

调和映射热流中自相似解的存在性

范辉军

(北京大学数学系, 北京 100871)

摘要 证明了当靶流形为 S^m ($3 \leq m \leq 6$) 时, 调和映射的热方程存在无穷多个满足能量条件的自相似解.

关键词 调和映射 热流 自相似解 存在性

设 (M, g) 和 (N, h) 是两个紧 Riemann 流形, 且 $\dim M = m$. 把 (N, h) 等距嵌入到一个 Euclid 空间 $\mathbb{R}^l$, 使得 N 是具有 $\mathbb{R}^l$ 诱导度量的子流形.

取 C^1 映射 $u: M \rightarrow N \subset \mathbb{R}^l$, 定义

$$e(u) = \frac{1}{2} |\Delta u|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \sum_{k=1}^l g^{ij} \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \frac{\partial u^k}{\partial x^j}$$

为能量密度, $E(u) = \int_M e(u) dv_g$ 表示 u 的能量. 调和映射就是能量泛函 $E(u)$ 的临界点.

若 u 是一光滑调和映射, 则它满足 Euler-Lagrange 方程

$$\tau(u) := \Delta_M u - A(u)(\Delta u, \Delta u) = 0, \quad (0.1)$$

其中 Δ_M 是 M 上的 Beltrami-Laplace 算子, $A(u)$ 是 N 在 $\mathbb{R}^l$ 中的第二基本形式. $\tau(u)$ 称为 M 上的张力场.

利用热流方法, 考虑 $E(u)$ 的负梯度流方程

$$u_t = \tau(u), \quad u(0, x) = u_0(x), \quad (0.2)$$

文献[1] 证明了若 M, N 是紧无边 Riemann 流形, 则对任意 C^1 映射 $u_0: M \rightarrow N$, 存在 $T > 0$, 使得问题(0.2)存在唯一解 $u(x, t) \in C^\infty(M \times (0, T), N) \cap C^1(M \times [0, T], N)$. 若极大存在时间 $T < \infty$, 则

$$\lim_{t \rightarrow T} \|\Delta u(\cdot, t)\|_{C^0(M, N)} = \infty$$

进一步, 若 N 的截曲率非正, 则 $T = \infty$, 且当 $T \rightarrow \infty$ 时, $u(x, t)$ 收敛到一个调和映射.

$m=2$ 时, 文献[2] 研究了发展方程(0.2)弱解的存在性, 证明了奇点只能在有限个点出现, 并证明了当 $m=2$ 时, N 存在调和球面是破裂(blow-up)现象出现的唯一原因. 文献[3] 给出了 $D^2 \rightarrow S^2$ 和 $S^2 \rightarrow S^2$ 的例子, 表明 $m=2$ 时, 破裂确实会发生.

$m=3$ 时, 文献[4] 证明了(0.2)式弱解的存在性与正则性. 文献[5] 指出每个时间片上奇异集的余维数不会超过 2. 文献[6] 给出了 $m \geq 3$ 时, $\mathbb{R}^m \rightarrow S^m$ 与 $S^m \rightarrow S^m$ 破裂的例子. 这些例子激发人们去研究奇点的存在性与奇点附近解的渐近行为.

奇点分为两类^[4]: 假定 $u(x, t) \in C^\infty(M \times [0, T), N)$ 是 (0.2) 式的一个解, (x_0, T) 是一个孤立奇点, 若 $u(x, t)$ 在奇点附近满足

$$|\Delta u(x, t)|^2 \leq \frac{C}{T-t}, \quad (0.3)$$

则 (x_0, T) 称为第 1 类奇点, 否则 (x_0, T) 称为第 2 类奇点. 因为调和球面引起的奇点与 (0.2) 式不依赖于时间的解有关, 故第 2 类奇点存在. 文献[7] 中提出如下问题: 是否存在第 1 类奇点?

本文将证明若 (x_0, T) 是第 1 类奇点, 则 $u(x, t)$ 的渐近行为与 (0.2) 式的满足某种能量条件的自相似解有关, 且满足能量条件的自相似解确实存在 (因此也称这类奇点为自相似奇点).

1 自相似解与能量条件

假定 $u(x, t) \in C^\infty(M \times [0, T), N)$ 是 (0.2) 式的解, (x_0, T) 是一个第 1 类奇点. 取 x_0 附近的法坐标系. 设 $\rho < \text{inj}(M)$, $\varphi \in C_0^\infty(B_\rho)$ 是一个截断函数, 在 $B_{\rho/2}$ 上, $\varphi \equiv 1$. 令

$$\begin{aligned} G_{z_0}(x, t) &\doteq (4\pi(t_0 - t))^{-\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{|x - x_0|^2}{4(t_0 - t)}\right\}, \quad z_0 = (x_0, t_0), \\ S_R(z_0) &\doteq \{z = (x, t) \mid t = t_0 - R^2\}, \\ T_R(z_0) &\doteq \{z = (x, t) \mid t_0 - 4R^2 < t < t_0 - R^2\}; \\ \Phi_{z_0}(u, R) &\doteq \frac{1}{2} R^2 \int_{S_R(z_0)} |\Delta u|^2 G^{\varphi^2} \sqrt{|g|} dx, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\Psi_{z_0}(u, R) \doteq \frac{1}{2} \int_{T_R(z_0)} |\Delta u|^2 G^{\varphi^2} \sqrt{|g|} dx dt, \quad (1.2)$$

则有单调性不等式^[4]

$$\Phi_{z_0}(u, R) \leq e^{C(R_0 - R)} \Phi_{z_0}(u, R_0) + CE_0(R_0 - R), \quad (1.3)$$

$$\Psi_{z_0}(u, R) + e^{-CR_0} \int_R^{R_0} \frac{1}{8r} \int_{T_r(x_0, T)} L dr \leq e^{C(R_0 - R)} \Psi_{z_0}(u, R_0) + CE_0(R_0 - R), \quad (1.4)$$

其中 E_0 是 u_0 的能量, C 是一个只依赖于 M, N 的常数,

$$L \doteq \frac{|x \cdot \Delta u + 2t \partial_t u|^2}{|T - t|} G_{z_0} \varphi^2 \sqrt{|g|}.$$

因为当 $R \rightarrow 0$ 时, (1.4) 式的右边有界, 有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{T_r} L = 0. \quad (1.5)$$

令 $v_\lambda(x, t) = u(x_0 + \lambda x, T + \lambda^2 t)$, 则 $v_\lambda(x, t)$ 在 $B_{R/\lambda} \times [-R^2/\lambda^2, 0)$, $R < \min\{\rho, \sqrt{T}\}$ 上有定义, 且 v_λ 满足 (0.2) 式. 当 R 充分小时, 由 (0.3) 式可得

$$|\Delta v_\lambda|^2(x, t) = \lambda^2 |\Delta u|^2(x_0 + \lambda x, T + \lambda^2 t) \leq \frac{\lambda^2}{T - (T + \lambda^2 t)} = \frac{1}{|t|}, \quad (1.6)$$

因此对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $R > 0$, v_λ 在 $B_R \times [-R, -\varepsilon]$ 上有一致的 $C^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}$ 估计. 于是存在子列,

使得在 $C^2(B_R \times [-R, -\epsilon], N)$ 中, $v_{\lambda_i} \rightarrow v$. 注意到当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, $g_{ij}(x_0 + \lambda R) \rightarrow \delta_{ij}$. 于是由 (0.2) 式, $v \in C^2(R^m \times (-\infty, 0), N)$ 满足

$$v_t = \tau_0(v), \quad (1.7)$$

其中 $\tau_0(v) \triangleq \Delta v - A(v)(\Delta v, \Delta v)$ 是 R^m 上的张力场.

断言 $v \neq \text{常数}$. 否则存在 $\lambda > 0$, 使得

$$\Psi_{z_0}(u, \lambda R) < \epsilon_0,$$

而由 ϵ -正则性定理^[4], (x_0, T) 就不会是 u 的奇点, 与假定矛盾.

极限函数 $v(x, t)$ 不但满足 (1.7) 式而且具有特殊的形式. $\forall R > 0$, 有

$$\begin{aligned} & \int_{-4R^2}^{-R^2} \int_{B_R(0)} \frac{|x \circ \Delta v + 2t \partial_t v|^2}{|t|} G_0 dx dt = \\ & \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-4R^2}^{-R^2} \int_{B_R(0)} \frac{|x \circ \Delta v_\lambda + 2t \partial_t v_\lambda|^2}{|t|} G_0 \sqrt{|g|}(x_0 + \lambda x) \varphi^2(x_0 + \lambda x) dx dt = \\ & \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{T-4\lambda^2 R^2}^{T-\lambda^2 R^2} \int_{B_{\lambda R}(x_0)} \frac{|x \circ \Delta u + 2t \partial_t u|^2}{|T-t|} G_{z_0} \sqrt{|g|} \varphi^2 dx dt = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{T_{\lambda R}(z_0)} L = 0. \end{aligned}$$

因此 v 必满足

$$2tv_t + x \circ \Delta v = 0, \quad \forall (x, t) \in R^m \times (-\infty, 0). \quad (1.8)$$

解此一阶线性偏微分方程, 考虑两种情形:

情形 1 $v_t \equiv 0$. 令 $y \in R^p \subset R^m$, $2 \leq p \leq m$, (1.8) 式变成

$$x \circ \Delta v = 0. \quad (1.9)$$

由双曲方程的理论知, (1.9) 式的 $m-1$ 个线性独立解都具有形式

$$v(x) = w(y / |y|).$$

因为 v 在 $x=0$ 不光滑, 不考虑这种解.

情形 2 $v_t \not\equiv 0$. 此时 (1.8) 式 m 个线性独立的解都呈形式

$$v(x, t) = w(y / \sqrt{-t}), \quad y \in R^p \subset R^m, \quad 1 \leq p \leq m.$$

因为假定 (x_0, T) 是一个孤立奇点, 考虑

$$v(x, t) = w(x / \sqrt{-t}). \quad (1.10)$$

把 (1.10) 式代入 (0.2) 式, 得到 w 的方程

$$\frac{1}{2} x \circ \Delta w - \Delta w = -A(w)(\Delta w, \Delta w). \quad (1.11)$$

除此之外, w 还必须满足一个能量条件. 取小的 $R > 0$, 固定 $t < 0$. 令 $r_i = \lambda_i R < \rho/2$, $t_i = T + \lambda_i^2 t + r_i^2$, $z_i = (x_0, t_i)$, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} R^{2-m} \int_{B_R(0)} |\Delta v_{\lambda_i}|^2 \sqrt{|g|}(x_0 + \lambda_i x) dx = \frac{1}{2} r_i^{2-m} \int_{B_{r_i}(x_0)} |\Delta u|^2(x, T + \lambda_i^2 t) \sqrt{|g|} dx = \\ & \frac{1}{2} r_i^{2-m} \int_{B_{r_i}(x_0)} |\Delta u|^2(x, t_i - r_i^2) \sqrt{|g|} dx \leq \\ & \frac{1}{2} (4\pi)^{\frac{m}{2}} e^{\frac{1}{4}} r_i^2 \int_{B_{r_i}(x_0)} |\Delta u|^2(x, t_i - r_i^2) G_{z_i}(t_i - r_i^2) \varphi^2 \sqrt{|g|} dx \leq C \Phi_{z_i}(u, r_i). \end{aligned} \quad (1.12)$$

文献[4]假定了(1.3)式在条件 $t_0 < T$ 下成立,事实上(1.3)式对 $t_0 - R^2 < T$ 是成立的. 取 $\bar{r}^2 = \min(T/2, \rho^2/2)$, 由(1.3)式可得

$$\Phi_i(u, r_i) \leq e^{Cr} \Phi_i(u, \bar{r}) + CE_0 \bar{r} \leq Ce^{Cr} \bar{r}^{2-m} E(u(t_i - \bar{r}^2)) + CE_0 \bar{r} \leq CE_0.$$

结合(1.12)式, 并令 $\lambda_i \rightarrow 0$, 则有

$$R^{2-m} \int_{B_R(0)} |\Delta v|^2(x, t) dx \leq C,$$

其中 C 只依赖于 M, N 和 u_0 . 把(1.10)式代入上述不等式, 则有

$$\left(R / \sqrt{|t|} \right)^{2-m} \int_{B_{R/\sqrt{|t|}}(0)} |\Delta w|^2(y) dy \leq C,$$

此不等式等价于(E):

$$R^{2-m} \int_{B_R(0)} |\Delta w|^2(y) dy \leq C, \quad \forall R > 0,$$

其中 C 是一个常数. 条件(E)称为 w 的能量条件. 由上述分析可得如下命题.

命题 1.1 若(0.2)式的解具有第 1 类奇点, 则(0.2)式存在自相似解 $v(x, t) = w\left(x/\sqrt{-t}\right)$, 其中 $w \in C^\infty(\mathbb{R}^m, N)$ 满足

$$\frac{1}{2} x \circ \Delta w - \Delta w = -A(w)(\Delta w, \Delta w) \quad (1.13)$$

以及能量条件(E).

把(1.13)式写为

$$-e^{|y|^2/4} \Delta \circ (\bar{e}^{|y|^2/4} \Delta w) = -A(w)(\Delta w, \Delta w), \quad (1.14)$$

它是能量泛函

$$E(w) = \int_{\mathbb{R}^m} |\Delta w|^2 e^{-|y|^2/4} dy$$

从退化流形 $(\mathbb{R}^m, e^{-|y|^2/2(m-2)} dy)$ 到 (N, h) 的 Euler-Lagrange 方程, 于是 w 可视为从流形 $(\mathbb{R}^m, e^{-|y|^2/2(m-2)} dy)$ 到 (N, h) 的调和映射. 因为因子 $e^{-|y|^2/4}$ 的作用, (1.14)式的解可以在无穷远处变化得很快, 还不知道如何对此运用变分理论.

2 约化方程与约化能量条件

本节考虑(1.13)式在靶流形 $N = S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ 时的球对称解. 利用常微分方程定性理论, 可以证明(1.13)式存在无穷多个满足能量条件(E)的解. 当 $N = S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ 时, 方程(1.13)化为

$$\frac{1}{2} x \circ \Delta w - \Delta w = w |\Delta w|^2, \quad (2.1)$$

其中 $w \in C^\infty(\mathbb{R}^m, S^m)$. 令

$$w(x) = \left[\frac{x}{r} \sinh(r), \cosh(r) \right], \quad (2.2)$$

此处 $r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^m$. 由(2.1)式得到关于 h 的约化方程

$$h'' + \left(\frac{m-1}{r} - \frac{r}{2} \right) h' - \frac{m-1}{2r^2} \sin 2h = 0,$$

而能量条件约化为

$$R^{2-m} \int_0^R \left(|h'|^2 + \frac{m-1}{r^2} \sin^2 h \right) r^{m-1} dr \leq C, \quad \forall R > 0.$$

当 $m \geq 3$ 时, 它等价于(e):

$$R^{2-m} \int_0^R |h'|^2 r^{m-1} dr \leq C.$$

考虑问题

$$Lh := h'' + \left(\frac{m-1}{r} - \frac{r}{2} \right) h' - \frac{m-1}{2r^2} \sin 2h = 0, \quad (2.3)$$

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = a > 0, \quad (2.4)$$

这是在 $r=0$ 带奇性的常微分方程的初值问题. 首先给出(2.3)和(2.4)式解的定义.

定义 若 $h(r) \in C^1[0, +\infty) \cap C^\infty(0, +\infty)$ 满足(2.3)和(2.4)式, 则 $h(r)$ 称为(2.3)和(2.4)式的一个解.

有时把(2.3)和(2.4)式的解记为 $h(r, a)$ 以强调解对初值 a 的依赖性. 令 $h(r) = h_1(ar)$, 则(2.3)和(2.4)式化为

$$L_{ah_1} := h_1'' + \left(\frac{m-1}{r} - \frac{r}{2a^2} \right) h_1' - \frac{m-1}{2r^2} \sin 2h_1 = 0, \quad (2.5)$$

$$h_1(0) = 0, \quad h_1'(0) = 1, \quad (2.6)$$

(2.3)和(2.4)式等价于(2.5)和(2.6)式(将随意使用(2.3)和(2.4)式或(2.5)和(2.6)式).

第4节中将证明(2.3)和(2.4)式解的存在性与唯一性, 然后利用定性分析方法, 在第5节中证明(2.3)和(2.4)式存在无穷多个满足能量条件的解.

3 极大值原理与一些导出结论

下面两个极大值定理是本文证明的基础:

定理 A 设 $u(x)$ 在区间 (a, b) 中满足微分不等式

$$u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0, \quad (3.1)$$

且 $h(x) \leq 0$, 又设 g 和 h 在每个闭子区间内有界, 若 u 在某内点 c 取到非负极大值, 则 $u(x) \equiv M$.

定理 B 设 u 是微分不等式(3.1)的非常值解, 在 a 和 b 有单边导数. 假定 $h(x) \leq 0$, g 和 h 在 (a, b) 的每个闭子区间内有界. 如果 u 在 a 有非负极大值, 函数 $g(x) + (x-a)h(x)$ 在 $x=a$ 下有界, 则 $u'(a) < 0$. 如果 u 在 b 有非负极大值, 函数 $g(x) - (b-x)h(x)$ 在 $x=b$ 上有界, 则 $u'(b) > 0$.

定义算子

$$L_1 \psi := \psi' + \left(\frac{m-1}{r} - \frac{r}{2} \right) \psi - \frac{m-1}{r^2} a(r) \psi$$

其中 $a(r) \in C^\infty[0, \infty)$, $|a(r)| \leq 1$.

命题 3.1 令 $B^2 = \frac{(3m-1)^2}{4(m-1)}$, 则 $\psi = r^2 - B^2$ 在 $(B, +\infty)$ 内满足 $L_1 \psi \leq 0$ 和 $\psi > 0$.

证 因为

$$\psi' + \left(\frac{m-1}{r} - \frac{r}{2} \right) \psi + \frac{m-1}{r^2} \psi = 2 + \left(\frac{m-1}{r} - \frac{r}{2} \right) 2r + \frac{m-1}{r^2} (r^2 - B^2) = \\ (3m-1) - (r^2 + B^2(m-1)r^{-2}) \leq 3m-1 - 2\sqrt{B^2(m-1)} = 0,$$

故有

$$L_1 \psi \leq -\frac{m-1}{r^2} (1 + a(r)) \psi \leq 0, \quad \forall r \in (B, +\infty).$$

命题 3.2 若 h_1 和 h_2 是两个 C^2 函数, 在 $(B, +\infty)$ 内满足 $L(h_1) \geq 0$ 和 $L(h_2) = 0$, 则 h_1 在 $(B, +\infty)$ 上与 h_2 至多在两个点相等, 除非 $h_1 \equiv h_2$.

证 令 $f \equiv h_1 - h_2$, 则 f 满足 $L_1(f) \geq 0$, 其中 $a(r) = \int_0^1 \cos 2(\theta h_1 + (1-\theta)h_2) d\theta$. 令 $f = \varphi \psi$ 其中 ψ 是命题 3.1 所给出的函数. 于是

$$L_1(\varphi \psi) = \psi \left\{ \varphi'' + \left(\frac{m-1}{r} - \frac{r}{2} + 2 \frac{\psi'}{\psi} \right) \varphi' + \frac{1}{\psi} (L_1 \psi) \varphi \right\}.$$

因为 $L_1(\varphi \psi) \geq 0$, $\psi > 0$, 有

$$\varphi'' + \left(\frac{m-1}{r} - \frac{r}{2} + 2 \frac{\psi'}{\psi} \right) \varphi' + \frac{1}{\psi} (L_1 \psi) \varphi \geq 0, \quad \forall r \in (B, +\infty).$$

又因为 $\frac{1}{\psi} (L_1 \psi) \leq 0$, 由定理 A, φ 不能在 $(B, +\infty)$ 的任何开区间内取到非负极大值 M , 除非 $\varphi \equiv M$. 若 $\varphi \equiv M > 0$, 则 $f = M \psi > 0$; 若 $\varphi \equiv 0$, 则 $f \equiv 0$. 假定 f 有两个零点 $r_1 < r_2$, 并满足在 (r_1, r_2) 内 $f \geq 0$, 那么 φ 在 (r_1, r_2) 上满足 $\varphi(r_1) = \varphi(r_2) = 0$, $\varphi \geq 0$. 而这与极大值原理矛盾. 因此 f 在 $(B, +\infty)$ 内不能有 3 个零点, 而且在两个可能的零点间 $f < 0$, 除非 $f \equiv 0$.

推论 3.1 假定 h 是 (2.3) 式的一个非平凡解, 即 $L(h) = 0$ 且 $h \neq \text{常数}$, 则 h 在 $(B, +\infty)$ 内与 $k\pi/2 (k \in \mathbb{Z})$ 至多只有一个交点.

证 假定 h 与 $k\pi/2$ 交两次. 因为 $h_1 = k\pi/2$ 和 $h_2 = h$ 是 (2.3) 式的两个解, 由命题 3.2, 在两个零点间 $h_1 - h_2 < 0$. 另一方面, $(-h_1)$ 和 $(-h_2)$ 也是 (2.3) 式的解, 所以在两个零点间必有 $(-h_1) - (-h_2) < 0$. 而这与 $h_1 - h_2 < 0$ 矛盾. 因此假设不成立.

以下证明 (2.3) 和 (2.4) 式解的唯一性.

定理 3.1 假定 h_1 和 h_2 是 (2.3) 和 (2.4) 式具有同样初值的解, 则在 $[0, +\infty)$ 上 $h_1 \equiv h_2$.

证 取 $R_0 > 0$, 使得在 $(0, R_0)$ 上, $|h_1|, |h_2| \leq \pi/8$. 令 $f \equiv h_1 - h_2$, 则 $L_1(f) = 0$, 其中

$$a(r) = \int_0^1 \cos 2(\theta h_1 + (1-\theta)h_2) d\theta \geq 0, \quad \text{且有 } f(0) = 0, f'(0) = 0. \quad \text{因为}$$

$$r \left(-\frac{m-1}{r^2} a(r) \right) + \frac{m-1}{r} - \frac{r}{2} = \frac{m-1}{r} (1 - a(r)) - \frac{r}{2}$$

在 $r=0$ 有下界. 由定理 B, 若 f 不恒为常数, 则 f 只能在 $r=0$ 或 $r=R_0$ 取到它的非负极大值和/或非正极大值. 若 f 在 $r=0$ 取到非负极大值, 则有 $f'(0) < 0$; 若 f 在 $r=0$ 取到非正极大值, 则 $f'(0) > 0$. 由与条件 $f'(0) = 0$ 的矛盾表明在 $(0, R_0)$ 上 f 恒为常数. 利用常微分方程解的唯一性定理 (或见定理 4.1), 就可知 $h_1 \equiv h_2$.

命题 3.3 假定 h 是 (2.3) 和 (2.4) 式的解, 则存在 $r_0 < +\infty$, 使得 $h(r_0) = \pi/2$, 且在区间 $(0, r_0]$ 上 $h(r)$ 从 0 单调递增至 $\pi/2$.

证 首先由极大值原理知 $h(r)$ 在 $(0, r_0)$ 内不能取到最大值, 且 $h(r)$ 在 $(0, r_0)$ 内单调递增. 其次证明在某点 $r_0 < +\infty$ 有 $h(r_0) = \pi/2$. 否则有 $0 < h(r) < \pi/2$, $h'(r) \geq 0$, $\forall r \in (0, +\infty)$. 由方程 (2.3), 当 $r \in (\sqrt{2(m-1)}, +\infty)$ 时, 有

$$h''(r) = \left[\frac{r}{2} - \frac{m-1}{r} \right] h' + \frac{m-1}{2r^2} \sin 2h \geq 0,$$

这表明 $h'(r)$ 在 $(\sqrt{2(m-1)}, +\infty)$ 内单调递增. 若在 $(\sqrt{2(m-1)}, +\infty)$ 内 $h'(r) \equiv 0$, 则由定理 3.1 有 $h(r) \equiv 0$, 但这与 $h'(0) > 0$ 矛盾. 因此存在 $r_0 \in (\sqrt{2(m-1)}, +\infty)$, 使得 $h'(r) \geq h'(r_0) > 0$, $\forall r \in (r_0, +\infty)$, 可这与假定 $0 < h(r) < \pi/2$ ($\forall r \in (0, +\infty)$) 矛盾. 所以必存在一点 $r_0 < +\infty$, 使得 $h(r_0) = \pi/2$.

4 自相似解的存在性

首先找一对 (2.3) 和 (2.4) 式在 $r=0$ 附近的上下解, 然后由第 3 节的极大值原理找到 $r=0$ 附近的局部解. 由常微分方程解的存在与唯一性定理, 就可以把局部解延拓到整个区间 $[0, +\infty)$.

本节中假定 $m \geq 2$.

引理 4.1 $\forall a > 0$, $h(r) = a(r+r^2)$ 是 L 在 $(0, \hat{r}_1)$ 上的下解, 即在 $(0, \hat{r}_1)$ 内 $Lh \geq 0$, 其中 $\hat{r}_1 = (-1 + \sqrt{1+16(m+1)})/4 > 1$.

证 $\forall r \in (0, \hat{r}_1)$, 有 $m+1 \geq r(1+2r)/2$, 于是

$$2 + \left[\frac{m-1}{r} - \frac{r}{2} \right] (1+2r) \geq \frac{m-1}{r} (1+r) \geq \frac{m-1}{r} (1+r) \frac{\sin 2a(r+r^2)}{2a(r+r^2)}.$$

所以

$$L(h) = a \left\{ 2 + \left[\frac{m-1}{r} - \frac{r}{2} \right] (1+2r) - \frac{m-1}{2r^2} \frac{\sin 2a(r+r^2)}{a} \right\} \geq 0.$$

定义算子

$$\bar{L}h := h'' + \frac{m-1}{r} h' - \frac{m-1}{2r^2} \sin 2h.$$

引理 4.2 令 $\delta \in (0, 1]$, 则 $\forall a > 0$, $\bar{h} = a \left[\log(1+r) + \frac{1-\delta}{2} r^2 \right]$ 是 L 在 $(0, \hat{r}_2)$ 内的一个上解, 其中 $\hat{r}_2$ 是一个只依赖于 m, a, δ 的常数.

证 只需计算 $\lim_{r \rightarrow 0} L\bar{h}(r)$. 把 $L\bar{h}(r)$ 在 $r=0$ 展开, 当 $r \rightarrow 0$ 时, 有

$$\bar{h}' = a(1 - \delta + o(r)), \quad \bar{h}'' = a(-\delta + 2r + o(r)),$$

以及

$$\sin 2\bar{h} = (2\bar{h}) - \frac{1}{6} (2\bar{h})^3 + o(\bar{h}^3) = 2a \left[r - \frac{\delta}{2} r^2 \right] + o(r^2).$$

于是当 $r \rightarrow 0$ 时,

$$L\bar{h}(r) = a(-\delta + 2r + o(r)) + a \frac{m-1}{r} (1 - \delta + o(r)) - \frac{m-1}{2r^2} 2a \left[r - \frac{\delta}{2} r^2 + o(r^2) \right] =$$

$$-a\delta\left(1+\frac{m-1}{2}\right)+o(1),$$

即

$$\lim_{r \rightarrow 0} Lh(r) = \frac{-a\delta(m+1)}{2} < 0.$$

注 4.1 因为 $\bar{h}'(r) > 0$, 故有 $Lh(r) \leq -r\bar{h}'/2 < 0, \forall r \in (0, \hat{r}_2)$, 因此 $\bar{h}$ 是 L 在 $(0, \hat{r}_2)$ 上的一个上解.

定理 4.1 对任意 $R_0 > 0$, (2.3) 式在 $[R_0, +\infty)$ 上存在唯一的光滑解满足初始条件: $h(R_0) = \alpha, h'(R_0) = \beta$. 进一步, 在任意区间 $[R_0, R]$ 上, $h(r)$ 满足

$$|h(r)| + |h'(r)| \leq (|h(R_0)| + |h'(R_0)|)e^{k(R-R_0)},$$

其中 $k = 1 + \frac{R}{2} + \frac{m-1}{R_0} + \frac{m-1}{R_0^2}$.

证 类似文献[9]中定理 4.1 与 2.1 的证明.

定理 4.2 对任意 $a > 0$, (2.3) 和 (2.4) 式存在唯一解.

证 由定理 3.1, 只需证明存在性. 对任意 $a > 0$ 取 $\bar{h}(r) = a \log(1+r)$ 和 $\underline{h}(r) = a(r+r^2)$. 取 $R_0 = R_0(m, a)$, 使得在 $(0, R_0]$ 内有 (i) $Lh(r) \leq 0$, (ii) $L\underline{h}(r) \geq 0$, (iii) $0 < \bar{h}(r), \underline{h}(r) < \pi/8$. 设 $r_n = R_0/2^n (n=1, 2, \dots)$, 由极大值原理可知在 $(0, R_0]$ 内: $\bar{h}(r) < \underline{h}(r), \bar{h}'(r) < \underline{h}'(r)$. 取

$$\alpha_n = \frac{1}{2}(\bar{h} + \underline{h})(r_n), \quad \beta_n = \frac{1}{2}(\bar{h}' + \underline{h}')(r_n).$$

考虑初值问题

$$Lh_n = h_n'' + \left(\frac{m-1}{r} - \frac{r}{2} \right) h_n' - \frac{m-1}{2r^2} \sin 2h_n = 0, \quad \forall r \in [r_n, R_0], \quad (4.1)$$

$$h_n(r_n) = \alpha_n, \quad h_n'(r_n) = \beta_n. \quad (4.2)$$

由定理 4.1, (4.1) 和 (4.2) 式存在唯一解 $h_n \in C^2[r_n, R_0]$. 进一步, 有估计

$$\bar{h}(r) < h_n(r) < \underline{h}(r), \quad (4.3)$$

$$\bar{h}'(r) < h_n'(r) < \underline{h}'(r), \quad \forall r \in (r_n, R_0]. \quad (4.4)$$

如果 (4.3) 和 (4.4) 式不对, 则存在 $T \in (r_n, R_0]$, 使得 $h_n(T)$ 是 $h_n(r)$ 与 $\bar{h}$ 或 $\underline{h}$ 相交的第 1 个点. 不失一般性, 可以假定 h_n 与 $\underline{h}$ 在 $r=T$ 第 1 次相交. 于是

$$h_n(T) = \underline{h}(T), \quad h_n'(T) \geq \underline{h}'(T). \quad (4.5)$$

$\forall r \in (r_n, T]$, 有 $0 < \bar{h}(r) < h_n(r) < \underline{h}(r) < \pi/8$. 令

$$f := \underline{h}(r) - h_n(r),$$

于是在区间 $[r_n, R_0]$ 上 f 满足 $L_1(f) \geq 0$, 其中 $a(r) = \int_0^1 \cos 2(\theta \underline{h} + (1-\theta)h_n) d\theta \geq 0$. 因为 $f(r_n) = \underline{h}(r_n) - h_n(r_n) > 0, f'(r_n) = \underline{h}'(r_n) - h_n'(r_n) > 0$, 由定理 B, f 只能在 $r=T$ 取到非负极大值, 且 $f'(T) > 0$, 但这与先前的假定 (4.5) 式矛盾. 因此, $\forall r \in (r_n, R_0]$, 有 $h_n(r) < \underline{h}(r), h_n'(r) < \underline{h}'(r)$. 同理有 $h_n(r) > \bar{h}(r), h_n'(r) > \bar{h}'(r), \forall r \in (r_n, R_0]$. 于是不等式 (4.3) 和 (4.4) 成立.

取 $\gamma_n(r) = (\bar{h}(r) + \underline{h}(r))/2, \forall r \in [0, r_n]$, 则 $\gamma_n(r)$ 与 $h_n(r)$ 在 $r=r_n$ 处 C^1 连接. 仍用 $h_n(r)$ 来表示 γ_n 与 h_n 合成的曲线, 于是 $h_n(r)$ 满足估计

$$0 \leq \bar{h}(r) \leq h_n(r) \leq \underline{h}(r), \quad (4.6)$$

$$0 \leq \bar{h}'(r) \leq h_n'(r) \leq \underline{h}'(r). \quad (4.7)$$

由 $\underline{h}$ 和 $\bar{h}$ 的定义, 得 $\|h_n\|_{C^1[0, R_0]} \leq M_1(a, R_0)$. 取固定的 $R \in (0, R_0)$, 注意到算子 L 的系数在 $[R, R_0]$ 内有界, 由方程 (2.3) 可得 $\|h_n\|_{C^2[R, R_0]} \leq M_2(a, R_0, m, R)$. 进一步可得 h_n 高阶导数的一致估计: $\|h_n\|_{C^N[R, R_0]} \leq M_3(a, R_0, R, m, N)$. 由 Arzela-Ascoli 定理, 存在子列 h_{n_i} 以及函数 $h \in C^2[R, R_0]$, 使得在 $C^2[R, R_0]$ 中, 有 $h_{n_i} \rightarrow h (r \rightarrow +\infty)$. 因为 R 是任意的, 就得到定义在 $(0, R_0]$ 上的一个 C^∞ 函数 $h(r)$, 它满足方程 (2.3).

定义 $h(0) = 0$, 由不等式 (4.6), h 在 $r = 0$ 是连续的, 并满足 $\bar{h}(r)/r \leq h(r)/r \leq \underline{h}(r)/r$, $\forall r \in (0, R_0]$. 于是, $\lim_{r \rightarrow 0^+} h(r)/r = \lim_{r \rightarrow 0^+} \bar{h}(r)/r = \lim_{r \rightarrow 0^+} \underline{h}(r)/r = a$, 即 $h'(0)$ 存在且 $h'(0) = a$. 又由不等式 (4.7), 有 $\bar{h}'(r) \leq h'(r) \leq \underline{h}'(r)$, $\forall r \in (0, R_0]$. 于是, $\lim_{r \rightarrow 0^+} h'(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \bar{h}'(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \underline{h}'(r) = a$, 这表明 $h'(r)$ 在 $r = 0$ 连续.

至此已证明了 (2.3) 和 (2.4) 式在 $[0, R_0]$ 上存在解 h , 其中 $h(r) \in C^1[0, R_0] \cap C^\infty(0, R_0]$. 由定理 4.1, $h(r)$ 能唯一延拓到整个区间 $[0, +\infty)$, 使得 $h(r)$ 是 (2.3) 和 (2.4) 式在 $[0, +\infty)$ 上的解.

以下定理是关于解对初值的依赖性的.

定理 4.3 假定 $h(r, a_0)$ 是 (2.3) 和 (2.4) 式的一个解, 则 $\forall R > 0, \forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(a_0, \epsilon, R)$, 使得当 $|a - a_0| < \delta$ 时,

$$\|h(\cdot, a) - h(\cdot, a_0)\|_{C^1[0, R]} \leq \epsilon. \quad (4.8)$$

证 取 $\hat{\delta}, 0 < \hat{\delta} < 1$, 注意到引理 4.1 和 4.2, 存在 $R_0 = R_0(a_0, \hat{\delta})$, 使得在区间 $(0, R_0)$ 内, 只要 $|a - a_0| < \hat{\delta}$, 则以下结论成立: (i) $\underline{h}(r) = a(r + r^2)$ 是 L 的下解; (ii) $\bar{h}(r) = a \log(1 + r)$ 是 L 的上解; (iii) $0 < \bar{h}(r) < \underline{h}(r) \leq \pi/8$.

首先证明 (4.8) 式在 $[0, R_0]$ 上成立. 只需证明 (4.8) 式对任意收敛到 a_0 的序列都成立. 假定 $|a_n - a_0| < \hat{\delta} (n = 1, 2, \dots)$, 不失一般性, 可进一步假定 $\{a_n\}$ 单调递减并收敛到 a_0 . 由比较定理, 对任意 $n = 1, 2, \dots$, 都有

$$a_0 \log(1 + r) < h(r, a_0) < h(r, a_{n+1}) < h(r, a_n) < a_n(r + r^2), \quad (4.9)$$

$$\frac{a_0}{1 + r} < h'(r, a_0) < h'(r, a_{n+1}) < h'(r, a_n) < a_n(1 + 2r), \quad (4.10)$$

其中 $r \in (0, R_0]$. 于是

$$|h(r, a_n) - h(r, a_0)| \leq a_n(r + r^2) - a_0 \log(1 + r),$$

$$|h'(r, a_n) - h'(r, a_0)| \leq a_n(1 + 2r) - \frac{a_0}{1 + r}, \quad \forall r \in (0, R_0).$$

于是, $\forall \epsilon > 0$, 存在 $N_1 > 0$ 和充分小的 r_0 , 使得 $\forall n > N_1$ 时, 有

$$\|h(\cdot, a_n) - h(\cdot, a_0)\|_{C^1[0, r_0]} \leq \epsilon/2. \quad (4.11)$$

从 (4.9) 和 (4.10) 式还可知 $h(r, a_n)$ 在 $C^1[0, R_0]$ 中一致有界, 因此 $\forall R_1, 0 < R_1 < R$, $h(r, a_n)$ 在 $C^3[R_1, R_0]$ 中一致有界. 对固定的 $r \in (0, R_0]$, 有

$$a_0 \log(1 + r) < \dots < h(r, a_{n+1}) < h(r, a_n) < \dots < h(r, a_1) < a_1(r + r^2),$$

此式表明 $h(r, a_n)$ 逐点收敛于一函数 $\tilde{h}(r)$. 由逐点收敛性和在 $C^3[R_1, R_0]$ 中的有界性, 可导出 $h_n(r)$ 在 $C^2[R_1, R_0]$ 中收敛于 $\tilde{h}(r)$. 又由 (4.9) 和 (4.10) 式, $\forall r \in (0, R_0)$ 有

$$a_0 \log(1+r) \leq \tilde{h}(r) \leq a_0(r+r^2), \quad \frac{a_0}{1+r} \leq \tilde{h}'(r) \leq a_0(1+2r).$$

这些不等式表明 $\tilde{h}(r)$ 是 (2.3) 和 (2.4) 式的一个解, 由定理 3.1, 可知 $h(r, a_0) \equiv \tilde{h}(r)$. 于是存在 $N_2 > 0$, 使得 $\forall n > N_2$ 时, 有

$$\|h(\cdot, a_n) - h(\cdot, a_0)\|_{C^1[r_0, R_0]} < \varepsilon/2. \quad (4.12)$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 结合 (4.11) 和 (4.12) 式, 得 $\forall n > N$,

$$\|h(\cdot, a_n) - h(\cdot, a_0)\|_{C^1[0, R_0]} < \varepsilon. \quad (4.13)$$

注意到方程 (2.3) 相应的方程组在 $[R_0, R]$ 内是 Lipschitz 连续的 (见定理 4.1), 于是由文献 [9] 和 (4.13) 式, 得 (4.8) 式.

5 满足能量条件 (e) 的自相似解的存在性

以下一系列引理刻画了 (2.3) 和 (2.4) 式解的行为.

引理 5.1 假定 h 满足方程 (2.3), 若存在 $\bar{r} > \sqrt{2(m-1)}$, 使得 $|h'(\bar{r})| > (m-1)/\bar{r}$, 则 $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(r) = \infty$.

证 方程 (2.3) 可重写为

$$(K(r)h'(r))' = \frac{m-1}{2r^2} \sin 2hK(r),$$

其中 $K(r) \doteq r^{m-1}e^{-\frac{r^2}{4}}$. 从 $\bar{r}$ 到 r 积分上式, 可得

$$K(r)h'(r) = K(\bar{r})h'(\bar{r}) + \int_{\bar{r}}^r \frac{m-1}{2t^2} \sin 2hK(t) dt.$$

注意到当 $\bar{r} > \sqrt{2(m-1)}$ 时, $K(\bar{r})$ 是 $K(r)$ 在 $[\bar{r}, +\infty)$ 中的极大值. 考虑两种情形:

情形 1 $h'(\bar{r}) > (m-1)/\bar{r}$. 此时有

$$K(r)h'(r) \geq K(\bar{r})h'(\bar{r}) - K(\bar{r}) \int_{\bar{r}}^{+\infty} \frac{m-1}{t^2} dt =$$

$$K(\bar{r}) \left[h'(\bar{r}) - \frac{m-1}{\bar{r}} \right] > 0, \quad \forall r \in (\bar{r}, +\infty).$$

于是

$$h'(r) \geq K(\bar{r}) \left[h'(\bar{r}) - \frac{m-1}{\bar{r}} \right] r^{-(m-1)} e^{\frac{r^2}{4}} \rightarrow +\infty \quad (r \rightarrow +\infty).$$

由此可知 $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(r) = +\infty$.

情形 2 $h'(\bar{r}) < -(m-1)/\bar{r}$. 类似情形 1 的证明, 有 $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(r) = -\infty$.

为了更好地揭示所考虑的量的本质, 把 (2.3) 式转化为标准的摆方程. 令 $\beta(t) = h(e^t) - \frac{\pi}{2}$, 则 $\beta'(t) = h'(e^t)e^t = h'(r)r$, (2.3) 式变为

$$\beta'' + \left[(m-2) - \frac{1}{2}e^{2t} \right] \beta' + (m-1) \sin \beta \cos \beta = 0, \quad \forall t \in (-\infty, +\infty). \quad (5.1)$$

(5.1)式也可写为方程组

$$\begin{cases} v = \beta', \\ v' = \left[\frac{1}{2}e^{2t} - (m-2) \right] v - (m-1)\sin\beta\cos\beta. \end{cases} \quad (5.2)$$

方程(5.1)是一个拥有质量 $m-1$ 和变化的摩擦项的摆方程. 令

$$E(t) \doteq E(v, \beta) \doteq \frac{1}{2}v^2(t) + \frac{1}{4}(m-1)(1 - \cos 2\beta),$$

它是摆的能量, 则有

$$E' = vv' + \frac{1}{4}(m-1)(\sin 2\beta 2\beta') = \left[\frac{1}{2}e^{2t} - (m-2) \right] v^2 = \frac{1}{2}D(t)v^2,$$

此处 $D(t) \doteq e^{2t} - 2(m-2)$. 从 t_0 到 t 积分, 可得

$$E(t) = E(t_0) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t D(\tau) v^2(\tau) d\tau,$$

或

$$\begin{aligned} v^2(t) + \frac{1}{2}(m-1)(1 - \cos 2\beta(t)) = \\ v^2(t_0) + \frac{1}{2}(m-1)(1 - \cos 2\beta(t_0)) + \int_{t_0}^t D(\tau) v^2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.3)$$

注 5.1 由(5.3)式可知 $\beta(t)$ 不能渐近于 $k\pi$ (k 是一个整数). 因此 $h(r)$ 不能渐近于 $(2k+1)\pi/2$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

引理 5.2 存在 $t_0 = t_0(m) > 0$, 使得若 $\beta(t)$ 在某点 $t_1 \in (t_0, +\infty)$ 满足

$$-\pi/2 \leq \beta(t_1) \leq -5\pi/12, \quad \beta'(t_1) > 0, \quad (5.4)$$

则存在另一点 $\bar{t} > t_0$, 使得 $v(\bar{t}) > m-1$.

证 取 $t_0 > \frac{1}{2} \log 2(m-1)$, 则 $\forall t > t_0$, 有 $D(t) > 0$. 在条件(5.4)式下, 可用与命题 3.3 同样的方式证明 $\beta(t)$ 单调递增到 0, 且在某点 t_3 取 0. 由(5.3)式, 对任意 $t > t_1$,

$$\begin{aligned} v^2(t) \geq \frac{1}{2}(m-1)(\cos 2\beta(t) - \cos 2\beta(t_1)) + \int_{t_1}^t D(\tau) v^2(\tau) d\tau \geq \\ \frac{1}{2}(m-1) \left[\cos 2\beta(t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right] + \int_{t_1}^t D(\tau) v^2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.5)$$

因为 $\beta(t)$ 从 t_1 单调递增到 t_3 , 取 t_2 , $t_1 < t_2 < t_3$, 使得 $\beta(t_2) = -\pi/3$, 于是

$$-1/2 = \cos 2\beta(t_2) \leq \cos 2\beta(t), \quad \forall t \in [t_2, t_3]. \quad (5.6)$$

$\forall t \in [t_2, t_3]$, 由(5.5)和(5.6)式有

$$v^2(t) \geq \frac{1}{4}(m-1)(\sqrt{3}-1) + \int_{t_1}^t D(\tau) v^2(\tau) d\tau \geq \frac{1}{4}(m-1)(\sqrt{3}-1) + \int_{t_2}^t D(\tau) v^2(\tau) d\tau.$$

令 $C_m = (m-1)(\sqrt{3}-1)/4$, 则

$$v^2(t) \geq C_m + \int_{t_2}^t D(\tau) v^2(\tau) d\tau \geq C_m + C_m \int_{t_2}^t D(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [t_2, t_3], \quad (5.7)$$

由此得

$$v^2(t_3) \geq C_m + C_m \int_{t_2}^{t_3} D(t) dt \geq C_m + C_m D(t_2)(t_3 - t_2) \geq C_m + C_m D(t_0)(t_3 - t_2). \quad (5.8)$$

如果存在 $\bar{t} \in [t_2, t_3]$, 使得 $v(\bar{t}) > m-1$, 则证毕. 否则 $\forall t \in [t_2, t_3]$, 都有 $v(t) \leq m-1$, 这表明在 $t \in [t_2, t_3]$ 内, 从 $(t_2, \beta(t_2))$ 出发, 斜率为 $m-1$ 的直线在 $\beta(t)$ 的上方. 因此 $t_3 - t_2$ 大于 t_2 与这条从 $(t_2, \beta(t_2))$ 出发的直线的 0 点 $(t^*, 0)$ 所对应的 t^* 的差的绝对值. 由 t_2 的选择, 可知

$$t_3 - t_2 \geq \frac{\pi}{3(m-1)},$$

代入 (5.8) 式, 则有

$$v^2(t_3) \geq C_m + C_m D(t_0) \frac{\pi}{3(m-1)}. \quad (5.9)$$

取 $t_0 = t_0(m)$, 使得上式右边大于 $(m-1)^2$, 则 $v(t_3) > m-1$. 于是在 $\bar{t} = t_3$ 点, 就满足 $v(\bar{t}) > m-1$.

推论 5.1 存在 $r_0 = r_0(m) > 0$, 使得若 $h(r)$ 在某点 $r_1 \in (r_0, +\infty)$ 满足 $0 \leq h(r_1) \leq \pi/12$, $h'(r_1) > 0$, 则 $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(r) = +\infty$.

证 令 $r_0 = e^{t_0}$. 由变换 $h(e^t) = \beta(t) + \frac{\pi}{2}$, 有 $-\pi/2 \leq \beta(\log r_1) \leq -5\pi/12$, 以及 $\beta'(\log r_1) = h'(r_1)r_1 > 0$. 因为 $\log r_1 > \log r_0 = t_0$, 由引理 5.2, 存在 $\bar{t} > t_0$, 使得 $\beta'(\bar{t}) = v(\bar{t}) > m-1$. 于是 $h'(e^{\bar{t}})e^{\bar{t}} > m-1$. 令 $\bar{r} = e^{\bar{t}}$, 则 $\bar{r} > e^{t_0} > \sqrt{2(m-1)}$, $h'(\bar{r}) > (m-1)/\bar{r}$. 由引理 5.1, 有 $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(r) = +\infty$.

在 (r, h) -平面上定义两个区域:

$$E_+ := \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} [r_0, +\infty) \times \left[k\pi, k\pi + \frac{1}{12}\pi \right],$$

$$E_- := \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} [r_0, +\infty) \times \left[k\pi - \frac{1}{12}\pi, k\pi \right].$$

注意到方程 (2.3) 以 π 为周期. 因此由推论 5.1 知若曲线 $(r, h(r))$ 从下方进入 E_+ , 则 $r \rightarrow +\infty$ 时, $h(r)$ 趋于 $+\infty$. 又因为 $-h$ 也满足方程 (2.3), 同理, 若 $(r, h(r))$ 从上方进入 E_- , 则当 $r \rightarrow +\infty$ 时, $h(r)$ 趋于 $-\infty$. 称 $E_+ \cup E_-$ 为逃逸区域 (简记为 E.D.), 若 $(r, h(r))$ 从下方进入 E_+ 或从上方进入 E_- , 则称 $h(r)$ 从逃逸方向进入 E.D.

引理 5.3 设 $h(r, a)$ 是 (2.3) 和 (2.4) 式的解, 则存在 $a_0 = a_0(m)$, 使得 $\forall a \in (0, a_0)$, 有 $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(r, a) = +\infty$, 且 $h(r, a)$ 与 $\pi/2$ 只交一次.

证 取 $R_1 = \max\{B, r_0\}$, 其中 r_0 见推论 5.1, B 见命题 3.1, 则由定理 4.3 知, 存在 $a_0 = a_0(m)$, 使得 $\forall a \in (0, a_0)$, $h(r, a)$ 进入区域 $[R_0, +\infty) \times (0, (12\pi)^{-1})$, 且 $h'(r) > 0$. 由 E.D. 区域定义知 $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(r) = +\infty$. 又由 R_1 的选择、推论 3.1 与命题 3.3 知 $h(r)$ 与 $\pi/2$ 只交一次.

为了导出以下引理, 需要把 (2.5) 和 (2.6) 式与以下调和映射方程进行比较:

$$Lh_2 = h_2'' + \frac{m-1}{r}h_2' - \frac{m-1}{2r^2}\sin 2h_2 = 0, \quad (5.10)$$

$$h_2(0) = 0, \quad h_2'(0) = 1. \quad (5.11)$$

令 $\beta_1(t) = h_1(e^t) - \frac{\pi}{2}$, 则 $v_1(t) \doteq \beta_1'(t) = h_1'(e^t)e^t = h_1'(r)r$. 方程 (2.5) 变为

$$\beta_1'' + \left[(m-2) - \frac{1}{2a^2}e^{2t} \right] \beta_1' + (m-1)\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0. \quad (5.12)$$

如同 (5.3) 式, 有关于摆的能量等式

$$v_1^2(t) + \frac{1}{2}(m-1)(1 - \cos 2\beta_1(t)) = v_1^2(t_0) + \frac{1}{2}(m-1)(1 - \cos 2\beta_1(t_0)) + \int_{t_0}^t D_a(\tau) v_1^2(\tau) d\tau, \quad (5.13)$$

其中 $D_a(t) = \frac{1}{a^2}e^{2t} - 2(m-2)$. 由 (5.13) 式知能量 $E_1(t) \doteq v_1^2(t) + \frac{1}{2}(m-1)(1 - \cos 2\beta_1(t))$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\log 2a^2(m-2)\right)$ 内是衰减的. 固定 $t \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\log 2a^2(m-2)\right)$, 令 $t_0 \rightarrow -\infty$, 则

$$v_1^2(t) \leq m-1. \quad (5.14)$$

于是 h_1 满足

$$|h_1'(r)r| \leq \sqrt{m-1}, \quad \forall r \in [0, a\sqrt{2(m-2)}]. \quad (5.15)$$

熟知当 $m \geq 3$ 时, h_2 渐近于 $\pi/2$. 于是 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $r_1 = r_1(m, \varepsilon)$, 使得当 $r \geq r_1$ 时, 有

$$\left| h_2(r_1) - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |r_1 h_2'(r_1)| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (5.16)$$

令 $f(r) \doteq h_1(r) - h_2(r)$, $F(r) \doteq h_1'(r)r$.

引理 5.4 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $r_0 = r_0(m, \varepsilon)$, $a_1 = a_1(m, \varepsilon)$, 使得 $\forall a > a_1$, $\forall r \in [r_0, r_1]$,

$$|f(r)| + |rf'(r)| \leq 2\varepsilon. \quad (5.17)$$

证 首先给出 f 在 $r=0$ 附近的估计, 有

$$L_a(r) = \left[\frac{m-1}{r} - \frac{r}{2a^2} \right] - \frac{m-1}{2r^2} \sin 2r = \left[\frac{m-1}{r} - \frac{r}{2a^2} \right] - \frac{m-1}{2r^2} \left(2r - \frac{4}{3}r^3 + o(r^3) \right) = \left[\frac{2}{3}(m-1) - \frac{1}{2a^2} \right] r + o(r^3) > \left[\frac{2}{3}(m-1) - \frac{1}{2} \right] r + o(r^3) \quad (a > 1).$$

于是存在 $\hat{r}_1 = \hat{r}_1(m)$, 使得 $\forall a > 1$, r 是 L_a 在 $(0, \hat{r}_1)$ 上的下解.

在引理 4.2 中取 $\delta = \delta(m, \varepsilon)$, 使得

$$0 < \delta \left(1 + \frac{2}{m-2} \right) r_1^{\frac{m-1}{m-2}} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (5.18)$$

则 $\bar{h}(r) = \log(1+r) + \frac{1-\delta}{2}r^2$ 是 L 在 $(0, \hat{r}_2)$ 中的上解, 其中 $\hat{r}_2 = \hat{r}_2(m, \delta) = \hat{r}_2(m, \varepsilon)$. 取 $\hat{r} = \min\{\pi/4, \hat{r}_2(m, \varepsilon), \hat{r}_1\}$, 则 $\hat{r}$ 只依赖于 m, ε . 由比较定理可得

$$h_1(r) < r \leq \pi/4, \quad h_1'(r) < 1, \quad \forall r \in (0, \hat{r}). \quad (5.19)$$

因为 $h_1(r) \leq \pi/4$, 由命题 3.3 有 $h_1'(r) > 0$. 因此 h_1 满足

$$Lh_1 = \frac{r}{2a^2}h_1'(r) > 0, \quad \forall r \in (0, \hat{r}).$$

h_1 和 $\bar{h}$ 分别是 L 的下和上解. 由比较定理有

$$\log(1+r) + \frac{1-\delta}{2}r^2 < h_2(r) < h_1(r);$$

$$\frac{1}{1+r} + (1-\delta)r < h'_2(r) < h'_1(r), \quad \forall r \in (0, \hat{r}). \quad (5.20)$$

结合 (5.19) 和 (5.20) 式, 可得

$$|f(r)| = |h_1(r) - h_2(r)| \leq \left| r - \left[\log(1+r) + \frac{1-\delta}{2}r^2 \right] \right|,$$

$$|f'(r)| = |h'_1(r) - h'_2(r)| \leq \left| 1 - \left[\frac{1}{1+r} + (1-\delta)r \right] \right|.$$

特别取 $r_0 \in (0, \hat{r})$,

$$|f(r_0)| \leq \left| r_0 - \left[\log(1+r_0) + \frac{1-\delta}{2}r_0^2 \right] \right|, \quad |f'(r_0)| \leq \left| \frac{r_0}{1+r_0} - (1-\delta)r_0 \right|, \quad (5.21)$$

其中 r_0 将在以后给出.

至此, 得到了 f 在 $r=0$ 附近的估计.

(2.5) 式减去 (5.10) 式, 则有

$$f'' + \frac{m-1}{r}f' - \frac{m-1}{r^2}a(r)f = \frac{1}{2a^2}F(r), \quad (5.22)$$

其中 $a(r) = \int_0^1 \cos 2(\theta h_1 + (1-\theta)h_2) d\theta$, $|a(r)| \leq 1$. (5.22) 式乘上 r^{m-1} 并从 r_0 到 r 积分, 有

$$r^{m-1}f'(r) = r_0^{m-1}f'(r_0) + \int_{r_0}^r \left[\frac{1}{2a^2}F(\tau)\tau^{m-1} + (m-1)a(\tau)\tau^{m-3}f \right] d\tau.$$

由 (5.15) 式和 $F(r)$ 的定义有

$$|f'(r)| \leq \left[\frac{r_0}{r} \right]^{m-1} |f'(r_0)| + \frac{\sqrt{m-1}}{2a^2 r^{m-1}} \int_{r_0}^r \tau^{m-1} d\tau + \frac{m-1}{\tau^{m-1}} \int_{r_0}^r |f(\tau)| \tau^{m-3} d\tau, \quad (5.23)$$

再次从 r_0 到 r 积分, 则得

$$|f(r)| \leq |f(r_0)| + |f'(r_0)| r_0^{m-1} \int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{\tau^{m-1}} d\tau +$$

$$\frac{C_m}{a^2} r^2 + (m-1) \int_{r_0}^r \frac{1}{t^{m-1}} dt \int_{r_0}^t |f(\tau)| \tau^{m-3} d\tau =$$

$$|f(r_0)| + |f'(r_0)| r_0 \frac{1}{m-2} + \frac{C_m}{a^2} r^2 + (m-1) \int_{r_0}^r |f(\tau)| \tau^{m-3} d\tau \int_{\tau}^r \frac{1}{t^{m-1}} dt \leq$$

$$|f(r_0)| + |f'(r_0)| r_0 \frac{1}{m-2} + \frac{C_m}{a^2} r_1^2 + \left[\frac{m-1}{m-2} \right] \int_{r_0}^r \frac{|f(\tau)|}{\tau} d\tau.$$

由 Gronwall 不等式, $\forall r \in [r_0, r_1]$, 有

$$|f(r)| \leq \left\{ |f(r_0)| + |f'(r_0)| r_0 \frac{1}{m-2} + \frac{C_m}{a^2} r_1^2 \right\} e^{\int_{r_0}^r \frac{m-1}{m-2} \frac{1}{\tau} d\tau} \leq$$

$$\left\{ |f(r_0)| + |f'(r_0)| r_0 \frac{1}{m-2} + \frac{C_m}{a^2} r_1^2 \right\} \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{\frac{m-1}{m-2}}.$$

由 $\frac{m-1}{m-2} \leq 2 (m \geq 3)$ 可得

$$|f(r)| \leq \left\{ \frac{|f(r_0)|}{r_0^2} + \frac{1}{m-2} \frac{|f'(r_0)|}{r_0} + \frac{C_m r_1^2}{a^2 r_0^2} \right\} r_1^{\frac{m-1}{m-2}}.$$

注意到

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{|f(r_0)|}{r_0^2} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{|f'(r_0)|}{2r_0} \leq \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \left| \frac{1}{1+r_0} - (1-\delta) \right| \right) = \frac{\delta}{2},$$

取 $r_0 < \hat{r} = \hat{r}(m, \varepsilon)$, 使得

$$\max \left(\frac{|f(r_0)|}{r_0^2}, \frac{|f'(r_0)|}{2r_0} \right) < \delta$$

则有

$$|f(r)| \leq \left[\delta + \frac{2}{m-2} \delta + \frac{C_m r_1^2}{a^2 r_0^2} \right] r_1^{\frac{m-1}{m-2}}.$$

取 $a_1 = a_1(C_m, r_0, r_1, m) = a_1(m, \delta(m, \varepsilon)) = a_1(m, \varepsilon) > 1$, 使得 $\forall a > a_1$, 有

$$\frac{C_m}{a^2 r_0^2} r_1^{2+\frac{m-1}{m-2}} < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (5.24)$$

由(5.18)和(5.24)式, 有

$$|f(r)| < \varepsilon/2, \quad \forall r \in [r_0, r_1]. \quad (5.25)$$

而由(5.23)式, 对任意 $r \in [r_0, r_1]$, 有

$$|f'(r)| \leq |f'(r_0)| + \frac{C_m r}{a^2} + \frac{m-1}{m-2} \frac{1}{r} \frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$|rf'(r)| \leq |f'(r_0)| r_1 + \frac{C_m}{a^2} r_1^2 + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.26)$$

因为 $\lim_{r_0 \rightarrow 0} |f'(r_0)| = 0$, 可以选取更小的 r_0 和更大的 $a_1(m, \varepsilon)$, 使得(5.26)式的右边小于 $3\varepsilon/2$. 注意到(5.25)和(5.26)式, 引理得证.

推论 5.2 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $a_1 = a_1(m, \varepsilon)$, 使得 $\forall a > a_1$, 有

$$|\beta_1(t)| + |v_1(t)| \leq C\varepsilon, \quad \forall t \in \left[t_1, \frac{1}{2} \log 2a^2(m-2) \right], \quad (5.27)$$

其中 $t_1 = \log r_1$, C 是一个只依赖于 m 的常数.

证 由(5.17)式, $\forall a > a_1$, 有

$$|h_1(r_1) - h_2(r_1)| + |r_1 h'_1(r_1) - r_1 h'_2(r_1)| \leq 2\varepsilon,$$

而由(5.16)式, $\forall a > a_1$, 有

$$\left| h_1(r_1) - \frac{\pi}{2} \right| + |r_1 h'_1(r_1)| \leq \frac{5\varepsilon}{2},$$

即

$$|\beta_1(\log r_1)| + |v_1(\log r_1)| \leq 5\varepsilon/2.$$

令 $t_1 = \log r_1$, 则

$$|\beta_1(t_1)| + |v_1(t_1)| \leq 5\varepsilon/2.$$

注意到能量 $E_1(t)$ 在区间 $\left[-\infty, \frac{1}{2}\log 2a^2(m-2)\right]$ 上是衰减的, 以及 $|\beta_1(t)| < \frac{\pi}{2}$, 故 (5.27) 式成立.

引理 5.5 设 $3 \leq m \leq 6$, 对任意整数 n , 若 a 充分大, 则 (2.3) 和 (2.4) 式的解与 $\pi/2$ 至少相交 n 次.

$$\text{证 令 } \beta(t) = \beta_1(t)e^{\frac{1}{2}\int_t^{\infty} \left[(m-2) - \frac{1}{2a^2}e^{2t}\right] dt}, \text{ 则 (5.12) 式变为}$$

$$\beta_1 + G(t)\beta_1 = 0, \quad (5.28)$$

$$\text{其中 } G(t) = (m-1)\frac{\sin\beta_1\cos\beta_1}{\beta_1} - \frac{1}{4}(m-2)^2 - \frac{1}{16a^4}e^{4t} + \frac{m}{4a^2}e^{2t}. \text{ 由 } 3 \leq m \leq 6, \text{ 有}$$

$$(m-2)^2 - 4(m-1) < 0.$$

取 $\gamma, 0 < \gamma < 1$, 使得

$$(m-2)^2 - 4\gamma(m-1) < 0,$$

再取 $\Delta > 0$, 使得

$$(m-2)^2 - 4\gamma(m-1) + 4l^2 = 0. \quad (5.29)$$

固定 γ , 取 (5.27) 式中的 ε 充分小, 使得 $\forall a > a_1, \forall t \in \left[t_1, \frac{1}{2}\log 2a^2(m-2)\right]$,

$$\frac{\sin\beta_1(t)\cos\beta_1(t)}{\beta_1(t)} > \gamma,$$

其中, $a_1 = a_1(m, \gamma), t_1 = t_1(m, \gamma)$. 于是

$$G(t) > \gamma(m-1) - \frac{1}{4}(m-2)^2 - \frac{1}{16a^4}e^{4t} + \frac{m}{4a^2}e^{2t} = l^2 + \frac{1}{16a^4}e^{2t}[4a^2m - e^{2t}].$$

因此有

$$G(t) > l^2, \quad \forall t \in \left[t_1, \frac{1}{2}\log 2a^2(m-2)\right]. \quad (5.30)$$

把 (5.28) 式与方程 $u'' + l^2u = 0$ 比较, 此方程的解具周期 $2\pi/l$, 且在 $[t_1, +\infty)$ 内有无穷个零点. 由文献 [9] 和 (5.30) 式, 在区间 $\left[t_1, \frac{1}{2}\log 2a^2(m-2)\right]$ 内, u 的任两个连续零点间必有 $\beta(t)$ 的一个零点. 因为 t_1 不依赖于 a , 若 a 充分大, 则 β 可以有任意多个零点. 由于 $\beta_1(t)$ 与 β 有同样的零点, 且 β_1 的零点是 h 与 $\pi/2$ 的相交点, 这样就证明了引理.

注意到 $\forall a > 0, h(r, a)$ 不能与 $\pi/2$ 相切, 则由定理 4.3 易得

引理 5.6 设 $h(r, a_0)$ 是 (2.3) 和 (2.4) 式的解. 假定在 $R > 0$ 点, $h(R, a_0) - \frac{\pi}{2} \neq 0$, 则存在 a_0 的一个邻域 I_{a_0} , 使得 $\forall a \in I_{a_0}, h(r, a) - \frac{\pi}{2}$ 和 $h(r, a_0) - \frac{\pi}{2}$ 有同样多的零点.

定义

$$I_n := \left\{ a > 0 \mid h(r, a) - \frac{\pi}{2} \text{ 至多有 } n \text{ 个零点; } \lim_{r \rightarrow +\infty} h(r, a) = \infty \right\},$$

$$J_n := \left\{ a > 0 \mid h(r, a) - \frac{\pi}{2} \text{ 至少有 } n \text{ 个零点} \right\},$$

$$d_n := \sup I_n.$$

下面是本文的主要定理:

定理 5.1 设 $3 \leq m \leq 6$, 则

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, I_n 和 J_n 是非空集, 存在两个序列 $\{n_i\}$ 和 $\{l_i\}$, 满足: $1 = n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$, $1 = l_1 < l_2 < \dots < l_i < \dots$, 并有

$$J_{l_1} \supset \supset J_{l_2} \supset \supset \dots \supset \supset J_{l_i} \supset \supset J_{l_{i+1}} \supset \supset \dots,$$

$$I_{n_1} \subset \subset I_{n_2} \subset \subset \dots \subset \subset I_{n_i} \subset \subset I_{n_{i+1}} \subset \subset \dots$$

和

$$0 < d_{n_1} < d_{n_2} < \dots < d_{n_i} < \dots;$$

(ii) $\forall i \in \mathbb{N}$, $h(r, d_{n_i})$ 是 (2.3) 和 (2.4) 式满足能量条件 (e) 的解, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, 它趋于常数 D_{n_i} , 其中 $D_{n_i} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ (对任意整数 k).

证 按以下步骤证明:

步骤 1 $\forall n \in \mathbb{N}$, I_n 和 J_n 是非空集.

由引理 5.3, 存在 $a_0 = a_0(m) > 0$, 使得 $(0, a_0) \subset I_1$, 于是 I_n 非空, 且 $d_1 > a_0 > 0$. 由引理 5.5, 知当 $3 \leq m \leq 6$ 时, J_n 非空.

步骤 2 I_n 和 J_n 是开集.

由引理 5.6 可知 a 的小扰动不会减少 $h(r, a) - \frac{\pi}{2}$ 零点的个数, 因此 J_n 是开集.

令 $a_0 \in I_n$. 因为 $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(r, a_0) = \infty$, 可取 $R > B$, 使得 $|h(R, a_0)| = k\pi$, 其中 $k > 1$ 是某个整数. 由唯一性定理可知 $h'(R, a_0) \neq 0$, 选取 $R_2 > R_1$, 使得 $h(R_2, a_0)$ 从逃逸方向进入 E.D., 由引理 5.6 和定理 4.3 知存在 a_0 的邻域 I_{a_0} , 使得 $\forall a \in I_{a_0}$,

- i) $h(r, a) - \frac{\pi}{2}$ 和 $h(r, a_0) - \frac{\pi}{2}$ 在 $(0, R_2]$ 中有同样多的零点;
- ii) $|h(r, a)|$ 在 (B, R_2) 内与 $k\pi$ ($k > 1$) 相交;
- iii) $h(R_2, a)$ 从逃逸方向进入 E.D.

由 iii), 有 $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(r, a) = \infty$. 由 ii) 与推论 3.1, $h(r, a)$ 在 $[R_2, +\infty)$ 内, 不与 $\frac{\pi}{2}$ 相交. 因此由 i), $\forall a \in I_{a_0}$, $h(r, a)$ 在 $(0, +\infty)$ 内刚好有 n 个零点. 这表明 I_n 是开的.

步骤 3 由引理 5.5, 容易找到满足结论 (i) 的序列 $\{n_i\}$ 与 $\{l_i\}$. 由步骤 2 的结论与引理 5.6, 知 $0 < d_{n_i} < \infty$, $d_{n_i} \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. 因此 $h(r, d_{n_i})$ 有界. 由引理 5.1 有

$$|h'(r, d_{n_i})| \leq \frac{m-1}{r}, \quad \forall r > \sqrt{2(m-1)},$$

于是

$$\int_0^R |h'(r, d_{n_i})|^2 r^{m-1} dr \leq C(d_{n_i}) \int_0^R (m-1)^2 r^{m-3} dr \leq C(d_{n_i}) R^{m-2},$$

即 $h(r, d_{n_i})$ 满足能量条件 (e).

定理 5.2 假定 $3 \leq m \leq 6$, 则存在无穷多个 $R^m \rightarrow S^m$ 的光滑映射, 满足 (1.13) 式和能量条件 (E).

证 令

$$w_i(x) = \left[\frac{x}{r} \sinh(r, d_{n_i}), \cosh(r, d_{n_i}) \right],$$

其中 $r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^m$. 由

$$|\Delta w_i(x)|^2 = |h'(r, d_{n_i})|^2 + \frac{(m-1)\sin^2 h(r, d_{n_i})}{r^2},$$

$$h(r, d_{n_i}) \in C^1[0, +\infty) \cap C^\infty(0, +\infty),$$

知 $|\Delta w_i|^2$ 在 $x=0$ 附近有界. 由椭圆型方程的正则性理论, $w_i(x)$ 在 $x=0$ 附近光滑. 因此 $w_i (i=1, 2, \dots)$ 是 (1.13) 式的一族不同的光滑解, 且满足能量条件 (E).

致谢 本文是在 佛岳教授和导师张恭庆教授的指导和鼓励下完成的, 在此向他们表示深深的谢意. 同时感谢王友德副研究员给予作者的有益启发.

参 考 文 献

- 1 Eells J, Sampson J H. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer J Math*, 1964, 86: 109~160
- 2 Struwe M. On the evolution of harmonic maps of Riemann surfaces. *Comment Math Helv*, 1985, 60: 558~581
- 3 Chang K C, Ding W Y, Ye R. Finite-time blow-up of the heat flow of harmonic maps from surfaces. *J Diff Geom*, 1992, 36: 507~515
- 4 Chen Y, Struwe M. Existence and partial regularity results for the heat flow for harmonic maps. *Math Z*, 1989, 201: 83~103
- 5 Cheng X. Estimate of singular set of the evolution problem for harmonic maps. *J Diff Geom*, 1991, 34(1): 169~174
- 6 Coron J M, Ghidaglia J M. Explosion en temps fini pour le flot des applications harmoniques. *C R Acad Sci Paris, Serie I*, 1989, t 308: 339~344
- 7 Struwe M. The evolution of harmonic maps. In: *Proc Inter Congress Math Tokyo, 1990*. Tokyo: Springer, 1991. 1 197~1 203
- 8 Protter M H, Weinberger H F. *Maximum Principles in Differential Equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1984
- 9 Coddington E A, Levinson N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc, 1955