



Schwarzian 导数, 几何条件和 Q_K 空间

周继振

安徽理工大学理学院数学系, 淮南 232001

E-mail: hope189@163.com

收稿日期: 2011-10-09; 接受日期: 2012-04-16

国家自然科学基金 (批准号: 11071153) 资助项目

摘要 设 $\psi: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ 是一个单叶函数, 利用 Schwarzian 导数, 本文获得了 $\log \psi'$ 属于 Q_K 空间的一个充要条件. 此外, 本文运用了一个几何条件来刻画 Q_K 空间.

关键词 Q_K 空间 K -Carleson 测度 保形映射 Schwarzian 导数

MSC (2010) 主题分类 30D45, 30D50

1 引言

设 $\varphi_a(z) = (a - z)(1 - \bar{a}z)^{-1}$ 是单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ 上的一个 Möbius 变换. 用 $H(\mathbb{D})$ 表示所有在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上解析的函数集合.

定义 1.1 设 $0 \leq p < \infty$. 若函数 $f \in H(\mathbb{D})$ 且满足

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1 - |\varphi_a(z)|^2)^p dA(z) < \infty,$$

则称函数 f 属于 Q_p 空间, 这里 $dA(z)$ 是 $\mathbb{D}$ 上规范化的面积测度, 即 $A(\mathbb{D}) = 1$. 若函数 $f \in H(\mathbb{D})$ 且满足

$$\sup_{|a| \rightarrow 1} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1 - |\varphi_a(z)|^2)^p dA(z) = 0,$$

则称函数 f 属于 $Q_{p,0}$ 空间.

显然, $Q_{p,0}$ 空间是 Q_p 空间的一个子空间. 对于一般的 Q_p 空间理论, 可以参考 [1] 和 [2]. 有三种特殊的情形需要说明, 当 $p = 0$ 时, Q_p 空间就是 Dirichlet 空间; 当 $p = 1$ 时, Q_p 空间和 BMOA 是一致的; 当 $p > 1$ 时, Q_p 空间恰就是 $\mathcal{B}$ 空间, 其中

$$\mathcal{B} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |f'(z)| < \infty \right\}. \quad (1.1)$$

一个著名的结论是 f 属于 Q_p 空间当且仅当 $|f'(z)|^2 (1 - |z|^2)^p dA(z)$ 是一个 p -Carleson 测度.

单位圆盘上的解析函数 f 若是一一对应的, 则称 f 是单叶的, 用 $\mathcal{U}$ 表示所有的单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的单叶函数的集合. 如果 $\psi \in \mathcal{U}$ 和 $\Omega = \psi(\mathbb{D})$, 那么称 ψ 是一个从 $\mathbb{D}$ 到 Ω 的保形映射. 显然 Ω 是一个复平面上的单连通域. 如果 $f \in H(\mathbb{D})$ 且在 $\mathbb{D}$ 里每一点的某邻域内是单射, 那么称 f 是局部单叶的.

在本文中, ψ 代表一个保形映射并记 $g = \log(\psi')$. 定义

$$S\psi = \left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)^2$$

为局部单叶函数的 Schwarzian 导数. 下面的结论给出了局部单叶函数导数的对数与 Q_p 空间的关系.

定理 A ^[3] 如果 $0 < p < \infty$, 那么 $g = \log(\psi') \in Q_p$ 当且仅当 $|S\psi(z)|^2(1 - |z|^2)^{2+p}dA(z)$ 是一个 p -Carleson 测度.

设 Γ 是一个闭 Jordan 曲线. 对于 $\omega_1, \omega_2 \in \Gamma$, 记 $\Gamma(\omega_1, \omega_2)$ 表示 Γ 上连接 ω_1 和 ω_2 的最小直径弧段. 如果 ψ 是一个从 $\mathbb{D}$ 到 Γ 内域的一个保形映射, 则几何量

$$\eta(\delta) = \sup_{|\omega_1 - \omega_2| \leq \delta} \sup_{\omega \in \Gamma(\omega_1, \omega_2)} \left(\frac{|\omega_2 - \omega| + |\omega - \omega_1|}{|\omega_1 - \omega_2|} - 1 \right)^{1/2}, \quad 0 < \delta < 1,$$

与解析量

$$\beta(\delta) = \sup_{1-\delta \leq |\xi| < 1} (1 - |\xi|)|(\log \varphi')'(\xi)|, \quad 0 < \delta < 1,$$

有密切联系, 见 [4] 的定理 1.

定理 B ^[3] 设 $0 < p < 1$ 和 $\Gamma = \partial\psi(\mathbb{D})$ 是一个闭 Jordan 曲线, 其中 ψ 是单叶函数. 如果

$$\int_0^1 \frac{\eta^2(t)}{t^{2-p}} dt < \infty,$$

那么 $g = \log \psi' \in Q_{p,0}$.

本文证明了上述结论可以推广到单位圆盘上更广泛的解析函数空间 Q_K .

定义 1.2 设 $K : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是一个右连续的非递减函数. 若函数 $f \in H(\mathbb{D})$ 且满足

$$\|f\|_{Q_K}^2 = \sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 K(1 - |\varphi_a(z)|^2) dA(z) < \infty, \quad (1.2)$$

则称 f 属于 Q_K 空间. 若函数 $f \in H(\mathbb{D})$ 且满足

$$\sup_{|a| \rightarrow 1} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 K(1 - |\varphi_a(z)|^2) dA(z) = 0,$$

则称函数 f 属于 $Q_{K,0}$ 空间.

关于 Q_K 空间的一般理论, 我们推荐参考 [5] 和 [6]. 显然, Q_K 空间是 Möbius 不变的, 即对任意的 $a \in \mathbb{D}$, $\|f \circ \varphi_a\|_{Q_K} = \|f\|_{Q_K}$ 恒成立. 如果取 $K(t) = t^p, 0 \leq p < \infty$, 则 Q_K 空间就是 Q_p 空间. 根据 [5] 的相关结果, 可以获得

$$Q_K \subset \mathcal{B}.$$

本文中, 需要假设

$$\sup_{0 < s < 1} (1-s)^2 \int_0^1 \frac{K(1-r)}{(1-rs)^3} dr < \infty.$$

实际上, 上述条件不满足的话, 则 Q_K 空间仅含有常数, 即 Q_K 空间是平凡的, 见 [7].

参照文献 [6] 的考虑, 令

$$\varphi_K(s) = \sup_{0 \leq t \leq 1} K(st)/K(t), \quad 0 < s < \infty.$$

在不同的情况下, 本文需要假设 K 满足下面的一个或两个条件:

$$\int_0^1 \frac{\varphi_K(s)}{s} ds < \infty \quad (1.3)$$

和

$$\int_1^\infty \frac{\varphi_K(s)}{s^2} ds < \infty. \quad (1.4)$$

对任意的一个弧 $I \subset \partial\mathbb{D}$, 令 θ 是弧 I 的中点. 若弧长 $|I| \leq 1$, 则称

$$S(I) = \left\{ z \in \mathbb{D} : 1 - |I| < |z| < 1, |\theta - \arg z| < \frac{|I|}{2} \right\}$$

为 Carleson 方块; 若弧长 $|I| > 1$, 则令 Carleson 方块 $S(I) = \mathbb{D}$.

定义 1.3 设 $K : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是一个右连续的非递减函数, $d\mu$ 是 $\mathbb{D}$ 上的一个正测度. 若

$$\|\mu\|_K = \sup_{I \subset \partial\mathbb{D}} \int_{S(I)} K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) d\mu(z) < \infty, \quad (1.5)$$

则称 $d\mu$ 是 $\mathbb{D}$ 上的一个 K -Carleson 测度.

文献 [6] 的定理 1 表明 $f \in Q_K$ 当且仅当 $|f'(z)|^2 dA(z)$ 是一个 K -Carleson 测度.

本文中, 恒假设增函数 K 满足 $K(2t) \lesssim K(t)$, $0 < t < \infty$. 对于两个函数 K_1 和 K_2 , $K_1 \lesssim K_2$ 的意思是存在着一个常数 C , 独立于 K_1 和 K_2 , 使得 $K_1 \leq CK_2$. 在本文中, 称 K_1 和 K_2 是等价的, 即 $K_1 \approx K_2$ 的意思是 $K_2(t) \lesssim K_1(t) \lesssim K_2(t)$.

2 Schwarzian 导数

本节中, 我们将借助于 Schwarzian 导数来刻画 $g = \log \psi' \in Q_K$ 的特征. 为了证明的方便, 首先给出如下的引理.

引理 2.1 [6] 如果 K 满足条件 (1.3), 那么存在着一些充分小的常数 $c > 0$ 使得 $t^{-c}K(t)$ 是非递减的.

设 $n = 1, 2, \dots, 0 \leq j < 2^n$, 称集合,

$$Q_{n,j} = \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} : 1 - r < 2^{-n}, j2^{-n} \leq \frac{\theta}{2\pi} < (j+1)2^{-n} \right\}$$

为边长 $\ell(Q_{n,j}) = 2^{-n}$ 的二进 Carleson 方块, 称

$$T(Q_{n,j}) = \left\{ z \in Q_{n,j} : 1 - |z| \geq \frac{1}{2}\ell(Q_{n,j}) \right\}$$

为 $Q_{n,j}$ 的半顶.

设 ψ 是给定的一单叶函数. 对于固定的 δ 和 ϵ , 后面将给出如何选取的方法, 记

$$\mathcal{L} = \left\{ Q_{n,j} : \sup_{z \in T(Q_{n,j})} (1 - |z|^2)^2 |S\psi(z)| > \delta, n = 1, 2, \dots, 0 \leq j < 2^n \right\}$$

和

$$\mathcal{B} = \left\{ Q_{n,j} : Q_{n,j} \notin \mathcal{L} \text{ 和 } \sup_{z \in T(Q_{n,j})} (1 - |z|^2) |g'(z)| \geq \epsilon, n = 1, 2, \dots, 0 \leq j < 2^n \right\}.$$

设 Q 和 $\tilde{Q}$ 两个二进 Carleson 方块, 若满足 $Q \subset \tilde{Q}$ 和 $\ell(\tilde{Q}) = 2\ell(Q)$, 则称 $\tilde{Q}$ 是 Q 的父. 记

$$\mathfrak{M} = \left\{ Q : \tilde{Q} \in \mathcal{L} \text{ 或 } \ell(Q) = \frac{1}{2} \right\} \cap \{Q : Q \notin \mathcal{L}\}.$$

引理 2.2 设 $\delta \in (0, \epsilon^2/2)$ 和 $Q \in \mathcal{B} \setminus \mathfrak{M}$, 那么 $\tilde{Q} \in \mathcal{B}$.

引理 2.2 证明见文献 [3] 的引理 5. 运用引理 2.2 可以获得如下的结果:

引理 2.3 设 ϵ 和 δ 是两个正常数, 那么存在一个常数 C 满足

$$\sum_{Q_j \in \mathfrak{M}} K(\ell(Q_j)) \leq 2 + C \int_{\mathbb{D}} |S\psi(z)|^2 (1 - |z|^2)^2 K(1 - |z|^2) dA(z).$$

证明 设 $Q \in \mathfrak{M}$ 且 $\ell(Q) \neq \frac{1}{2}$, 那么 $\tilde{Q} \in \mathcal{L}$. 因而存在着一个 $z_0 \in T(\tilde{Q})$ 满足

$$(1 - |z_0|^2)^2 |S\psi(z_0)| > \delta.$$

根据文 [3] 的引理 4, 这儿存在着一个圆盘 $D_{z_0} = \{z \in \mathbb{D} : |z - z_0| \leq c(1 - |z_0|^2)\} \subset T(\tilde{Q})$ 使得

$$(1 - |z|^2)^2 |S\psi(z)| \geq \frac{\delta}{32}, \quad z \in D_{z_0},$$

这里 c 是一个独立于 z_0 常数. 这就给出了

$$\begin{aligned} K(\ell(Q)) &\leq \varphi_K\left(\frac{1}{2}\right) K(\ell(\tilde{Q})) \\ &\leq C \int_{D_{z_0}} \frac{K(1 - |z|^2)}{(1 - |z|^2)^2} dA(z) \\ &\leq C \int_{D_{z_0}} |S\psi(z)|^2 (1 - |z|^2)^2 K(1 - |z|^2) dA(z). \end{aligned}$$

因为半顶 $T(\tilde{Q})$ 最多出现两次且仅有两个方块 Q' 的边长为 $\ell(Q') = \frac{1}{2}$, 从而

$$\sum_{Q_j \in \mathfrak{M}} K(\ell(Q_j)) \leq 2 + C \int_{\mathbb{D}} |S\psi(z)|^2 (1 - |z|^2)^2 K(1 - |z|^2) dA(z).$$

证毕. □

对任意的点 $z, w \in \mathbb{D}$, 称

$$d(z, w) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |\varphi_w(z)|}{1 - |\varphi_w(z)|}$$

是点 z 和 w 之间的双曲距离. 显然, 双曲距离是 Möbius 不变的.

引理 2.4 (参见文献 [8, 第 404 页]) 给定 $\epsilon > 0$ 和整数 $n > 0$, 则存在着常数 $C = C(\epsilon)$ 和 $\delta_0 = \delta_0(\epsilon, n)$ 使得若二进 Carleson 方块 Q 满足条件:

$$\sup_{z \in T(Q)} (1 - |z|^2) |g'(z)| \geq \epsilon,$$

和

$$\sup_{z \in T(Q)} (1 - |z|^2)^2 |S\psi(z)| \leq \delta_0.$$

那么存在着一个双曲测地线 σ 使得

$$\sup_{z \in B(Q)} d(z, \sigma) < C,$$

其中

$$B(Q) = Q \cap \{1 - |z| \geq 2^{-n} \ell(Q)\} \cap \{(1 - |z|^2)|g'(z)| \geq \epsilon\}.$$

定理 2.5 如果非递减函数 K 满足条件 (1.3), 那么下列结论是等价的:

- (1) $g = \log \psi' \in Q_K$.
- (2) $|S\psi(z)|^2(1 - |z|^2)^2 dA(z)$ 是一个 K -Carleson 测度.

证明 首先假定 (1) 成立. 根据 [6, 定理 3.1] 和 [9, 定理 2] 可得 $d\mu(z) = |g'(z)|^2 dA(z)$ 和 $|g''(z)|^2(1 - |z|^2)^2 dA(z)$ 都是 K -Carleson 测度. 注意到 $Q_K \subset \mathcal{B}$, 对任意弧 $I \subset \partial\mathbb{D}$, 恒成立

$$\begin{aligned} & \int_{S(I)} |g'(z)|^4 (1 - |z|^2)^2 K\left(\frac{1 - |z|^2}{|I|}\right) dA(z) \\ & \leq \|f\|_{\mathcal{B}}^2 \int_{S(I)} |g'(z)|^2 K\left(\frac{1 - |z|^2}{|I|}\right) dA(z) \\ & \leq \|f\|_{\mathcal{B}}^2 \|\mu\|_K. \end{aligned}$$

上述估计和不等式

$$|S\psi(z)|^2 \leq 2\left(|g''(z)|^2 + \frac{1}{4}|g'(z)|^4\right), \quad z \in \mathbb{D},$$

给出了 $|S\psi(z)|^2(1 - |z|^2)^2 dA(z)$ 是一个 K -Carleson 测度.

下证相反的方向, 首先假设 (2) 成立. 因为 (1) 和 (2) 都是 Möbius 不变的, 所以只要证明

$$A = \int_{\mathbb{D}} |g'(z)|^2 K(1 - |z|^2) dA(z) < \infty. \quad (2.1)$$

令

$$B = \int_{\mathbb{D}} |g''(z)|^2 (1 - |z|^2)^2 K(1 - |z|^2) dA(z).$$

因为 $|g'(0)| \leq \|g\|_{\mathcal{B}} \leq 6$, 由 [9, 引理 7] 可得

$$A \leq C(B + 36).$$

又因 $S\psi = g'' - \frac{1}{2}(g')^2$, 从而

$$\begin{aligned} B & \leq 2 \int_{\mathbb{D}} |S\psi(z)|^2 (1 - |z|^2)^2 K(1 - |z|^2) dA(z) \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} |g'(z)|^4 (1 - |z|^2)^2 K(1 - |z|^2) dA(z). \end{aligned}$$

选取充分小的 $\epsilon > 0$ 使得 $\epsilon^2 C \leq 1$. 令 $U = \{z \in \mathbb{D} : (1 - |z|^2)|g'(z)| \leq \epsilon\}$. 则有

$$\int_U |g'(z)|^4 (1 - |z|^2)^2 K(1 - |z|^2) dA(z) \leq \epsilon^2 A \leq B + 36.$$

对于充分大的 n , 后面给出选取方法, 按照引理 2.4 给出的方法选择一个 $\delta_0(\epsilon, n)$, 再次令 $\delta = \min(\delta_0(\epsilon, n), \epsilon^2/2)$. 若令 $V = \{z \in \mathbb{D} : (1 - |z|^2)^2 |S\psi(z)| > \delta\}$, 那么

$$\int_V |g'(z)|^4 (1 - |z|^2)^2 K(1 - |z|^2) dA(z)$$

$$\leq \frac{6^4}{\delta^2} \int_V |S\psi(z)|^2 (1-|z|^2)^2 K(1-|z|^2) dA(z).$$

注意到 $\mathbb{D} \setminus (U \cup V) \subset \bigcup T(Q_j)$, 这里 $\{Q_j\} \in \mathcal{B}$. 上述估计给出

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D} \setminus (U \cup V)} |g'(z)|^4 (1-|z|^2)^2 K(1-|z|^2) dA(z) \\ & \leq 64 \sum_{Q_j \in \mathcal{B}} \int_{T(Q_j)} \frac{K(1-|z|^2)}{(1-|z|^2)^2} dA(z) \\ & \leq C' \sum_{Q_j \in \mathcal{B}} K(\ell(Q_j)) \\ & \leq C' \left(\sum_{Q_j \in \mathcal{B} \cap \mathfrak{M}} + \sum_{Q_j \in \mathcal{B} \setminus \mathfrak{M}} \right) K(\ell(Q_j)). \end{aligned}$$

引理 2.2 意味着对每一个方块 $Q_j \in \mathcal{B} \setminus \mathfrak{M}$, 这里存在一个 $Q_m \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{B}$ 满足 $Q_j \in D(Q_m)$, 这里

$$D(Q) = Q \setminus \bigcup \{Q' \subset Q : Q' \in \mathcal{L}\}.$$

所以

$$\sum_{Q_j \in \mathcal{B} \setminus \mathfrak{M}} K(\ell(Q_j)) \leq \sum_{Q_m \in \mathcal{B} \cap \mathfrak{M}} \sum_{Q_j \in \mathcal{B} \cap D(Q_m)} K(\ell(Q_j)). \quad (2.2)$$

我们断言: 如果 $Q \in \mathcal{B} \cap \mathfrak{M}$, 那么这里存在着一个常数 C 使得

$$\sum_{Q_j \in \mathcal{B} \cap D(Q)} K(\ell(Q_j)) \leq CK(\ell(Q)). \quad (2.3)$$

实际上, 对任意的 $k \geq 0$, 考虑

$$G_k = \{Q_j \in \mathcal{B} \cap D(Q) : 2^{-(k+1)n}\ell(Q) < \ell(Q_j) \leq 2^{-kn}\ell(Q)\}$$

和

$$I_{k,m}(Q) = \{Q_j \in \mathcal{B} \cap D(Q) : \ell(Q_j) = 2^{-(kn+m)}\ell(Q)\}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

给定一个二进 Carleson 方块 $Q \in \mathcal{B}$ 和 $m \leq n$, 根据引理 2.4, 这儿最多存在着 C (不依赖于 n) 个边长 $\ell(Q_j) = 2^{-m}\ell(Q)$ 的二进 Carleson 方块 $Q_j \in \mathcal{B} \cap D(Q)$. 对每一个 $k \in \mathbb{N}$, 这个估计和引理 2.1 给出了

$$\begin{aligned} \sum_{Q_j \in G_k(Q)} K(\ell(Q_j)) &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{Q_j \in I_{k,m}(Q)} K(\ell(Q_j)) \\ &\leq C \sum_{m=0}^{n-1} 2^{-mc} \sum_{Q_j \in I_{k,0}(Q)} K(\ell(Q_j)) \\ &\leq \frac{C2^c}{2^c - 1} \sum_{Q_j \in I_{k,0}(Q)} K(\ell(Q_j)). \end{aligned}$$

因为 C 和 c 都不依赖于 n , 可以选择一个充分大的 n 使得 $C2^{-nc} \leq 2^{-1}$. 类似于上面的估计可得

$$\sum_{Q_j \in I_{k,0}(Q)} K(\ell(Q_j)) \leq C2^{-nc} \sum_{Q_j \in I_{k-1,0}(Q)} K(\ell(Q_j))$$

$$\begin{aligned}
&\leq (C2^{-nc})^2 \sum_{Q_j \in I_{k-2,0}(Q)} K(\ell(Q_j)) \\
&\leq (C2^{-nc})^k K(\ell(Q)) \\
&\leq 2^{-k} K(\ell(Q)).
\end{aligned}$$

根据上面的估计有

$$\begin{aligned}
\sum_{Q_j \in \mathcal{B} \cap D(Q)} K(\ell(Q)) &= \sum_{k \geq 0} \sum_{Q_j \in G_k(Q)} K(\ell(Q_j)) \\
&\leq \frac{C2^c}{2^c - 1} \sum_{k \geq 0} \sum_{Q_j \in I_{k,0}} K(\ell(Q_j)) \\
&\leq \frac{C2^c}{2^c - 1} K(\ell(Q)) \sum_{k \geq 0} 2^{-k} \\
&\leq \frac{C2^{1+c}}{2^c - 1} K(\ell(Q)).
\end{aligned}$$

我们已经证明了断言. 由 (2.2) 和 (2.3), 我们获得

$$\sum_{Q_j \in \mathcal{B} \setminus \mathfrak{M}} K(\ell(Q_j)) \leq C \sum_{Q_k \in \mathcal{B} \cap \mathfrak{M}} K(\ell(Q_k)).$$

上述估计和引理 2.3 给出了

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D} \setminus (U \cup V)} |g'(z)|^4 (1 - |z|^2)^2 K(1 - |z|^2) dA(z) &\leq C \sum_{Q_k \in \mathcal{B} \cap \mathfrak{M}} K(\ell(Q_k)) \\
&\leq C' + C'' \int_{\mathbb{D}} |S\psi(z)|^2 (1 - |z|^2)^2 K(1 - |z|^2) dA(z).
\end{aligned}$$

我们已经证明了 (2.1) 式, 定理证毕. $\square$

3 几何条件

在本节中, 我们将利用几何条件来刻画 $g = \log(\psi') \in Q_{K,0}$ 的特征, 需要下面的几个引理来证明主要的定理.

引理 3.1 ^[4] 设 $\Gamma = \partial\psi(\mathbb{D})$ 是一个闭 Jordan 曲线, 其中 ψ 是一个单叶函数. 如果

$$\int_0^1 \frac{\eta(t)}{t} dt < \infty,$$

那么

$$\eta(t) \lesssim \beta(t) \lesssim \int_0^t \frac{\eta(s)}{s} ds + t \int_t^1 \frac{\eta(s)}{s^2} ds.$$

引理 3.2 ^[6] 设 K 满足条件 (1.3) 和 (1.4), 那么 K 满足下面的性质:

- (1) 存在着一些充分小的常数 $c > 0$ 使得 $t^{c-1}K(t)$ 是非递增的;
- (2) K 在区间 $(0, \infty)$ 上是凸的;
- (3) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{\varphi_K(s)}}{s^{3/2}} ds < \infty$.

利用 Jensen 公式, 我们可以直接获得下面的结果.

引理 3.3

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}, a) d\theta = \begin{cases} \log \frac{1}{|a|}, & 0 < r \leq |a|, \\ \log \frac{1}{r}, & |a| < r \leq 1. \end{cases}$$

定理 3.4 设 K 满足条件 (1.3) 和 (1.4), $\Gamma = \partial\psi(\mathbb{D})$ 是一个闭 Jordan 曲线, 其中 ψ 是单叶的. 如果

$$\int_0^1 \frac{\eta^2(t)}{t^2} K(t) dt < \infty, \quad (3.1)$$

那么 $g = \log \psi' \in Q_K$.

证明 对于每一个 $t \in (0, 1]$, 容易得到

$$|g'(z)| \leq \frac{\beta(t)}{t}, \quad |z| \leq 1 - t. \quad (3.2)$$

根据 (3.2) 式、引理 3.2 和 3.3 可以得到

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} |g'(z)|^2 K(g(z, a)) dA(z) \\ & \leq \int_0^1 \frac{\beta^2(1-r)}{(1-r)^2} \left(\int_0^{2\pi} K(g(re^{i\theta}, a)) d\theta \right) dr \\ & \leq \int_0^1 \frac{\beta^2(1-r)}{(1-r)^2} K \left(\int_0^{2\pi} (g(re^{i\theta}, a)) d\theta \right) dr \\ & \leq \int_0^1 \frac{\beta^2(1-r)}{(1-r)^2} K \left(\log \frac{1}{r} \right) dr. \end{aligned}$$

注意到

$$\int_0^1 \frac{\beta^2(1-r)}{(1-r)^2} K \left(\log \frac{1}{r} \right) dr < \infty \quad (3.3)$$

成立当且仅当

$$\int_0^1 \frac{\beta^2(t)}{t^2} K(t) dt < \infty. \quad (3.4)$$

现在, 我们将证明 (3.4) 成立. 由 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 3.2 可得

$$\int_0^1 \frac{\eta(t)}{t} dt \leq \left(\int_0^1 \frac{\eta^2(t)}{t^2} K(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \frac{dt}{K(t)} \right)^{1/2} < \infty.$$

因此由引理 3.1 可得

$$\beta(t) \lesssim \int_0^t \frac{\eta(s)}{s} ds + t \int_t^1 \frac{\eta(s)}{s^2} ds.$$

利用 Minkowski 积分不等式 (参见 [10, 第 14 页]) 可以得到

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\int_0^t \frac{\eta(s)}{s} ds \right)^2 \frac{K(t)}{t^2} dt \\ & = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\eta(tx)}{tx} \sqrt{K(t)} dx \right)^2 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\eta^2(tx)}{(tx)^2} K(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} dx \right)^2 \\
&\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\eta^2(s)}{s^2} \frac{K(s/x)}{x} ds \right)^{\frac{1}{2}} dx \right)^2 \\
&\leq \int_0^1 \frac{\eta^2(s)}{s^2} K(s) ds \left(\int_1^\infty \frac{\sqrt{\varphi_K(s)}}{s^{3/2}} ds \right)^2 \\
&\lesssim \int_0^1 \frac{\eta^2(s)}{s^2} K(s) ds.
\end{aligned}$$

根据引理 3.2 最后的不等式成立. 类似地, 可以得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(t \int_t^1 \frac{\eta(s)}{s^2} ds \right)^2 \frac{K(t)}{t^2} dt \\
&= \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\eta(s)}{s^2} ds \right)^2 K\left(\frac{1}{x}\right) dx \\
&= \int_1^\infty \left(\int_1^x \frac{\eta(y/x)}{y^2} \sqrt{K\left(\frac{1}{x}\right)} dy \right)^2 dx \\
&\lesssim \left(\int_1^\infty \left(\int_1^\infty \frac{\eta^2(y/x)}{y^4} \chi_{[1,x]}(y) K\left(\frac{1}{x}\right) dx \right)^{1/2} dy \right)^2 \\
&\lesssim \int_0^1 \frac{\eta^2(s)}{s^2} K(s) ds \left(\int_0^1 \frac{\varphi_K(s)}{s} ds \right)^2.
\end{aligned}$$

上述估计就给出了

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\beta^2(t)}{t^2} K(t) dt &\leq \int_0^1 \left(\int_0^t \frac{\eta(s)}{s} ds + t \int_t^1 \frac{\eta(s)}{s^2} ds \right)^2 \frac{K(t)}{t^2} dt \\
&\lesssim \int_0^1 \frac{\eta^2(s)}{s^2} K(s) ds.
\end{aligned}$$

定理证毕. $\square$

定理 3.5 设 K 满足条件 (1.3) 和 (1.4), $\Gamma = \partial\psi(\mathbb{D})$ 是一个闭 Jordan 曲线, 其中 ψ 是单叶的. 如果条件 (3.1) 成立, 那么 $g = \log \psi' \in Q_{K,0}$ 的充要条件是 $g \in Q_K$.

证明 必要性是显然的, 只要证明充分性即可. 假设条件 (3.1) 成立和 $f \in Q_K$, 下面将证明当 $|a| \rightarrow 1$ 时, 恒成立

$$I(a) = \int_{\mathbb{D}} |g'(z)|^2 K(g(z, a)) dA(z) \rightarrow 0.$$

对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 条件 (3.1) 成立意味着存在着一个 $\delta \in (0, 1)$ 使得

$$\int_0^{1-\delta} \frac{\eta^2(t)}{t^2} K(t) dt < \epsilon.$$

根据定理 3.4 的证明过程, 对任意的 $a \in \mathbb{D}$, 容易获得

$$\int_\delta^1 |g'(re^{i\theta})|^2 \left(\int_0^{2\pi} K(g(re^{i\theta}, a)) d\theta \right) dr \lesssim \int_0^{1-\delta} \frac{\eta^2(t)}{t^2} K(t) dt < \epsilon.$$

选取 $a \in \mathbb{D}$ 使得 $1 > |a| > \delta$, 再一次运用定理 3.4 可得

$$\begin{aligned} & \int_0^\delta |g'(re^{i\theta})|^2 \left(\int_0^{2\pi} K(g(re^{i\theta}, a)) d\theta \right) dr \\ & \leq \int_0^\delta \frac{\beta^2(1-r)}{(1-r)^2} K\left(\log \frac{1}{|a|}\right) dr \\ & \leq \frac{K(\log \frac{1}{|a|})}{K(\log \frac{1}{\delta})} \int_0^\delta \frac{\beta^2(1-r)}{(1-r)^2} K\left(\log \frac{1}{r}\right) dr \\ & \leq \frac{K(\log \frac{1}{|a|})}{K(\log \frac{1}{\delta})} \int_0^1 \frac{\eta^2(t)}{t^2} K(t) dt. \end{aligned}$$

注意到

$$I(a) = \left\{ \int_{\mathbb{D}(0, \delta)} + \int_{\mathbb{D}/\mathbb{D}(0, \delta)} \right\} |g'(z)|^2 K(g(z, a)) dA(z)$$

和 ϵ 是任意的, 因此当 $|a| \rightarrow 1$ 时, $I(a) \rightarrow 0$. 这就给出了 $g \in Q_{K,0}$, 定理证毕. $\square$

定理 3.6 设 K 满足条件 (1.3) 和 (1.4). 对给定的次可加增函数 $h(\delta)$ ($0 < \delta < 1$), 可构造一个单叶函数 ψ 满足:

- (1) $h(\delta) \approx \beta(\delta)$, $0 < \delta < 1$;
- (2) $\int_0^1 \frac{\eta^2(t)}{t^2} K(t) dt < \infty \Leftrightarrow g \in Q_{K,0}$.

证明 (1) 证明的思想来自于 [4]. 假设 b 是一个充分小的正常数, 后面将给出选取 b 的方法. 定义

$$b_0 = bh(1); \quad b_k = bh(2^{-k}) - \frac{b}{2}h(2^{-k+1}).$$

因为 h 是次可加的, 所以我们可得

$$b_k \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

和

$$\sum_{k=0}^n 2^{k-n} b_k = bh(2^{-n}). \quad (3.6)$$

现在定义 ψ 满足 $\psi(0) = 0$ 和

$$g(z) = \log \psi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{2^k}.$$

如果选取的 b 充分的小, 根据 [4] 的定理 4.3 中 (i) 的证明过程, 可以得到 ψ 是单叶函数且满足 $\Gamma = \partial\psi(\mathbb{D})$ 是闭 Jordan 曲线和 $\beta(\delta) \approx h(\delta)$.

(2) 必要性由定理 3.5 可直接给出. 现假设 $g \in Q_{K,0}$. 因为 g 是 Hadamard 缺项级数, [11, 定理 9] 给出了 $g \in Q_{K,0}$ 等价于下列条件成立:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k K\left(\frac{1}{2^k}\right) |b_k|^2 \approx \sum_{n=0}^{\infty} 2^n K\left(\frac{1}{2^n}\right) \left(\sum_{k=0}^n 2^{k-n} |b_k|^2 \right) < \infty. \quad (3.7)$$

注意到 h 是增函数, 由 (3.6) 式可以得到

$$\int_0^1 \frac{h^2(t)}{t^2} K(t) dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} h^2\left(\frac{1}{2^n}\right) 2^n K\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n 2^{k-n} b_k \right)^2 2^n K\left(\frac{1}{2^n}\right). \quad (3.8)$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式、(3.7) 和 (3.8) 式得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{h^2(t)}{t^2} K(t) dt &\lesssim \sum_{n=0}^{\infty} 2^n K\left(\frac{1}{2^n}\right) \left(\sum_{k=0}^n 2^{k-n} |b_k|^2\right) \left(\sum_{k=0}^n 2^{k-n}\right) \\ &\lesssim \sum_{n=0}^{\infty} 2^n K\left(\frac{1}{2^n}\right) \left(\sum_{k=0}^n 2^{k-n} |b_k|^2\right) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

现在, 根据 [4, 定理1]、 $\beta(t) \approx h(t)$ 、Cauchy-Schwarz 不等式以及上面的估计, 可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\eta(t)}{t} dt &\lesssim \int_0^1 \frac{\beta(t^{1/2})}{t} dt \leq 2 \int_0^1 \frac{\beta(t)}{t} dt \\ &\lesssim \int_0^1 \frac{h(t)}{t} dt \lesssim \left(\int_0^1 \frac{h^2(t)}{t^2} K(t) dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \frac{dt}{K(t)}\right)^{1/2} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

最后, 根据定理 3.4 的证明过程和条件 $\beta(t) \approx h(t)$ 就给出了

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\eta^2(t)}{t^2} K(t) dt &\lesssim \int_0^1 \frac{\beta^2(t)}{t^2} K(t) dt \\ &\lesssim \int_0^1 \frac{h^2(t)}{t^2} K(t) dt < \infty. \end{aligned}$$

定理证毕. □

致谢 感谢匿名审稿人对本文提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Xiao J. Holomorphic Q Classes. Lecture Notes on Mathematics, vol. 1767. Berlin: Springer, 2001
- 2 Xiao J. Geometric Q_p Functions. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2006
- 3 Pau J, Peláez J Á. Logarithms of the derivative of univalent functions in Q_p spaces. J Math Anal Appl, 2009, 350: 184–194
- 4 Pommerenke Ch, Warschawski S E. On the quantitative boundary behaviour of conformal maps. Comment Math Helv, 1982, 57: 107–129
- 5 Essen M, Wulan H. On analytic and meromorphic function and spaces of Q_K -type. Illionis J Math, 2002, 46: 1233–1258
- 6 Essen M, Wulan H, Xiao J. Several function-theoretic characterizations of Möbius invariant Q_K spaces. J Funct Anal, 2006, 230: 78–115
- 7 Wulan H, Zhu K. Q_K spaces via higher order derivatives. Rocky Mountain J Math, 2008, 38: 329–350
- 8 Garnett J, Marshall D. Harmonic Measure. Cambridge: Cambridge University Press, 2005
- 9 Wulan H, Zhou J. The higher order derivatives of Q_K type space. J Math Anal Appl, 2007, 332, 1216–1228
- 10 Garnett J. Bounded Analytic Functions. New York: Academic Press, 1982
- 11 Wulan H, Zhu K. Lacunary series in Q_K spaces. Studia Math, 2007, 178: 217–230
- 12 Aulaskari R, Xiao J, Zhao R. On subspaces and subsets of BMOA and UBC. Analysis, 1995, 15: 101–121
- 13 Li H, Wulan H, Zhou J. Lipschitz space and Q_K spaces. Sci China Math, 2010, 53: 771–778
- 14 Pau J. Bounded Möbius invariant Q_K spaces. J Math Anal Appl, 2008, 338: 1029–1042
- 15 Pommerenke Ch. Univalent Functions. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1975

Schwarzian derivative, geometric conditions and Q_K spaces

ZHOU JiZhen

Abstract For a univalent function $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$, we study the membership of $\log \psi'$ to the space Q_K in terms of the Schwarzian derivative. We also apply a geometric condition to characterize the space Q_K .

Keywords Q_K spaces, K -Carleson measure, conformal mapping, Schwarzian derivative

MSC(2010) 30D45, 30D50

doi: 10.1360/012011-765