\\21\end{Bmatrix}' + 2\begin{Bmatrix}2\\21\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}'$$

$$+\begin{Bmatrix}2\\22\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}2\\22\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}3\\23\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}3\\23\end{Bmatrix}' + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\ln\sqrt{-g'} - \begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}'\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\sqrt{-g'}$$

$$-\begin{Bmatrix}2\\22\end{Bmatrix}'\frac{\partial}{\partial z}\ln\sqrt{-g'} = 0,$$

$$R'_{12} = -\frac{\partial}{\partial\rho}\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}' - \frac{\partial}{\partial z}\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}0\\10\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}0\\20\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}1\\11\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1\\21\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}2\\11\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}'$$

$$+\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}2\\21\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}2\\22\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}3\\13\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}3\\23\end{Bmatrix}' + \frac{\partial^2}{\partial\rho\partial z}\ln\sqrt{-g'}$$

$$-\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\sqrt{-g'} - \begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'\frac{\partial}{\partial z}\ln\sqrt{-g'} = 0,$$

$$R'_{33} = -\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{{1 \atop 33}\right\}' - \frac{\partial}{\partial z}\left\{{2 \atop 33}\right\}' + 2\left\{{3 \atop 31}\right\}'\left\{{1 \atop 33}\right\}' + 2\left\{{3 \atop 32}\right\}'\left\{{2 \atop 33}\right\}'$$

$$-\left\{{1 \atop 33}\right\}'\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\sqrt{-g'} - \left\{{2 \atop 33}\right\}'\frac{\partial}{\partial z}\ln\sqrt{-g'} = 0,$$

而 (2.5) 式的其余分量方程都恒等于零.

非恒等于零的二阶 Christoffel 记号有下述十四个:

$$\left\{{0 \atop 10}\right\}' = \frac{\partial\nu}{\partial\rho}, \quad \left\{{0 \atop 20}\right\}' = \frac{\partial\nu}{\partial z};$$

$$\left\{{1 \atop 00}\right\}' = \frac{e^{2\nu}}{e^{2\lambda+2\mu} - e^{4\sigma}}\left(e^{2\mu}\frac{\partial\nu}{\partial\rho} - e^{2\sigma}\frac{\partial\nu}{\partial z}\right), \quad \left\{{2 \atop 00}\right\}' = \frac{e^{2\nu}}{e^{2\lambda+2\mu} - e^{4\sigma}}\left(e^{2\lambda}\frac{\partial\nu}{\partial z} - e^{2\sigma}\frac{\partial\nu}{\partial\rho}\right);$$

$$\left\{{1 \atop 11}\right\}' = \frac{1}{e^{2\lambda+2\mu} - e^{4\sigma}}\left[e^{2\lambda}\left(e^{2\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho} + e^{2\sigma}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right) - 2e^{4\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}\right],$$

$$\left\{{2 \atop 11}\right\}' = \frac{e^{2\lambda}}{e^{2\lambda+2\mu} - e^{4\sigma}}\left[-e^{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial z} - e^{2\sigma}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho} - 2\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}\right)\right];$$

$$\left\{{1 \atop 12}\right\}' = \frac{e^{2\mu}}{e^{2\lambda+2\mu} - e^{4\sigma}}\left(e^{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial z} - e^{2\sigma}\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right), \quad \left\{{2 \atop 12}\right\}' = \frac{e^{2\lambda}}{e^{2\lambda+2\mu} - e^{4\sigma}}\left(e^{2\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\rho} - e^{2\sigma}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right);$$

$$\left\{{1 \atop 22}\right\}' = \frac{e^{2\mu}}{e^{2\lambda+2\mu} - e^{4\sigma}}\left[-e^{2\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\rho} - e^{2\sigma}\left(\frac{\partial\mu}{\partial z} - 2\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)\right],$$

$$\left\{{2 \atop 22}\right\}' = \frac{1}{e^{2\lambda+2\mu} - e^{4\sigma}}\left[e^{2\mu}\left(e^{2\lambda}\frac{\partial\mu}{\partial z} + e^{2\sigma}\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right) - 2e^{4\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right];$$

$$\left\{{1 \atop 33}\right\}' = \frac{\rho^2 e^{2\kappa}}{e^{2\lambda+2\mu} - e^{4\sigma}}\left[-e^{2\mu}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{\partial\kappa}{\partial\rho}\right) + e^{2\sigma}\frac{\partial\kappa}{\partial z}\right],$$

$$\left\{{2 \atop 33}\right\}' = \frac{\rho^2 e^{2\kappa}}{e^{2\lambda+2\mu} - e^{4\sigma}}\left[-e^{2\lambda}\frac{\partial\kappa}{\partial z} + e^{2\sigma}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{\partial\kappa}{\partial\rho}\right)\right];$$

$$\left\{{3 \atop 13}\right\}' = \frac{1}{\rho} + \frac{\partial\kappa}{\partial\rho}, \quad \left\{{3 \atop 23}\right\}' = \frac{\partial\kappa}{\partial z}.$$

所有其余的二阶 Christoffel 符号都恒等于零.

参　考　文　献

[1] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology*, Wiley 1972.

[2] Einstein, A., Infeld, L., Hoffmann, B., *Ann. Math.*, **39**(1938), 65.

[3] Einstein, A., Infeld, L., *Canad. Jour. Math.*, **1** (1949), 224.

[4] Abramowitz, M., Stegun, I A., *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standaras, 1972.

[5] Chou, P. Y., *Amer. Jour, Math.*, **53**(1931), 289.

[6] ——————, *ibid.*, **59**(1937), 754.

[7] ——————, *ibid.*, **62**(1940), 43.

[8] Fock, V., *The Theory of Space, Time and Gravitation*, 2nd Revised Edition, Pergamon Press, 1962.

[9] Choquet-Bruhat, Y., York, Jr. J. W., *General Relativity and Gravitation* (Ed. A. Held), Plenum Press, 1980.

[10] Kasner, E., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **27**(1925), 156.

[11] Levi-Civita, T., *Reale Academia dei Lincei*, **27**ii 1918), 240.