



Banach 空间与格上的逼近性质和算子扩张理论

献给刘培德教授 80 华诞

包琪瑶¹, 胡前锋^{1,2}, 蒋兴妮³, 刘锐^{1*}

1. 南开大学数学科学学院, 天津 300071;

2. 河北工业大学理学院, 天津 300401;

3. 四川大学数学学院, 四川 610065

E-mail: qybao@mail.nankai.edu.cn, qianfenghu@mail.nankai.edu.cn, x.jiang@scu.edu.cn, ruiliu@nankai.edu.cn

收稿日期: 2022-12-01; 接受日期: 2023-01-24; 网络出版日期: 2023-05-25; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12071230, 11971348 和 12201439) 和南开大学百名青年学科带头人计划 (批准号: ZB22000105, 63223027, 91923104, 91823003 和 63174012) 资助项目

摘要 本文介绍近期发展的 Banach 空间扩张理论的主要结果, 在此基础上利用 Banach 空间有界逼近性质与 Schauder 框架的等价关系, 研究了有界逼近性质的 Banach 空间上算子值测度的扩张和有限秩算子的扩张, 并得到算子空间上完全有界算子值测度的扩张结果. 最后, 考虑具有 Schauder 框架的 Banach 格上的算子值测度的扩张, 主要关注其基本扩张空间的偏序结构, 以及扩张中各映射对偏序结构的保持性质.

关键词 扩张理论 算子值测度 有界逼近性质 算子空间 Banach 格

MSC (2020) 主题分类 46B15, 46B28, 46B42, 47A20

1 引言

逼近性质最早出现在 1932 年 Banach^[5] 的书中, 它在 Banach 空间结构理论^[23] 中具有基础性作用. 有关逼近性质各种变体的系统研究由 Grothendieck^[15] 在 1955 年发起. 在那时, 主要的性质是逼近性质、有界逼近性质和基性质. Grothendieck 定理表明, 在自反 Banach 空间中, 有界逼近性质与逼近性质等价. 1973 年, Enflo^[12] 构造了一个反例, 表明存在可分自反的 Banach 空间没有逼近性质. 因此, 存在可分的 Banach 空间没有 Schauder 基. 1987 年, Szarek^[36] 给出了一个十分复杂的例子, 表明存在可分超自反的 Banach 空间有有界逼近性质但没有 Schauder 基. 现在已经有一系列的逼近性质^[7]. 对于一个给定的空间, 尽可能弱的形式的逼近性质与尽可能强的逼近性质之间的关系是人们所关心的. 例如, 1971 年, Pełczyński^[29]、Pełczyński 和 Wojtaszczyk^[30] 以及 Johnson 等^[21] 证明了可分的 Banach 空间有有界逼近性质当且仅当它同构于一个有 Schauder 基的 Banach 空间的可补子空间. Hilbert 空

英文引用格式: Bao Q Y, Hu Q F, Jiang X N, et al. Approximation property and operator dilation theory of Banach spaces and lattices (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 1545–1560, doi: 10.1360/SSM-2022-0231

间的框架理论^[9]是数学与工程等领域的重要工具,广泛地应用在信号分析等诸多数学领域,如采样理论^[2]、算子理论^[18]和调和分析^[14]等.1999年,Casazza等^[8]利用扩张技巧推广了框架和Schauder基的概念,在可分的Banach空间中引入Schauder框架,并证明了可分的Banach空间有Schauder框架当且仅当它有有界逼近性质.而利用有界逼近性质与Schauder框架的联系,Beanland等^[6]证明了,若自反Banach空间具有Schauder框架,则它可以可补嵌入一个具有Schauder基的自反空间.Liu和Ruan^[25]在算子空间中引入完全有界框架的概念,并证明了可分的算子空间存在完全有界框架当且仅当它有完全有界逼近性质,当且仅当它能够完全可补嵌入有完全有界基的算子空间.另外,Han等^[19]系统地发展了Banach空间扩张理论,解决了自反空间的框架和原子分解的对偶性问题,得到算子空间版本的Pelczyński-Casazza-Han-Larson定理.Banach空间非线性理论中著名的Godefroy-Kalton定理^[13]表明Lipschitz有界逼近性质与有界逼近性质等价.由非线性Banach扩张技巧,Liu等^[26]将Godefroy-Kalton等价定理推广到Banach空间的算子和框架这一更广的情形.本文介绍Banach空间扩张理论的主要结果并建立扩张理论与Banach空间结构之间的联系,进而给出算子空间版本的扩张理论以及具有Schauder框架的Banach格上算子值测度的扩张理论.

扩张理论^[4,19,27,28]是可以将框架视为基的压缩和将算子表示为某种意义下性质更好的算子的复合来研究空间或者算子的范式.著名的Naimark定理和Stinespring扩张定理^[28]表明,每一个正则的正算子值测度都有投影值扩张,作用在 C^* -代数上的每一个完全有界线性映射都可以扩张为有界 $*$ -同态,而广义的Stinespring扩张定理则给出了完全有界映射的基础分解定理^[32].扩张理论在算子理论的发展中发挥着根本性的作用,同时和相关学科中具有广泛应用,例如,完全正映射、完全有界映射以及半群的扩张在算子代数^[28,38]和量子信息理论^[16]中有重要应用.注意到这些扩张结果中的扩张空间都是Hilbert空间,因此这类扩张也称为Hilbert扩张.近期发展的Banach空间上的Schauder框架(冗余对偶列)到Schauder基(无条件基)的扩张,一般算子值测度的投影值扩张和Banach代数上有界线性算子的同态扩张理论等,分别推广了Hilbert空间中Parseval框架(甚至一般框架)是更大的Hilbert空间上标准正交基(Riesz基)的正交压缩、正则的正算子值测度的Naimark扩张定理、完全正映射的Stinespring扩张定理等.发展Banach空间的扩张理论极大地延拓了经典的扩张理论并展示出与框架理论、算子理论和Banach空间几何^[24]之间的密切联系.

关于算子值测度,有一类重要的例子是由对偶框架或者无条件Schauder框架生成的.由框架到基的扩张理论可得到一般算子值测度到投影值测度的扩张理论.Han等^[19]系统地建立了算子值测度的扩张理论,证明了每一个Banach空间算子值测度总可以扩张为投影值测度,这里的扩张空间一般是Banach空间,投影是有界幂等的,但不一定是自伴的,而扩张的建立依赖于构造Banach空间的极小化扩张技巧,这些Banach空间扩张结果为相关领域之间重要问题的转化建立了桥梁.由此可见,建立Banach空间扩张具有重要意义.更进一步地,若存在非完全有界的算子值测度有Hilbert空间扩张范数,则可推导出算子代数中的Kadison相似性问题^[31]不成立.考虑到算子值测度与有界线性算子之间的联系,Han等^[19]证明了Banach代数上每一个范数连续的线性映射可以扩张为作用在Banach空间上的范数连续的同态.

Banach空间扩张理论的建立依赖于抽象定义的基础扩张空间,而利用Banach空间的有界逼近性质与Schauder框架的等价关系^[8],我们具象化扩张空间为具有基的Banach空间,从而建立扩张理论与Banach空间几何之间的联系.算子空间可以看作Banach空间的量子化,而一般的Banach空间上的算子值测度扩张理论同样适用于算子空间上的完全有界算子值测度的扩张.本文总结Banach空间扩张理论的重要结果,并在此基础上借助Schauder框架将有有界逼近性质的Banach空间上的算子值测度或者算子扩张为具有基的Banach空间上的投影值测度.进而,我们推广Banach空间上算

子值测度的扩张结果, 得到算子空间上完全有界算子值测度的扩张定理, 并考虑具有 Schauder 框架的 Banach 格上的算子值测度的扩张, 主要关注其基本扩张空间的偏序结构以及扩张中各映射对偏序结构的保持性质.

2 有界逼近性质与扩张理论

首先介绍 Banach 空间有界逼近性质的概念.

定义 2.1 令 X 为 Banach 空间.

(1) 若存在有限秩映射网 $\{T_\gamma\}$ 使得 $T_\gamma(x) \rightarrow x$ 对于任意的 $x \in X$ 在紧集上一致成立, 则称 X 有逼近性质;

(2) 若存在有限秩映射 $T_\gamma: X \rightarrow X$ 使得 $\|T_\gamma\| \leq K$ 对于某常数 $K > 0$ 且 $T_\gamma(x) \rightarrow x (\forall x \in X)$ 成立, 则称 X 有有界逼近性质.

类似于 Hilbert 空间上的算子值测度, 文献 [19] 给出了 Banach 空间上算子值测度的定义.

定义 2.2 令 X 和 Y 为 Banach 空间, 令 (Ω, Σ) 为测度空间. 若映射 $E: \Sigma \rightarrow B(X, Y)$ 在弱算子拓扑下是可数可加的, 则称它为 Ω 上的 $B(X, Y)$ - 值测度, 即如果 $\{B_i\}$ 是 Σ 的元素构成的不交的可数集合且它们的并集为 B , 则

$$y^*(E(B)x) = \sum_i y^*(E(B_i)x), \quad \forall x \in X, \quad \forall y^* \in Y^*.$$

当 $X = Y$ 时, $B(X, Y)$ 简记为 $B(X)$.

(1) 如果对于任意的 $B \in \Sigma$, $E(B)$ 是 X 上的投影, 则称 (Ω, Σ) 上的 $B(X)$ - 值测度为投影值测度;

(2) 如果对于任意的 $B_1, B_2 \in \Sigma$, 都有 $E(B_1 \cap B_2) = E(B_1) \cdot E(B_2)$, 则称 (Ω, Σ) 上的 $B(X)$ - 值测度为谱的算子值测度.

注 2.1 对于一般的 $B(X)$ - 值测度, 有如下说明:

(1) 在 Banach 空间理论中, Orlicz-Pettis 定理^[11]表明 Banach 空间中每个弱子序列可和的序列依范数无条件可和. 因此上述定义等价于 $B(X)$ - 值测度是强可数可加的, 即如果 $\{B_i\}$ 是 Σ 中一族可数的互不相交的子集且并集为 B , 则

$$E(B)x = \sum_i E(B_i)x, \quad \forall x \in X.$$

(2) 由复测度理论^[35]可知, $B(X)$ - 值测度 E 总是有界的, 即 $\sup_{B \in \Sigma} \|E(B)\| < \infty$.

(3) 谱的算子值测度总是幂等的, 反过来由文献 [19, 引理 2.6] 可知, 幂等的算子值测度也是谱的. 因此有时也会用幂等值测度表示谱的算子值测度. 在 Banach 空间中, 投影值测度表示 (有界) 幂等的, 或者谱的算子值测度, 但不一定是自伴的.

对于一般的算子值测度, Han 等^[19]建立了如下的 Banach 空间上算子值测度的扩张定理.

定理 2.1 设 $E: \Sigma \rightarrow B(X, Y)$ 是算子值测度, 则存在 Banach 空间 Z 、有界线性算子 $S: Z \rightarrow Y$ 、 $T: X \rightarrow Z$ 和投影值概率测度 $F: \Sigma \rightarrow B(Z)$ 使得

$$F(B) = SE(B)T, \quad \forall B \in \Sigma.$$

定理中的四元组 (F, Z, S, T) 称为 Banach 空间扩张系统. 该定理证明的关键是建立极小化扩张技巧, 包括引入基础扩张空间

$$\mathcal{M}_E = \text{span}\{E_{B,x} : B \in \Sigma, x \in X\}, \quad (2.1)$$

其中对于任意的 $A \in \Sigma$, 都有 $E_{B,x}(A) = E(A \cap B)x$. 同时定义线性映射 T 、 S 和映射 F 如下:

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow \mathcal{M}_E, & Tx &= E_{\Omega,x}, \\ S : \mathcal{M}_E &\rightarrow Y, & S\left(\sum_k c_k E_{B_k, x_k}\right) &= \sum_k c_k E(B_k)x_k, \\ F : \Sigma &\rightarrow L(\mathcal{M}_E), & F(B)\left(\sum_k c_k E_{B_k, x_k}\right) &= \sum_k c_k E_{B \cap B_k, x_k}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中, $B \in \Sigma$, $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$, $\{B_k\} \subset \Sigma$, $\{x_k\} \subset X$. 而上述代数扩张系统为 Banach 扩张建立了代数基础.

在基础扩张空间 $\mathcal{M}_E$ 中引入极小扩张范数 $\|\cdot\|_\alpha$, 定义为对于任意的 $\sum_{i=1}^N C_i E_{B_i, x_i} \in \mathcal{M}_E$, 都有

$$\left\| \sum_{i=1}^N C_i E_{B_i, x_i} \right\|_\alpha = \sup_{B \in \Sigma} \left\| \sum_{i=1}^N C_i E(B \cap B_i)x_i \right\|_Y. \quad (2.3)$$

受算子值测度的极小扩张的启发, 更一般地, Han 等^[19] 也建立了 Banach 代数上有界线性映射的扩张定理.

定理 2.2 (Banach 代数扩张定理) 令 $\mathcal{A}$ 为 Banach 代数, 令 $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(X)$ 为有界线性映射, 则存在 Banach 空间 Z 、有界线性单位同态 $\pi : \mathcal{A} \rightarrow B(Z)$ 和有界线性映射 $T : X \rightarrow Z$, $S : Z \rightarrow X$ 使得

$$\phi(a) = S\pi(a)T, \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

利用算子值测度的扩张理论, Han 等^[19, 20] 在交换定义域情形下, 如纯原子测度和一般测度空间上的 von Neumann 代数, 给出以下结果.

定理 2.3 令 M 为交换的 von Neumann 代数, X 为 Banach 空间, 令 $\varphi : M \rightarrow B(X)$ 为弱 * 连续 (也等价于超弱 - 弱算子连续) 的有界线性映射. 当 M 是以下任意情形: (1) M 是纯原子的 (或者等价地, $M = \ell^\infty$); (2) $M = L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, 其中 (Ω, Σ, μ) 是有限测度空间, 则存在 Banach 空间 Z 、有界线性算子 $S : Z \rightarrow Y$, $T : X \rightarrow Z$ 和弱 * 连续的单位同态 $\pi : M \rightarrow B(X)$ 使得

$$\varphi(a) = S\pi(a)T, \quad \forall a \in M.$$

此外, 如果 M 的前置对偶 M_* 和 X 是可分的, 则扩张空间 Z 也取为可分空间.

近期, Han 等^[17] 考虑了定义域是非交换的情形, 即作用在 von Neumann 代数的投影格的测度—量子测度, 有以下结果.

定理 2.4 令 M 为没有 I_2 型直和的 σ -有限的 von Neumann 代数, 且 $U : \mathcal{P}(M) \rightarrow B(X)$ 是可数可加的量子测度, 其中, X 是一个 Banach 空间, $\mathcal{P}(M)$ 是 M 中所有投影的集合. 如果 3 个条件之一成立: (1) $X = \ell_p$ ($1 < p < 2$); (2) X 有 Schur 性质; (3) U 有有界 p -变差, 则 U 可扩张为可数可加的投影值测度 $V : \mathcal{P}(M) \rightarrow B(Z)$ 且存在有界线性算子 $T : X \rightarrow Z$ 和 $S : Z \rightarrow X$ 使得

$$U(P) = SV(P)T, \quad \forall P \in \mathcal{P}(M),$$

算子值测度有自然且重要的一类来自于框架理论. 首先回顾 Hilbert 空间框架的概念^[9].

定义 2.3 若存在正的常数 A 和 B 使得

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H},$$

则称可分 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的序列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 为框架. 如果 $A = B = 1$, 则称 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 为 Parseval 框架.

Casazza 等^[8] 在可分 Banach 空间中引入 Schauder 框架的概念, 它是 Hilbert 空间框架和 Banach 空间 Schauder 基的自然推广.

定义 2.4 令 X 为可分 Banach 空间, 如果存在 $(x_n, f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \times X^*$ 使得对于任意的 $x \in X$, 都有

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) x_n$$

且上述等式依范数收敛, 则称序列 $(x_n, f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 为 X 中的 Schauder 框架. 如果上述等式无条件收敛, 则称 $(x_n, f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 为 X 中的无条件 Schauder 框架, 也称为冗余对偶列.

如前所述, 算子值测度或者 Banach 代数上的线性映射的扩张理论的建立依赖于抽象定义的基础扩张空间. 结合 Banach 空间有有界逼近性质当且仅当它有 Schauder 框架的等价刻画^[8], 考虑具有有界逼近性质的 Banach 空间和算子的扩张问题, 并具象化扩张空间为具有 Schauder 基的 Banach 空间, 进而阐述扩张理论与 Banach 空间的有界逼近性质之间的联系.

定理 2.5 令 X 为有有界逼近性质的 Banach 空间, 令 $E: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow B(X)$ 为 $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ 上的算子值测度, 其中 $2^{\mathbb{N}}$ 表示自然数集 $\mathbb{N}$ 的子集构成的集合, 则存在有 Schauder 基的 Banach 空间 Z 、有界线性映射 $S: Z \rightarrow X$, $T: X \rightarrow Z$ 和投影值测度 $F: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow B(Z)$ 使得

$$E(B) = SF(B)T, \quad \forall B \in 2^{\mathbb{N}}.$$

另外, 用 A_i 表示 $E(\{i\})$, 令 φ 为算子值测度 E 诱导的线性映射, 定义为

$$\varphi: \ell_{\infty}(\mathbb{N}) \rightarrow B(X), \quad (a_i) \mapsto \sum^{\text{WOT}} a_i A_i,$$

则 φ 是良定义的、有界的且超弱 - 弱算子连续的线性算子, 因此存在从 $\ell_{\infty}(\mathbb{N})$ 到 $B(Z)$ 的超弱 - 弱算子连续的同态 π 使得

$$\varphi(a) = S\pi(a)T, \quad \forall a \in \ell_{\infty}(\mathbb{N}).$$

证明 如果 X 有有界逼近性质, 则 X 有 Schauder 框架^[8], 设为 (x_j, f_j) . 用 A_i 表示 $E(\{i\})$, 令 $\mathbb{F} := \{(i, j) \mid A_i x_j \neq 0\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 且按正方形排序, 令 $\mathbb{F}_B := \mathbb{F} \cap (B \times \mathbb{N})$. 记 $c_{00}(\mathbb{F})$ 为 $\mathbb{F}$ 上只有有限项元素非零的所有复数序列. 令 $\{z_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{F}}$ 为 $\{E(\{i\})x_j\}_{(i,j) \in \mathbb{F}}$ 的复制. 令 Z 为向量空间 $\text{span}\{z_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{F}}$ 在范数

$$\left\| \sum_{(i,j) \in \mathbb{F}} a_{i,j} z_{i,j} \right\|_Z = \sup_{B \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{\mathbb{F}_B} a_{i,j} A_i x_j \right\|_X$$

下的完备化, 其中 $\{a_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{F}} \in c_{00}$. 易证 $\|z_{i,j}\|_Z = \|A_i x_j\|_X$ 且 $\{z_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{F}}$ 是 Z 的基.

如果考虑由等式 (2.1) 定义的基础扩张空间 $\mathcal{M}_E = \text{span}\{E_{B,x} : B \in \Sigma, x \in X\}$, 可将 $E_{B,x}$ 等同于 $\sum_{(i,j) \in \mathbb{F}_B} f_j(x) A_i x_j$, 则基础扩张空间在极小范数 (2.3) 下的完备化等同于序列空间 Z . 因此, 基础代数扩张 (2.2) 中的线性映射是良定义的, 相应的映射的延拓 $T: X \rightarrow Z$ 和 $S: Z \rightarrow X$ 是有界的且

$\|T\| \leq \|E\|$, $\|S\| \leq 1$, $F: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow B(Z)$ 是投影值测度且对于任意的 $B \subset 2^{\mathbb{N}}$, 都有 $\|F(B)\| \leq 1$. 此外, 直接验证可得

$$E(B) = SF(B)T, \quad \forall B \in 2^{\mathbb{N}}.$$

由算子值测度的定义和注 2.1 可知, 对于任意的 $x \in X$, 序列 $\sum_i A_i x$ 无条件收敛, 则由文献 [11, 定理 1.9] 可知映射 $(a_i) \mapsto \sum_i (a_i A_i x)$ 定义了一个有界线性映射. 由一致有界原理可知, 存在正的常数 K 使得

$$\sup_{(a_i) \in B_{\ell_\infty}} \left\| \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i A_i \right\| \leq K.$$

$\ell_\infty(\mathbb{N})$ 作为 σ - 有限的交换 von Neumann 代数, 投影等同于 $\mathbb{N}$ 的子集, 即投影为某个集合 B 上的特征函数 χ_B , 由算子值测度的可数可加性可知映射 φ 是可数可加的, 即 $\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi(P_i) = \varphi(\sum_{i \in \mathbb{N}} P_i)$ (依弱算子拓扑收敛), 其中 $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 是一族相互正交的投影. 因此由文献 [37] 可知, φ 是超弱 - 弱算子连续的有界线性映射.

类似的论证应用于投影值测度 F . 令 π 是 F 诱导的线性映射, 容易验证 $\pi: \ell_\infty(\mathbb{N}) \rightarrow B(Z)$ 是超弱 - 弱算子连续的同态, 并且对于任意的 $a \in \ell_\infty(\mathbb{N})$, 都有 $\varphi(a) = S\pi(a)T$. $\square$

注 2.2 令 $E: \Sigma \rightarrow B(X)$ 为算子值概率测度, 如果 E 可扩张为有 Schauder 基的 Banach 空间 Z 上的投影值测度, 则 Banach 空间 X 一定有有界逼近性质. 取有界线性映射 $T: X \rightarrow Z$, $S: Z \rightarrow X$, 因为 E 是概率的, 所以 $ST = I_X$. 由此可知 $TS(Z) = T(X)$, $TS \cdot TS = TS$, 即 TS 是从 Z 到 $T(X)$ 的投影. 因此, X 可以可补嵌入到一个有 Schauder 基的 Banach 空间 Z 中, 所以 X 有有界逼近性质.

定义 2.5 令 $K > 0$ 且 $T \in B(X)$. 若存在网 $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma} \subseteq B(X)$ 且 $\sup_{\lambda \in \Gamma} \|S_\lambda\| \leq K$ 使得对于任意的 $\lambda \in \Gamma$ 都有 $\dim(S_\lambda X) < \infty$ 且对于任意的 $x \in X$ 都有 $\lim_n \|S_n x - Tx\| = 0$, 则称有界线性算子 T 有 K - 有界逼近性质. 如果存在 $K > 0$ 使得 T 有 K - 有界逼近性质, 则称 T 有有界逼近性质.

当 X 是可分 Banach 空间时, 上述定义中的网可以替换为序列 $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. 对于序列情形, 取 $S_0 = 0$, 设 $A_n := S_n - S_{n-1}$, 等价地, 算子 T 有有界逼近性质当且仅当 T 是一列有限秩算子 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的逐点极限且

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{n=1}^m A_n \right\| \leq K.$$

特别地, 一个 Banach 空间 X 有有界逼近性质当且仅当恒等算子 I_X 有有界逼近性质.

定理 2.6 令 $E: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow B(X)$ 为 $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ 上的算子值测度, 用 A_i 表示 $E(\{i\})$. 如果 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 是一个有限秩算子序列, 则存在有 Schauder 基的 Banach 空间 Z 、有界线性算子 $T: X \rightarrow Z$, $S: Z \rightarrow X$ 和投影值测度 $F: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow B(Z)$ 使得

$$E(B) = SF(B)T, \quad \forall B \in 2^{\mathbb{N}}.$$

证明 由算子值测度的注 2.1(1) 和 2.1(2) 知, 对于任意的 $B \in 2^{\mathbb{N}}$, $E(B)$ 有有界逼近性质且存在正的常数 K 使得 $\|E(B)\| \leq K$. 下面证明 E 有具有 Schauder 基的 Banach 空间扩张.

令 $E_n := \text{span}\{A_n(X)\}$, $m_n := \dim(E_n)$. 由 Banach 空间理论可知, 对于每一个 $n \in \mathbb{N}$, 有限维空间 E_n 的 Auerbach 基 $(g_n^{(j)}, g_n^{(j)*})_{j=1}^{m_n}$ [29] 使得 $g_n^{(j)} \in S_X$ (X 的单位球面)、 $g_n^{(j)*} \in S_{X^*}$ 且 $g_n^{(i)*}(g_n^{(j)}) = \delta_{ij}$. 此外,

$$\sum_{j=1}^{m_n} g_n^{(j)*}(x) g_n^{(j)} = x, \quad \forall x \in E_n.$$

对于某个 $i = \sum_{k=1}^{n-1} m_k^2 + rm_n + j$, 其中 $m_0 = 0, r = 0, \dots, m_n - 1$ 且 $j = 1, \dots, m_n$, 定义

$$x_i := y_n^{(j)}, \quad f_i := \frac{y_n^{(j)*} \circ A_n}{m_n},$$

直接计算可得 $\sum_{i=m_{n-1}^2+1}^{m_n^2} f_i(x)x_i = A_n x$.

令 $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 为 $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 的复制. 记 c_{00} 为只有有限项非零的所有标量序列. 令 Z 为空间 $\text{span}\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 在范数

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k z_k \right\| := \sup_n \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|$$

下的完备化, 其中 $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in c_{00}$. 易证 Z 是 Banach 空间且 $\{z_k\}$ 是 Z 的 Schauder 基.

现在定义线性映射 $T: X \rightarrow Z$ 为

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) z_k.$$

令 C_n 为 $(g_n^{(j)}, g_n^{(j)*})_{j=1}^{m_n}$ 的基常数. 令 $M_n \in \mathbb{Z}$ 且 $M_n \geq C_n$, 则对于任意的 $s \in \mathbb{Z}$, 都有 $s = \sum_{k=0}^{n-1} M_k m_k + rm_n + l$, 其中 $r < m_n, l \leq m_n$. 因此,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^s f_i(x) x_i \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=m_{k-1}^2+1}^{m_k^2} f_i(x) x_i + r \left(\sum_{j=1}^{m_n} \frac{y_n^{(j)*} \circ A_n(x) y_n^{(j)}}{m_n} \right) + \sum_{j=1}^l \frac{y_n^{(j)*} \circ A_n(x) y_n^{(j)}}{m_n} \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=0}^{n-1} A_k x \right\| + \frac{r}{m_n} \|A_n x\| + \frac{l}{m_n} \|A_n x\| \\ &\leq \|E(\{1, \dots, n\})x\| + 2\|E(n)x\| \\ &\leq 3K\|x\|. \end{aligned}$$

由此可得 $T: X \rightarrow Z$ 是有界线性映射且 $\|T\| \leq 3K$.

定义映射 $F: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow B(Z)$ 为

$$F(B) \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i z_i \right) = \sum_{k \in B} \sum_{i=M_{k-1}m_{k-1}+1}^{M_k m_k} a_i z_i.$$

易证 F 是幂等的且对于任意的 $B \in 2^{\mathbb{N}}$, 都有 $\|F(B)\| \leq 1$. 类似抽象算子值测度的扩张定理 (参见文献 [19, 定理 2.31]) 的证明, 可得 F 是可数可加的.

定义 $S: Z \rightarrow X$ 为 $S(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i z_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x_i$, 直接验证可得 S 是压缩的. 综上得到对于任意的 $B \in 2^{\mathbb{N}}$, 都有 $E(B) = SE(B)T$. $\square$

注 2.3 沿用上述定理 2.6 中的符号, 如果算子值测度 E 是概率的, 对应着恒等算子的有限维展式 [30], 自然可推导出 X 有有界逼近性质, 而上述定理中的 (x_i, f_i) 就是 X 的 Schauder 框架, 上述扩张定理推广了一般 Schauder 框架到基的扩张理论.

3 算子空间上的扩张理论

考虑算子代数中的 Jordan 结构. 如果 $\circ$ 具有如下性质: 对于任意的 $a, b \in A$, 都有 (1) $a \circ b = b \circ a$; (2) $a \circ (b \circ a^2) = (a \circ b) \circ a^2$, 则称一个 Jordan 代数是实代数 $(A, \circ)$. 而一个 JB (Jordan-Banach) 代数是

Jordan 代数 $(A, \circ, \|\cdot\|)$, 其中 $\|\cdot\|$ 是完备范数且满足对于任意的 $a, b \in A$, 都有 (1) $\|a \circ b\| \leq \|a\|\|b\|$; (2) $\|a^2\| = \|a\|^2$; (3) $\|a^2\| \leq \|a^2 + b^2\|$. 一个重要的 JB 代数的例子就是 C^* -代数的自伴部分赋予 $\circ$ 运算: $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. 而从一个环 R 到另外一个环 R' 的映射 φ 满足对于任意的 $a, b \in R$, 都有 (1) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$; (2) $\varphi(ab + ba) = \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b)\varphi(a)$, 其中 (2) 也等价于 $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$, 称 φ 是 Jordan 同态.

命题 3.1 令 $\mathcal{A}$ 为 C^* -代数的自伴部分, 即为一个 JB 代数, 如果 φ 为从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 上的实线性算子, 则存在实 Banach 空间 Z 、有界实线性算子 $T: X \rightarrow Z$, $S: Z \rightarrow X$ 和 Jordan 同态 $\rho: \mathcal{A} \rightarrow B(Z)$ 使得

$$\varphi(a) = S\rho(a)T, \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

近期发展的算子空间理论^[32, 33]是 Banach 空间理论的自然量子化, 刻画为非交换的 Banach 空间理论. 算子空间可以看作 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子空间 $B(\mathcal{H})$ 的闭子空间. 而 Ruan^[34]给出了算子空间的抽象定义: 由 Banach 空间 X 和矩阵 M_n 张量得到一系列矩阵空间 $\{M_n(X)\}_{n \in \mathbb{N}}$, 对于任意的正整数 n , 矩阵空间 $M_n(X)$ 赋予范数 $\|\cdot\|_n$ 满足下列条件:

- (1) $\|(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{smallmatrix})\|_{n+m} = \max(\|x\|_n, \|y\|_m)$ 对于任意的 $x \in M_n(X)$ 和 $y \in M_m(X)$ 成立;
- (2) $\|axb\|_n \leq \|a\|_{M_n} \|x\|_m \|b\|_{M_m}$ 对于任意的 $a, b \in M_n$ 和 $x \in M_m(X)$ 成立,

则称 $(X, \|\cdot\|_n)$ 为算子空间. 特别地, $B(\mathcal{H})$ 的闭子空间称为关于 $\|\cdot\|_n = \|\cdot\|_{M_n(B(\mathcal{H}))}$ 的具体算子空间.

对于算子空间之间的映射, 通常会考虑完全有界映射. 设 V 和 W 是两个算子空间, 称线性算子 $\varphi: X \rightarrow Y$ 是完全有界的, 若 $\|\varphi\|_{cb} = \sup_n \{\|\varphi_n\|\} < \infty$, 其中 $\varphi_n: (x_{i,j})_{n \times n} \mapsto (\varphi(x_{i,j}))_{n \times n}$ 是 φ 从矩阵空间 $M_n(V)$ 到 $M_n(W)$ 的诱导映射. 由 Banach 空间上的有界算子值测度的极小扩张可得到算子空间上的完全有界算子值测度的扩张理论.

定理 3.1 令 (Ω, Σ) 为测度空间, V 为算子空间, $CB(V)$ 为 V 上的完全有界算子空间. 令 $E: \Sigma \rightarrow CB(V)$ 为完全有界的算子值测度, 即对于任意的 $B \in \Sigma$, 都有 $\|E(B)\|_{cb} \leq K$, 则存在算子空间 W 、完全有界线性算子 $T: V \rightarrow W$ 和 $S: W \rightarrow V$ 以及投影值测度 $F: \Sigma \rightarrow CB(W)$ 使得

$$E(B) = SF(B)T, \quad \forall B \in \Sigma.$$

证明 定义基础扩张空间 $\mathcal{M}_E = \text{span}\{E_{B,x}: B \in \Sigma, x \in V\}$. 定义映射 $\|\cdot\|_n: M_n(\mathcal{M}_E) \rightarrow [0, \infty)$ 如下: 对于任意的 $u \in M_n(\mathcal{M}_E)$, 存在唯一的表示 $u = (\sum_k b_k^{i,j} E_{B_k^{i,j}, x_k^{i,j}})_{i,j}$, 其中, $\{b_k^{i,j}\} \subset \mathbb{C}$, $\{B_k^{i,j}\} \subset \Sigma$, $\{x_k^{i,j}\} \subset X$. 对于任意的 n , 定义

$$\|u\|_n = \left\| \left(\sum_k b_k^{i,j} E_{B_k^{i,j}, x_k^{i,j}} \right)_{i,j} \right\| = \sup_{B \in \Sigma} \left\| \left(\sum_k b_k^{i,j} E(B \cap B_k^{i,j}) x_k^{i,j} \right)_{i,j} \right\|_{M_n(V)}.$$

常规计算可知 $\|\cdot\|_n$ 是 $M_n(\mathcal{M}_E)$ 上的范数. 接下来验证 $\|\cdot\|_n$ 是算子空间范数, 对于任意的 $u = (\sum_k b_k^{i,j} E_{B_k^{i,j}, x_k^{i,j}}) \in M_n(\mathcal{M}_E)$ 和 $w = (\sum_l c_l^{p,q} E_{C_l^{p,q}, y_l^{p,q}}) \in M_m(\mathcal{M}_E)$, 都有

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \right\|_{n+m} &= \left\| \begin{pmatrix} (\sum_k b_k^{i,j} E_{B_k^{i,j}, x_k^{i,j}}) & 0 \\ 0 & (\sum_l c_l^{p,q} E_{C_l^{p,q}, y_l^{p,q}}) \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sup_{B \in \Sigma} \left\| \begin{pmatrix} (\sum_k b_k^{i,j} E(B \cap B_k^{i,j}) x_k^{i,j}) & 0 \\ 0 & (\sum_l c_l^{p,q} E(B \cap C_l^{p,q}) y_l^{p,q}) \end{pmatrix} \right\|_{M_{n+m}(V)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{B \in \Sigma} \max \left\{ \left\| \left(\sum_k b_k^{i,j} E(B \cap B_k^{i,j}) x_k^{i,j} \right) \right\|_{M_n(V)}, \left\| \left(\sum_l c_l^{p,q} E(B \cap C_l^{p,q}) y_l^{p,q} \right) \right\|_{M_n(V)} \right\} \\
&= \max \left\{ \sup_{B \in \Sigma} \left\| \left(\sum_k c_k^{i,j} E(B \cap B_k^{i,j}) x_k^{i,j} \right) \right\|_{M_n(V)}, \sup_{B \in \Sigma} \left\| \left(\sum_l c_l^{p,q} E(B \cap C_l^{p,q}) y_l^{p,q} \right) \right\|_{M_n(V)} \right\} \\
&= \max \{ \|u\|_n, \|w\|_m \}.
\end{aligned}$$

另外, 对于任意的 $a, b \in M_n$ 和 $u \in M_n(\mathcal{M}_E)$, 都有

$$\begin{aligned}
\|aub\|_n &= \left\| a \left(\sum_k b_k^{i,j} E_{B_k^{i,j}, x_k^{i,j}} \right) b \right\|_n = \sup_{B \in \Sigma} \left\| a \left(\sum_k b_k^{i,j} E(B \cap B_k^{i,j}) x_k^{i,j} \right) b \right\|_{M_n(V)} \\
&\leq \sup_{B \in \Sigma} \|a\| \left\| \left(\sum_k b_k^{i,j} E(B \cap B_k^{i,j}) x_k^{i,j} \right) \right\|_{M_n(V)} \|b\| \\
&\leq \|a\| \|u\|_n \|b\|.
\end{aligned}$$

因此, $\|\cdot\|_n$ 给出了 $\mathcal{M}_E$ 上的算子空间矩阵范数, 完备化后记为 W .

定义线性映射 $T: V \rightarrow W$ 为 $T: x \rightarrow E_{\Omega, x}$. 对于任意的 $v = (x_{i,j})_{i,j} \in M_n(V)$, 都有

$$\begin{aligned}
\|T_n(x_{i,j})\| &= \|(Tx_{i,j})\| = \|(E_{\Omega, x_{i,j}})\|_n \\
&= \sup_{B \in \Sigma} \|(E(B \cap \Omega)x_{i,j})\| \\
&= \sup_{B \in \Sigma} \|(E(B)x_{i,j})\| \\
&= \sup_{B \in \Sigma} \|E(B)_n(x_{i,j})\| \\
&\leq \sup_{B \in \Sigma} \|E(B)_n\|_{M_n(V) \rightarrow M_n(W)} \|(x_{i,j})\| \\
&\leq \sup_{B \in \Sigma} \|E(B)\|_{cb} \|(x_{i,j})\|.
\end{aligned}$$

因此, T 是完全有界映射. 定义线性映射 $S: \mathcal{M}_E \rightarrow V$ 为

$$S\left(\sum_k b_k E_{B_k, x_k}\right) = \sum_k b_k E(B_k) x_k.$$

直接验证可得对于任意的 $u \in M_n(\mathcal{M}_E)$, 都有 $\|S_n(u)\|_{M_n(V)} \leq \|u\|_n$. 因此 $S: \mathcal{M}_E \rightarrow V$ 是完全压缩的, 由稠密性延拓定理可得 $S: W \rightarrow Z$ 是良定义的完全有界映射.

定义映射 $F: \Sigma \rightarrow L(\mathcal{M}_E)$ 为

$$F(B) \left(\sum_k b_k E_{B_k, x_k} \right) = \sum_k b_k E_{B \cap B_k, x_k}.$$

现在验证对于任意的 $C \in \Sigma$, $F(C)$ 是完全有界的. 对于 $u \in M_n(\mathcal{M}_E)$, 有

$$\begin{aligned}
\|F(C)_n(u)\|_n &= \left\| \left(F(C) \left(\sum_k b_k^{i,j} E_{B_k^{i,j}, x_k^{i,j}} \right) \right) \right\|_n = \left\| \left(\sum_k b_k^{i,j} E_{C \cap B_k^{i,j}, x_k^{i,j}} \right) \right\|_n \\
&= \sup_{B \in \Sigma} \left\| \left(\sum_k b_k^{i,j} E(B \cap C \cap B_k^{i,j}) x_k^{i,j} \right) \right\|_n \\
&\leq \sup_{B' \in \Sigma} \left\| \left(\sum_k b_k^{i,j} E(B' \cap B_k^{i,j}) x_k^{i,j} \right) \right\|_n \\
&= \|u\|_n,
\end{aligned}$$

并且易证对于任意的 n , 都有 $F(B)_n F(B)_n = F(B)_n$, 由此可得 $F: \Sigma \rightarrow CB(W)$ 是良定义的投影值测度.

类似于一般算子值测度的扩张的证明, 可得 $F: \Sigma \rightarrow CB(\mathcal{M}_E)$ 是强可数可加的, 并且 F 是一致有界的. 由稠密延拓可知, $F: \Sigma \rightarrow CB(W)$ 是完全有界算子值测度 E 的投影值扩张. 此外, 直接验证可得 $E(B) = SF(B)T$ 对于任意的 $B \in \Sigma$ 成立. $\square$

注 3.1 与 Banach 空间的扩张相比, Junge 等^[22] 引入了算子空间的完全有界基. Liu 和 Ruan^[25] 引入了可分算子空间的完全有界框架, 给出算子空间的完全有界逼近性质新的刻画. 类似于有界逼近性质的 Banach 空间上的算子值测度和算子的扩张结果 (参见定理 2.5 和 2.6), 可进一步建立有完全有界逼近性质的算子空间上和完全有界算子值测度的有完全有界基的算子空间上的投影值测度扩张理论, 留给感兴趣的读者.

4 Banach 格上的扩张理论

定义 4.1 一个实线性空间 X 上存在偏序关系 “ $\geq$ ” 并且满足如下陈述:

- (1) 对于任意的 $x, y, z \in X$, 如果 $x \geq y$, 则对于任意的 $z \in X$, 都有 $x + z \geq y + z$;
- (2) 对于任意的 $x, y \in X$, 如果 $x \geq y$, 则对于任意的正实数 r , 都有 $rx \geq ry$,

则称 $(X, \geq)$ 为一个偏序向量空间.

设 $(X, \geq)$ 为一个偏序向量空间, 若 $x \in X$ 且满足 $x \geq 0$, 则称 x 为正向量. 所有的正向量构成的集合, 记作 $X^+ = \{x \in X : x \geq 0\}$, 称为 $(X, \geq)$ 的正锥. 一般情形下, $X \supseteq X^+ - X^+$. 当 $X = X^+ - X^+$ 时, 称 X^+ 是 X 的生成正锥. 注意到 X^+ 满足 $-X^+ \cap X^+ = \{0\}$ 且对 X 上的加法运算和正数乘封闭. 事实上, 向量空间 X 上任何一个满足这 3 个条件的子集 C 都可以定义 X 上的一个偏序关系: 对于 $x, y \in X$, 如果 $x - y \in C$, 则定义 $x \geq_C y$. 可以验证 $\geq_C$ 为 X 上的一种偏序关系, 并且满足定义 4.1 中的 (1) 和 (2). 因此正锥与偏序向量空间有一一对应的关系.

如果一个偏序向量空间 $(X, \geq)$ 上的偏序关系满足: 对于任意的两个向量 $x, y \in X$, 子集 $\{x, y\}$ 的上确界 (最小上界) 和下确界 (最大下界) 都存在, 则称它为一个向量格. 一般将 $\{x, y\}$ 的上确界记作 $x \vee y$, 下确界记作 $x \wedge y$. 对于任意的 $x \in X$, 记 $x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$ 和 $|x| = x \vee (-x)$. 容易证明 $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$ 并且 $x^+ \wedge x^- = 0$. 注意到, 由 $x = x^+ - x^-$ 可知, 向量格的正锥一定是其生成正锥. 如果 $x, y \in X$ 且 $|x| \wedge |y| = 0$, 则称 x 和 y 是不交的, 记作 $x \perp y$. 因此也称 $x = x^+ - x^-$ 是 x 的不交分解, 可以证明这种不交分解是唯一的, x^+ 和 x^- 分别称为 x 的正部和负部. 一般情形下, 向量格 X 中任意两个向量 x 和 y 总是满足三角不等式 $\|x\| - \|y\| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$, 当 $x \perp y$ 时, $\|x\| - \|y\| = \|x - y\| = \|x + y\| = \|x\| + \|y\| = \|x\| \vee \|y\|$.

一个赋范偏序向量空间 X 为一个具有偏序结构的赋范向量空间并且 X^+ 是范数闭的, 如果 X 又是范数完备的, 那么称为偏序 Banach 空间. 如果 X 上的范数满足单调性, 即若 $x \geq y \geq 0$, 则 $\|x\| \geq \|y\|$, 那么称 $\|\cdot\|$ 为单调范数. 在赋范向量格中, 我们一般要求其范数是单调的, 从而对于其中任意的向量 x , 都有 $\|x\| = \||x|\|$. 范数完备的向量格称为 Banach 格.

给定两个偏序向量空间 X 和 Y , 若线性算子 $T: X \rightarrow Y$ 满足 $T(X^+) \subseteq Y^+$, 则称 T 为一个正算子, 记作 $T \geq 0$. 如果 T 可以分解为两个正算子的差, 则称 T 为正则算子. 由所有从 X 到 Y 的正则算子构成的线性空间记作 $L_r(X, Y)$, $L_r(X, Y)^+$ 则表示其中所有的正算子. 设 X 为一个向量格, 如果 X 上的线性算子 T 满足: 存在常数 $\lambda \in \mathbb{R}^+$, 使得对于任意的 $x \in X$, 都有 $|Tx| \leq \lambda|x|$, 则称 T 为一个

中心算子. 容易证明, 任意正的中心算子是一个格同态, 即 $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ ($\forall x, y \in X$). 由 X 上所有中心算子构成的集合记作 $\mathcal{Z}(X)$. 一般情形下, $L_r(X)$ 只是一个以 $L_r(X, Y)^+$ 为正锥的偏序向量空间, 然而 $\mathcal{Z}(X)$ 总是一个向量格 (参见文献 [1, 定理 3.30]). 具体而言, 对于任意的 $T, S \in \mathcal{Z}(X)$, $x \in X^+$, 都有

$$(T \vee S)(x) = T(x) \vee S(x), \quad (T \wedge S)(x) = T(x) \wedge S(x),$$

对于任意的 $y \in X$, 都有 $|T|(|y|) = |T(|y|)| = |Ty|$. 当 X 是一个 Banach 格时, $L_r(X) \subseteq B(X)$, $\mathcal{Z}(X)$ 关于算子范数构成一个 Banach 格 (参见文献 [1, 定理 3.31]). 为了讨论方便, 记 $\mathcal{Z}(X)^+ = \mathcal{Z}(X) \cap L_r(X)^+$.

在偏序 Banach 空间中, 可以定义相应的正测度. 设 Σ 是非空集合 Ω 上的 σ -代数, X 为一个偏序 Banach 空间. 若一个向量值测度 (在经典的向量值测度理论中, 向量值测度的可数可加性由值域空间的范数定义) $m: \Sigma \rightarrow X$ 满足 $m(\Sigma) \subseteq X^+$, 则称 m 为正的向量值测度. 由向量值测度的有限可加性可知, 一个正的向量值测度一定是单调的, 即若 $B \subseteq A$, 则 $m(B) \leq m(A)$. 再结合 m 的可数可加性和 Banach 格上范数的单调性 (参见文献 [3, 引理 2.3]) 可知, Σ 中任意单调递增的一系列集合 $\{B_n\}_{n=1}^\infty$, $\{m(B_n)\}_{n=1}^\infty$ 在 X 中的上确界总是存在, 并且等于 $m(\bigcup_{n=1}^\infty B_n)$. 因此经典的向量值测度理论中的正测度属于文献 [10] 中定义的正测度 (其可数可加性由单调序收敛定义). 将由所有 Σ 上取值在 X 内的测度构成的集合记作 $M(\Sigma, X)$, 由所有正测度构成的集合记作 $M(\Sigma, X)^+$. 容易证明 $M(\Sigma, X)$ 为一个偏序向量空间, 其正锥为 $M(\Sigma, X)^+$.

类似地, 也可以定义正算子值测度. 设 X 为 Banach 格, 若算子值测度 $E: \Sigma \rightarrow B(X)$ 满足 $E(\Sigma) \subseteq L_r(X)^+$, 则称它为正的算子值测度. 进而, 若 E 取值在正的投影算子中, 则称它为正的谱测度. 正算子值测度也是正测度, 因此具有单调性, 其可数可加性也可推导出单调收敛性.

接下来, 将集中讨论 Banach 格中正算子值测度的扩张问题.

引理 4.1 令 X 为 Banach 格, $E: \Sigma \rightarrow L_r(X)^+$ 为正算子值测度.

(1) 对于任意的 $x \in X^+$, $B \in \Sigma$, 都有 $E_{B,x} \in M(\Sigma, X)^+$.

此外, 当 E 取值在 $\mathcal{Z}(X)^+$ 时, 还有如下结论:

(2) 对于任意的 $x, y \in X$, $B \in \Sigma$, $\{E_{B,x}, E_{B,y}\}$ 在 $M(\Sigma, X)$ 中的上下确界存在并且满足

$$E_{B,x} \vee E_{B,y} = E_{B,x \vee y}, \quad E_{B,x} \wedge E_{B,y} = E_{B,x \wedge y}; \quad (4.1)$$

(3) 对于任意的 $x \in X$, $B \in \Sigma$, $\{E_{B,x^+}, E_{B,x^-}\}$ 在 $M(\Sigma, X)$ 中的下确界存在且为零测度, 上确界存在并且满足

$$E_{B,x^+} \vee E_{B,x^-} = E_{B,|x|}, \quad (4.2)$$

因此 $|E_{B,x}|$ 存在且等于 $E_{B,|x|}$;

(4) 对于任意的 $x, y \in X$, $A, B \in \Sigma$, 当 $x \perp y$ 时, $\{|E_{B,x}|, |E_{A,y}|\}$ 在 $M(\Sigma, X)$ 中的下确界存在且为零测度, 上确界存在并且满足

$$|E_{B,x}| \vee |E_{A,y}| = |E_{B,x}| + |E_{A,y}| = |E_{B,x} + E_{A,y}|. \quad (4.3)$$

证明 由于每一个 $E(B)$ 为 X 上的正算子, 因此对于任意的 $A, B \in \Sigma$ 和 $x \in X^+$, 都有 $E_{B,x}(A) = E(A \cap B)x \in X^+$. (1) 得证.

接下来, 证明 (2). 我们只验证 $E_{B,x} \vee E_{B,y} = E_{B,x \vee y}$, 关于下确界的证明类似.

因为 E 为正测度, 因此 $E_{B,x \vee y}$ 是 $\{E_{B,x}, E_{B,y}\}$ 在 $M(\Sigma, X)$ 中的上界. 任取它的另一个上界 m , 则在 X 中, 对于任意的 $C \in \Sigma$, 都有 $m(C) \geq E_{B,x}(C)$, $m(C) \geq E_{B,y}(C)$, 所以

$$m(C) \geq E(B \cap C)x \vee E(B \cap C)y.$$

又因为 $E(B \cap C) \in \mathcal{Z}(X)^+$, 所以 $E(B \cap C)x \vee E(B \cap C)y = E(B \cap C)(x \vee y)$, 因此 $m(C) \geq E_{B,x \vee y}(C)$. 由于上述不等式对于任意的 $C \in \Sigma$ 成立, 因此 $m \geq E_{B,x \vee y}$, 即 $E_{B,x \vee y}$ 是 $\{E_{B,x}, E_{B,y}\}$ 在 $M(\Sigma, X)$ 中的上确界.

(3) 可由 (2) 直接推导出.

最后, 证明 (4). 显然, 对于任意的 $x, y \in X$, $A, B \in \Sigma$, 零测度是 $\{|E_{B,x}|, |E_{A,y}|\}$ 的下界. 我们还需证明, 当 $x \perp y$ 时, 零测度是 $\{|E_{B,x}|, |E_{A,y}|\}$ 的最大下界. 假设 $m \in M(\Sigma, X)$ 是其另一个下界, 则对于任意的 $C \in \Sigma$, 都有

$$\begin{aligned} m(C) &\leq |E_{B,x}|(C) \wedge |E_{A,y}|(C) \\ &= E_{B,|x|}(C) \wedge E_{A,|y|}(C) \\ &= E(B \cap C)|x| \wedge E(A \cap C)|y| \\ &\leq E(C)|x| \wedge E(C)|y| \\ &= E(C)(|x| \wedge |y|) \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此 $|E_{B,x}| \wedge |E_{A,y}| = 0$. 从而, $|E_{B,x}| \vee |E_{A,y}| = |E_{B,x}| + |E_{A,y}|$.

要证明 (4.3), 还需要证明 $\{E_{B,x} + E_{A,y}, -(E_{B,x} + E_{A,y})\}$ 在 $M(\Sigma, X)$ 中有上确界且等于 $|E_{B,x}| + |E_{A,y}|$. 显然 $|E_{B,x}| + |E_{A,y}|$ 为其上界. 任取 $\nu \in M(\Sigma, X)$ 为另一个上界, 则对于任意的 $C \in \Sigma$, 都有

$$\nu(C) \geq [E(B \cap C)x + E(A \cap C)y] \vee [-E(B \cap C)x - E(A \cap C)y],$$

由于 $E(A \cap C), E(B \cap C) \in \mathcal{Z}(X)^+$, $x \perp y$, 因此上述不等式右边等于

$$E(B \cap C)x \vee E(B \cap C)(-x) + E(A \cap C)y \vee E(A \cap C)(-y) = E(B \cap C)|x| + E(A \cap C)|y|.$$

因此 $\nu(C) \geq E_{B,|x|}(C) + E_{A,|y|}(C)$. 结合 (3) 可知 $\nu \geq |E_{B,x}| + |E_{A,y}|$. □

不难证明, 第 2 节中定义的范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 在 $M(\Sigma, X)$ 中是单调的, 结合引理 4.1, 还有以下结论:

引理 4.2 令 X 为 Banach 格, $E: \Sigma \rightarrow \mathcal{Z}(X)$ 为正算子值测度, 则对于任意的 $x, y \in X$, $A, B \in \Sigma$, 当 $x \perp y$ 时, 都有

$$\|E_{B,x} + E_{A,y}\|_\alpha = \| |E_{B,x} + E_{A,y}| \|_\alpha = \|E_{B,|x|} + E_{A,|y|}\|_\alpha. \quad (4.4)$$

证明 由 $E(\Sigma) \subseteq \mathcal{Z}(X)^+$ 可知, 对于任意的 $C \in \Sigma$, 都有

$$0 \leq |E_{B,x}(C)| \wedge |E_{A,y}(C)| = E(B \cap C)|x| \wedge E(A \cap C)|y| = 0.$$

因此 $|E_{B,x}(C) + E_{A,y}(C)| = |E_{B,x}(C)| + |E_{A,y}(C)|$. 从而,

$$\|E_{B,x} + E_{A,y}\|_\alpha = \sup_{C \in \Sigma} \|E_{B,x}(C) + E_{A,y}(C)\|$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{C \in \Sigma} \|E_{B,x}(C) + E_{A,y}(C)\| \\
&= \sup_{C \in \Sigma} \|E(B \cap C)x + E(A \cap C)y\| \\
&= \sup_{C \in \Sigma} \|E(B \cap C)|x| + E(A \cap C)|y|\| \\
&= \sup_{C \in \Sigma} \|E_{B,|x|}(C) + E_{A,|y|}(C)\| \\
&= \|E_{B,|x|} + E_{A,|y|}\|_{\alpha}.
\end{aligned}$$

再结合 (4.3), 可以得到 (4.4). $\square$

接下来, 将讨论定理 2.5 在 Banach 格中的情形. 如果 $(x_i, f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ 本身是 X 的 Schauder 框架且 $x_i \in X^+$, $f_i \in (X^*)^+$ ($\forall i \in \mathbb{N}$), 则称它为偏序 Banach 空间 X 上一组正 Schauder 框架. 如果 $(x_i, f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ 满足对于任意的 $i \neq j$, x_i 和 x_j 不交 (在偏序空间中两个向量 x 和 y 不交当且仅当 $|x|$ 和 $|y|$ 存在, 并且 $\{|x|, |y|\}$ 的下确界也存在且为 0), 则称它为两两不交的 Schauder 框架. 类似地, 还可以定义偏序 Banach 空间上正 Schauder 基和 Banach 格上两两不交的 Schauder 基. 注意到, 利用 Banach 格上任意向量具有唯一的不交分解, 容易得到 Banach 格 X 上存在一组 Schauder 框架 (基), 当且仅当 X 上存在一组正 Schauder 框架 (基).

为了证明简洁, 引入记号 span^+ . 设 Y 是偏序空间 X 的非空子集, $\text{span}^+\{Y\}$ 表示由所有 Y 中的向量的有限正线性组合构成的集合, 即若 $y \in \text{span}^+\{Y\}$, 则存在 $y_1, y_2, \dots, y_k \in Y$ 和 $r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{R}^+$ 使得 $y = r_1 y_1 + r_2 y_2 + \dots + r_k y_k$.

定理 4.1 令 X 为一个具有两两不交的正 Schauder 框架 $(x_i, f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ 的 Banach 格, $E: \Sigma \rightarrow \mathcal{Z}(X)$ 为正算子值测度. 则存在偏序 Banach 空间 Z 以及 $T \in B(X, Z)$, $S \in B(Z, X)$ 和谱测度 $F: \Sigma \rightarrow B(Z)$ 满足以下性质:

- (1) 对于任意的 $B \in \Sigma$, 都有 $E(B) = SF(B)T$;
- (2) Z 是由一组两两不交的正向量值测度 $\{E_{i,j}\}_{(i,j) \in F}$ 关于范数 $\|\cdot\|_{\alpha}$ 所生成的 Banach 空间, 其中, $E_{i,j} = E_{\{i\}, x_j}$, $F = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : E(\{i\})x_j \neq 0\}$;
- (3) 记 $Z_0 = \text{span}\{E_{i,j} : (i, j) \in F\}$, Z_0 作为 $M(\Sigma, X)$ 的子空间是一个偏序向量空间, 且 Z_0 具有生成正锥与 $\text{span}^+\{E_{i,j} : (i, j) \in F\}$ 重合;
- (4) Z 具有生成正锥 $\overline{Z_0^+}$, 即 $Z = \overline{Z_0^+} - \overline{Z_0^+}$;
- (5) $T \geq 0$, $F \geq 0$, $S \geq 0$ 且 T 保持 X 上的格结构.

证明 结合定理 2.5, 我们只需验证定理中与偏序结构有关的结论. 为了证明简洁, 将 $\{E_{i,j}\}_{(i,j) \in F}$ 简记为 $\{E_{i,j}\}$. 由引理 4.1(1) 和 4.1(4) 可知 $\{E_{i,j}\} \subseteq M(\Sigma, X)^+$ 且两两不交. 接下来证明 (3).

显然 $Z_0 \subseteq M(\Sigma, X)$. 因此 Z_0 为一个偏序向量空间, 其正锥为 $Z_0^+ = Z_0 \cap M(\Sigma, X)^+$. 因为 $\{E_{i,j}\} \subseteq M(\Sigma, X)^+$, 所以 $\text{span}^+\{E_{i,j}\} \subseteq Z_0^+$. 为了证明 $\text{span}^+\{E_{i,j}\} = Z_0^+$, 任取 $m \in Z_0^+$, 不妨设 $m = \sum_{(i,j) \in I \times J} \alpha_{i,j} E_{i,j}$, 其中 $I \times J \subset F$ 且 I 和 J 为 $\mathbb{N}$ 的有限子集. 由于 $m \geq 0$, 所以对于任意的可测集 B , 都有 $m(B) \in X^+$. 令 B 取遍 $\{i\}$ ($i \in I$), 可知 $\alpha_{i,j} E(\{i\})x_j \in X^+$. 注意到 $E(\{i\})x_j \in X^+$, 因此 $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}^+$. 所以 $m \in \text{span}^+\{E_{i,j}\}$.

由于 $Z_0^+ \subseteq Z_0$, 为了验证 Z_0^+ 是 Z_0 的生成正锥, 我们只需验证对于任意的 $m \in Z_0$, m 可分解成两个 $\text{span}^+\{E_{i,j}\}$ 中的向量. 设 $m = \sum_{(i,j) \in I \times J} \alpha_{i,j} E_{i,j}$, 其中 $I \times J \subset F$ 且 I 和 J 为 $\mathbb{N}$ 的有限子集. 由于 $m = \sum_{(i,j) \in I \times J} (\alpha_{i,j} \vee 0) E_{i,j} - \sum_{(i,j) \in I \times J} (-\alpha_{i,j} \vee 0) E_{i,j}$, 且 $\sum_{(i,j) \in I \times J} (\alpha_{i,j} \vee 0) E_{i,j}$ 和 $\sum_{(i,j) \in I \times J} (-\alpha_{i,j} \vee 0) E_{i,j}$ 均为 $\text{span}^+\{E_{i,j}\}$ 中的测度, 因此 m 属于 $Z_0^+ - Z_0^+$.

接下来, 进一步验证 Z 是一个具有生成正锥的偏序空间, 即 (4).

显然 $\overline{Z_0^+}$ 满足 $\overline{Z_0^+} \cap (-\overline{Z_0^+}) = \{0\}$, 它对加法和正数乘封闭, 因此 $\overline{Z_0^+}$ 构成一个正锥. 由 $\overline{Z_0^+} \subseteq Z$ 可知 $\overline{Z_0^+} - \overline{Z_0^+} \subseteq Z$. 下面还需证明反向的包含关系. 取 $m \in Z$, 设 $\{m_n\}_{n=1}^\infty \subseteq Z_0$ 使得 $\|m_n - m\|_\alpha \rightarrow 0$.

由引理 4.1(4) 可知, 对于每一个 m_n , $|m_n|$ 存在且属于 Z_0^+ , 我们将证明 $\{|m_n|\}_{n=1}^\infty$ 关于 $\|\cdot\|_\alpha$ 构成一个 Cauchy 列. 对于任意的 $n, k \in \mathbb{N}$, 不妨设 $m_n = \sum_{(i,j) \in F_n} \alpha_{i,j} E_{i,j}$, $m_k = \sum_{(s,t) \in F_k} \beta_{s,t} E_{s,t}$, 其中 F_n 和 F_k 为 F 中的有限集合. 由引理 4.1(3) 和 4.1(4) 可知,

$$|m_n| = \sum_{(i,j) \in F_n} |\alpha_{i,j}| E_{i,j}, \quad |m_k| = \sum_{(s,t) \in F_k} |\beta_{s,t}| E_{s,t}.$$

再结合 $E(\Sigma) \subseteq \mathcal{Z}(X)^+$ 以及 $\{x_j\}$ 两两不交, 可得

$$\begin{aligned} \||m_n| - |m_k|\|_\alpha &= \sup_{B \in \Sigma} \left\| \sum_{(i,j) \in F_n} |\alpha_{i,j}| E_{i,j}(B) - \sum_{(s,t) \in F_k} |\beta_{s,t}| E_{s,t}(B) \right\| \\ &= \sup_{B \in \Sigma} \left\| \sum_{(i,j) \in F_n} |\alpha_{i,j}| E(\{i\} \cap B) x_j - \sum_{(s,t) \in F_k} |\beta_{s,t}| E(\{s\} \cap B) x_t \right\| \\ &= \sup_{B \in \Sigma} \left\| \sum_{(i,j) \in F_n} \alpha_{i,j} E(\{i\} \cap B) x_j - \sum_{(s,t) \in F_k} \beta_{s,t} E(\{s\} \cap B) x_t \right\| \\ &\leq \sup_{B \in \Sigma} \left\| \sum_{(i,j) \in F_n} \alpha_{i,j} E(\{i\} \cap B) x_j - \sum_{(s,t) \in F_k} \beta_{s,t} E(\{s\} \cap B) x_t \right\| \\ &= \|m_n - m_k\|_\alpha. \end{aligned}$$

由 $\{m_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛可知 $\{|m_n|\}_{n=1}^\infty$ 是 Z_0^+ 中的 Cauchy 列. 因此存在 $\mu \in \overline{Z_0^+}$ 使得 $\|\mu - |m_n|\|_\alpha \rightarrow 0$. 注意到 $\{|m_n| - m_n\} \subseteq Z_0^+$, 且收敛到 $\mu - m$, 因此 $\mu - m \in \overline{Z_0^+}$. 而 $m = \mu - (\mu - m)$, 所以 $m \in \overline{Z_0^+} - \overline{Z_0^+}$.

由 (3) 和 (4) 可知, T 和 S 的正性可直接由其线性和正锥对加法封闭得到. 关于 T 保持格结构的性质可由引理 4.1(2) 得到. 对于任意的 $B \in \Sigma$ 和 $E_{i,j}$, $F(B)E_{i,j} = E_{B \cap \{i\}, x_j}$ 属于 $\overline{Z_0^+}$. 结合 $\overline{Z_0^+}$ 是一个正锥可知 F 为正测度. $\square$

注 4.1 一般情形下, 定理 4.1 中的 Z 不是一个 Banach 格, 原因在于 $E(A) \vee E(B)$ 不一定在 E 的像中, 从而导致 $\{E_{A,x}, E_{B,x}\}$ 在 $M(\Sigma, X)$ 中不一定存在上下确界, 即使存在也不一定属于 Z_0 . 因此也不能直接称 T 为格同态.

推论 4.1 在定理 4.1 的条件下, 令 $\phi: l^\infty \rightarrow B(X)$ 和 $\pi: l^\infty \rightarrow B(Z)$ 分别为由 E 和 F 生成的线性算子, 则 ϕ 和 π 均为正算子.

证明 由 E 和 F 为正测度容易知道 $\phi: c_{00} \rightarrow B(X)$ 和 $\pi: c_{00} \rightarrow B(Z)$ 均为正.

由于 X^* 区分 X 上的点, X^+ 关于弱拓扑封闭, 所以 $\phi: l^\infty \rightarrow B(X)$ 为正算子. 同理可证 $\pi \geq 0$. $\square$

致谢 对审稿人以及同行专家表达衷心的感谢.

参考文献

- 1 Abramovich Y A, Aliprantis C D. An Invitation to Operator Theory. Graduate Studies in Mathematics, vol. 50. Providence: Amer Math Soc, 2002
- 2 Aldroubi A, Gröchenig K. Nonuniform sampling and reconstruction in shift-invariant spaces. SIAM Rev, 2001, 43: 585–620

- 3 Aliprantis C D, Tourky R. Cones and Duality. Graduate Studies in Mathematics, vol. 84. Providence: Amer Math Soc, 2007
- 4 Arveson W. Dilation theory yesterday and today. In: A Glimpse at Hilbert Space Operators. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 207. Basel: Birkhäuser Verlag, 2010, 99–123
- 5 Banach S. Théorie des Opérations Linéaires. Warszawa: Z Subwencji Funduszu Kultury Narodowej, 1932
- 6 Beanland K, Freeman D, Liu R. Upper and lower estimates for Schauder frames and atomic decompositions. Fund Math, 2015, 231: 161–188
- 7 Casazza P G. Approximation properties. In: Handbook of the Geometry of Banach Spaces. Amsterdam: North-Holland, 2001
- 8 Casazza P G, Han D, Larson D R. Frames for Banach spaces. Contemp Math, 1999, 247: 149–182
- 9 Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Cham: Birkhäuser, 2003
- 10 de Jeu M, Jiang X. Order integrals. Positivity, 2022, 26: 32
- 11 Diestel J, Jarchow H, Tonge A. Absolutely Summing Operators. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 43. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 12 Enflo P. A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. Acta Math, 1973, 130: 309–317
- 13 Godefroy G, Kalton N J. Lipschitz-free Banach spaces. Studia Math, 2003, 159: 121–141
- 14 Gröchenig K. Foundations of Time-Frequency Analysis. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Boston: Birkhäuser, 2001
- 15 Grothendieck A. Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires. Memoirs of the American Mathematical Society. Providence: Amer Math Soc, 1955
- 16 Gupta V P, Mandayam P, Sunder V. The Functional Analysis of Quantum Information Theory. Lecture Notes in Physics. Cham: Springer, 2015
- 17 Han D, Hu Q F, Larson D R, et al. Dilations for operator-valued quantum measures. arXiv:2109.09042, 2021
- 18 Han D, Larson D R. Frames, Bases and Group Representations. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 697. Providence: Amer Math Soc, 2000
- 19 Han D, Larson D R, Liu B, et al. Operator-Valued Measures, Dilations, and the Theory of Frames. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 229. Providence: Amer Math Soc, 2014
- 20 Han D, Larson D R, Liu R. Dilations of operator-valued measures with bounded p -variations and framings on Banach spaces. J Funct Anal, 2018, 274: 1466–1490
- 21 Johnson W B, Rosenthal H P, Zippin M. On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces. Israel J Math, 1971, 9: 488–506
- 22 Junge M, Nielsen N J, Ruan Z J, et al. COL_p spaces—The local structure of non-commutative L_p spaces. Adv Math, 2004, 187: 257–319
- 23 Liu P D. Fundamentals of Functional Analysis (in Chinese). Beijing: Science Press, 2005 [刘培德. 泛函分析基础. 北京: 科学出版社, 2005]
- 24 Liu P D. Martingale and Banach Space Geometry (in Chinese). Beijing: Science Press, 2007 [刘培德. 鞅与 Banach 空间几何学. 北京: 科学出版社, 2007]
- 25 Liu R, Ruan Z J. Cb-frames for operator spaces. J Funct Anal, 2016, 270: 4280–4296
- 26 Liu R, Shen J, Zheng B T. Operators with the Lipschitz bounded approximation property. Sci China Math, 2023, 66: 1545–1554
- 27 Nagy B S, Foias C, Bercovici H, et al. Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space. New York: Springer, 2010
- 28 Paulsen V. Completely Bounded Maps and Operator Algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 2002
- 29 Pełczyński A. Any separable Banach space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with a basis. Studia Math, 1971, 40: 239–243
- 30 Pełczyński A, Wojtaszczyk P. Banach spaces with finite dimensional expansions of identity and universal bases of finite dimensional subspaces. Studia Math, 1971, 40: 91–108
- 31 Pisier G. Similarity Problems and Completely Bounded Maps, 2nd ed. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1618. Berlin: Springer-Verlag, 2001
- 32 Pisier G. Introduction to Operator Space Theory, vol. 294. Cambridge: Cambridge University Press, 2003
- 33 Pisier G. Tensor Products of C^* -Algebras and Operator Spaces: The Connes-Kirchberg Problem. Cambridge: Cambridge University Press, 2020
- 34 Ruan Z J. Subspaces of C^* -algebras. J Funct Anal, 1988, 76: 217–230
- 35 Rudin W. Real and Complex Analysis. New York: McGraw-Hill, 1970
- 36 Szarek S J. A Banach space without a basis which has the bounded approximation property. Acta Math, 1987, 159:

81–98

- 37 Takesaki M. Theory of Operator Algebras I. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 124. Berlin-Heidelberg: Springer, 2003
- 38 Xu Q H, Bekjan T N, Chen Z Q. Introduction to Operator Algebras and Non-Commutative L_p Spaces (in Chinese). Beijing: Science Press, 2010 [许全华, 吐尔德别克, 陈泽乾. 算子代数与非交换 L_p 空间引论. 北京: 科学出版社, 2010]

Approximation property and operator dilation theory of Banach spaces and lattices

Qiyao Bao, Qianfeng Hu, Xingni Jiang & Rui Liu

Abstract In this paper, we introduce the main results of Banach space dilation theory. Based on this, and using the equivalent relation between the bounded approximation property of Banach spaces and Schauder frames, we study the dilation of operator-valued measures and finite rank operators on Banach spaces with the bounded approximation property. We also obtain the dilation result of the completely bounded operator-valued measures on operator spaces. Finally, we also consider the dilation of operator-valued measures on Banach lattices with Schauder frames. We mainly focus on the partial order structure of the elementary dilation spaces and the preserved properties of the maps in the dilation to the partial order structure.

Keywords dilation theory, operator-valued measure, bounded approximation property, operator space, Banach lattice

MSC(2020) 46B15, 46B28, 46B42, 47A20

doi: 10.1360/SSM-2022-0231