二维风险模型中 Copula 相依下的破产概率

郁一彬

中国人民银行杭州中心支行, 杭州 310001

E-mail: yybjoe@163.com

收稿日期: 2011-04-21; 接受日期: 2012-03-25

国家自然科学基金 (批准号: 70871103 和 10901138) 资助项目

摘要 在本文中, 我们把 Copula 连结函数用到二维的风险模型中, 考虑两个模型索赔额之间基于 Copula 的相依关系. 首先对二维复合 Poisson 模型给出了最早破产时刻定义下的生存概率满足的偏微分方程; 然后对二维的复合二项模型, 分别在连续型索赔额分布和离散型索赔额分布下给出了不同定义的生存概率和破产概率的递归公式, 并且特别选择了 FGM Copula 连结函数, 给出了相应的结果; 另外在离散型分布下, 对于其 Copula 函数的不唯一性进行了说明.

关键词 二维风险模型 复合 Poisson 模型 复合二项模型 Copula 连结函数 破产概率

MSC (2010) 主题分类 62P05, 91B30

1 引言

1.1 研究背景和模型建立

对于风险模型的研究, 很多学者一直以来都在努力通过各种角度去放宽模型独立同分布等理想条件的限制. 这方面的工作, 除了可以去考虑其受到的外界随机环境的影响外, 也可以探究模型自身内部的相依关系. 而对于相依关系, Copula 连结函数则是其中被广为关注的. 特别是在近些年来, 用 Copula 方法来刻画随机变量之间的相依关系也在保险精算以及金融风险管理等领域越来越普遍, 本文也将从这一角度出发考察模型自身的相依关系.

其中对于一维模型, 有不少学者从不同的模型、不同的角度进行了研究, 特别是索赔发生时间间隔和索赔额之间的相依关系, 例如 Albrecher 和 Boxma^[1] 考虑了 Poisson 模型的索赔强度依赖于前一次索赔额大小这样的相依关系; Albrecher 和 Teugels^[2] 利用 Copula 连结函数讨论了索赔间隔时间和索赔额间的任意相依关系; Boudreault 等人^[3] 则在复合 Poisson 模型下讨论了索赔额完全依赖于本次索赔距离上次索赔间隔时间的一些性质; Cossette 等人^[4] 在 2008 年具体给出了 FGM Copula 连结函数运用到复合 Poisson 模型中的一些结果. 而对于多维模型, 则更多的考虑索赔发生之间的相依性, 比如 Ambagaspitiya^[5,6]; 还有 Cossette 等人^[7] 在 2002 年的文章中对两个风险模型建立了不同体系的相依关系, 其中就包括基于 Copula 连结函数; 而 Dang 等人^[8] 在 2009 年, 则对两个 Poisson 过程的强度通过三个独立的 Poisson 过程中对两个模型都起作用的其中一个建立起相依关系, 我们第 2 节考虑的模型也将继续保留了这一想法.

我们将在如下的二维风险模型中, 用 Copula 连结函数来考虑模型的相依性问题:

$$X^k(t) = u_k + c_k(t) - S_k(t), \quad k = 1, 2, \quad (1.1)$$

其中, $k = 1, 2$ 表示模型中两个不同的, 或者说两类不同质的产品. u_k 表示初始资产, $c_k(t)$ 表示随时间变化的保费收入, 而 $S_k(t)$ 表示到时间 t 所产生的索赔总额. 此时, 破产时间可以有不同的定义. 在我们的模型中将考虑以下两类比较容易理解、也比较受关注的定义:

1. 两个过程中最早出现破产的时刻: $T_{\text{or}} = T_1 \wedge T_2$.
2. 两个过程同时发生破产的时刻: $T_{\text{sim}} = \min\{n : X^k(n) < 0, k = 1, 2\}$.

其中 T_1 和 T_2 为一维情形的破产时刻, 即 $T_1 = \inf\{t : X^1(t) < 0\}$, $T_2 = \inf\{t : X^2(t) < 0\}$, 并且定义 $\inf\{\emptyset\} = \infty$. 从而可以由此定义不同的破产概率, 将在下面出现时再具体给出定义.

对于 $S_1(t)$ 和 $S_2(t)$ 的非独立性, 之前的研究往往只注重两者的索赔时间间隔的相依性, 而假设索赔额分布为相互独立的. 本文则将关注索赔额分布基于 Copula 的相依关系, 这一方面扩展了对模型相依性的考虑角度, 另一方面也能在一定程度上契合某些实际保险产品的相依性质. 而对于索赔发生的情况则根据复合 Poisson 和复合二项模型的特点分别考虑, 从而得到关于破产概率的一些简单的结果. 本文首先给出 Copula 连结函数的基本定义和性质; 在第 2 节, 考虑复合 Poisson 情形中索赔额 Copula 相依下的共同生存概率; 在第 3 节, 针对索赔额分布的连续型和离散型分别考虑相应相依关系下的共同生存概率和同时破产概率. 同时, 对离散情形下的相关研究给出进一步的说明, 并对其 Copula 不唯一性进行了解释.

1.2 Copula 相依关系

我们首先给出一些关于 Copula 的基本定义和性质.

定义 1 n 元函数 $C: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ 被称为 n 维 Copula 连结函数, 如果它满足如下条件:

- (1) $C(\cdot)$ 关于每个分量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 单调递增;
- (2) 其边际分布 C_n 满足 $C_n(x) = C(1, \dots, 1, x, 1, \dots, 1) = x$, 对于任意的 $x \in [0, 1]$;
- (3) 对于两个元素 $(x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n})$ 和 $(x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n})$ 均属于 $[0, 1]^n$, 满足对于任意的 $k = 1, 2, \dots, n$, 有 $x_{1,k} \leq x_{2,k}$, 则

$$\sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\cdots+i_n} C(x_{i_1,1}, x_{i_2,2}, \dots, x_{i_n,n}) \geq 0.$$

对于 Copula 连结函数, 有一个非常重要的定理: Sklar 定理, 是我们风险理论运用 Copula 方法的基础.

Sklar 定理 设 F 为 n 维随机变量的分布函数, 并且其边际分布 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 均为连续函数, 则存在唯一的 Copula 连结函数 C , 有如下表达式:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)).$$

从上面的定义和 Sklar 定理, 可以这样理解, Copula 函数可以把多元随机变量的联合分布与它们的边际分布联系在一起, 并且在连续分布的情况下具有唯一性. 因此在考虑多个随机变量时, 便可以通过对 Copula 连结函数的刻画来体现它们的相依性, 从而把它们的联合分布通过各自的边际分布来

表示. 同时, 联合分布的密度函数 f 也可以由各自的边际密度函数 f_i 和边际分布 F_i 通过下面的关系得到:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i),$$

其中 n 元函数 c 为 Copula 连结函数 C 对应的密度函数, 定义为:

$$c(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial C(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}.$$

更多的内容, 读者可以参见 [9, 10].

2 复合 Poisson 模型情形

本节中, 我们首先考虑二维复合 Poisson 模型, 改写上面的模型如下:

$$X^k(t) = u_k + c_k t - \sum_{i=1}^{N_k(t)} Y_i^k, \quad k = 1, 2, \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

此时 c_k 表示两类产品保费随时间的收入比率, 均为常数. $\sum_{i=1}^{N_k(t)} Y_i^k$ 为复合 Poisson 过程, Poisson 强度为 λ_k , 而索赔额服从非负连续型分布 F_{Y^k} , 密度函数为 f_{Y^k} , 分别简记为 F_k 和 f_k .

对于相依性, 一方面延续 Dang 等人 [8] 对索赔发生情况所作的假设, 即 $N_1(t) = N_{11}(t) + N_{12}(t)$, $N_2(t) = N_{22}(t) + N_{12}(t)$, 其中 $N_{11}(t)$, $N_{12}(t)$, $N_{22}(t)$ 为相互独立的 Poisson 过程, 强度分别为 λ_{11} , λ_{12} 和 λ_{22} , 因此 $\lambda_1 = \lambda_{11} + \lambda_{12}$, $\lambda_2 = \lambda_{22} + \lambda_{12}$. 由此可以看出索赔发生的相依性就是通过共同的 $N_{12}(t)$ 来体现的. 更进一步对于索赔额分布的相依性, 假设当两个模型均发生索赔时, 也即由 $N_{12}(t)$ 同时引起索赔时, 两者的索赔额联合分布由一个 Copula 函数给出. 而各自发生索赔时则只依赖于各自的边际分布.

此时我们考虑 T_{or} 定义下的无破产概率, 即

$$\phi_{\text{or}}(u_1, u_2) = 1 - P^{(u_1, u_2)}(T_{\text{or}} < \infty).$$

对于 $u_1 < 0$ 或者 $u_2 < 0$, 则 $\phi_{\text{or}}(u_1, u_2) = 0$. 具体结果在下面的定理给出.

注 为方便起见, 本文用 $P^{(u_1, u_2)}(\cdot)$ 来表示 $P(\cdot | X^1(0) = u_1, X^2(0) = u_2)$.

定理 2.1 在二维复合 Poisson 模型 (2.1) 中, 对于 $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$, 索赔额 Y^1 和 Y^2 的分布分别为 F_1 和 F_2 , 对应的密度函数为 f_1 和 f_2 , 其联合密度由 Copula 连结函数 C 的密度函数 c 确定, 并且无破产概率 $\phi_{\text{or}}(u_1, u_2)$ 有连续的偏导数, 则它满足如下的偏微分方程:

$$\begin{aligned} & c_1 \frac{\partial \phi_{\text{or}}(u_1, u_2)}{\partial u_1} + c_2 \frac{\partial \phi_{\text{or}}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \\ &= (\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{22}) \phi_{\text{or}}(u_1, u_2) - \lambda_{11} \int_0^{u_1} \phi_{\text{or}}(u_1 - y_1, u_2) f_1(y_1) dy_1 \\ & \quad - \lambda_{22} \int_0^{u_2} \phi_{\text{or}}(u_1, u_2 - y_2) f_2(y_2) dy_2 \\ & \quad - \lambda_{12} \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \phi_{\text{or}}(u_1 - y_1, u_2 - y_2) c(F_1(y_1), F_2(y_2)) f_1(y_1) f_2(y_2) dy_1 dy_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

证明 对于二维风险模型的盈余过程 $\{X^1(t), X^2(t)\}$, 考虑在一个很短的时间 h 内的变化, 并且考虑四个可能的情况:

- (1) 没有索赔发生, 概率为 $e^{-(\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{22})h}$;
 - (2) 只发生了一次索赔, 即模型 1 发生而模型 2 没有发生, 为 $\lambda_{11}e^{-(\lambda_{12}+\lambda_{22})h} \int_0^h e^{-\lambda_{11}t} dt$, 或者模型 2 发生而模型 1 没有发生, 为 $\lambda_{22}e^{-(\lambda_{11}+\lambda_{12})h} \int_0^h e^{-\lambda_{22}t} dt$;
 - (3) 各发生了一次索赔, 则为 $\lambda_{12}e^{-(\lambda_{11}+\lambda_{22})h} \int_0^h e^{-\lambda_{12}t} dt$;
 - (4) 有更多的索赔发生, 则根据 Poisson 过程的定义, 我们知道其为 $o(h)$.
- 然后根据全概率法则, 把这几种概率应用到无破产概率中, 可以得到如下:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{or}}(u_1, u_2) &= e^{-(\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{22})h} \phi_{\text{or}}(u_1 + c_1h, u_2 + c_2h) \\ &\quad + \lambda_{11}e^{-(\lambda_{12}+\lambda_{22})h} \int_0^h \int_0^{u_1+c_1t} e^{-\lambda_{11}t} \phi_{\text{or}}(u_1 + c_1t - y_1, u_2 + c_2t) f_1(y_1) dy_1 dt \\ &\quad + \lambda_{22}e^{-(\lambda_{11}+\lambda_{12})h} \int_0^h \int_0^{u_2+c_2t} e^{-\lambda_{22}t} \phi_{\text{or}}(u_1 + c_1t, u_2 + c_2t - y_2) f_2(y_2) dy_2 dt \\ &\quad + \lambda_{12}e^{-(\lambda_{11}+\lambda_{22})h} \int_0^h \int_0^{u_1+c_1t} \int_0^{u_2+c_2t} e^{-\lambda_{12}t} \phi_{\text{or}}(u_1 + c_1t - y_1, u_2 + c_2t - y_2) \\ &\quad f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 dt + o(h). \end{aligned} \quad (2.3)$$

对于等式右边的第一项, 利用 Taylor 展开可以得到:

$$\begin{aligned} &e^{-(\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{22})h} \phi_{\text{or}}(u_1 + c_1h, u_2 + c_2h) \\ &= (1 - (\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{22})h) \left[\phi_{\text{or}}(u_1, u_2) + c_1 \frac{\partial \phi_{\text{or}}(u_1, u_2)}{\partial u_1} h + c_2 \frac{\partial \phi_{\text{or}}(u_1, u_2)}{\partial u_2} h + o(h) \right]. \end{aligned}$$

最后, 把上述 Taylor 展开以及由 Copula 连结密度函数 c 表示的联合密度函数代入到 (2.3) 中, 同时对 h 求导并且令 h 趋向于 0, 便得到了偏微分方程 (2.2). $\square$

在定理 2.1 中, 我们假设了无破产概率有连续的偏导数, Dang 等人在 2010 年的文章中给出了其充分条件为分布密度函数的导数绝对可积, 我们特别给出如下命题.

命题 2.2 Y^1 和 Y^2 的分布密度函数分别为 f_1 和 f_2 . 假设对于 $i = 1, 2$, 均有 $\int_0^\infty |f'_i(y_i)| dy_i < \infty$. 则无破产概率 $\phi_{\text{or}}(u_1, u_2)$ 在 $[0, \infty) \times [0, \infty)$ 上连续可微.

具体来讲, 不妨选取一类具体的参数为 β 的 FGM (Farlie-Gumbel-Morgenstern) Copula 连结函数来确定索赔之间的相依关系. 其表达式为:

$$C_\beta(x, y) = xy + \beta xy(1-x)(1-y), \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad (2.4)$$

并且对应的密度函数为:

$$c_\beta(x, y) = 1 + \beta(1-2x)(1-2y). \quad (2.5)$$

于是, 对于本节考虑的二维模型中的索赔额, 其联合分布可以记为:

$$\begin{aligned} F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= C_\beta(F_{Y_1}(y_1), F_{Y_2}(y_2)) \\ &= F_{Y_1}(y_1)F_{Y_2}(y_2) + \beta F_{Y_1}(y_1)F_{Y_2}(y_2)(1 - F_{Y_1}(y_1))(1 - F_{Y_2}(y_2)), \end{aligned} \quad (2.6)$$

其联合密度函数则为:

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = c_\beta(F_{Y_1}(y_1), F_{Y_2}(y_2)) f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2)$$

$$= f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2) + \beta f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)(1 - 2F_{Y_1}(y_1))(1 - 2F_{Y_2}(y_2)). \quad (2.7)$$

若应用到上述定理中, 便可以得到以下推论:

推论 2.3 在定理 2.1 的条件下, 若 C 为 FGM Copula 连结函数, 则无破产概率 $\phi_{\text{or}}(u_1, u_2)$ 满足如下的偏微分方程:

$$\begin{aligned} & c_1 \frac{\partial \phi_{\text{or}}(u_1, u_2)}{\partial u_1} + c_2 \frac{\partial \phi_{\text{or}}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \\ &= (\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{22})\phi_{\text{or}}(u_1, u_2) - \lambda_{11} \int_0^{u_1} \phi_{\text{or}}(u_1 - y_1, u_2) f_1(y_1) dy_1 \\ & \quad - \lambda_{22} \int_0^{u_2} \phi_{\text{or}}(u_1, u_2 - y_2) f_2(y_2) dy_2 \\ & \quad - \lambda_{12} \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \phi_{\text{or}}(u_1 - y_1, u_2 - y_2) f_1(y_1) f_2(y_2) dy_1 dy_2 \\ & \quad - \beta \lambda_{12} \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \phi_{\text{or}}(u_1 - y_1, u_2 - y_2) f_1(y_1)(1 - 2F_1(y_1)) f_2(y_2)(1 - 2F_2(y_2)) dy_1 dy_2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

证明 对于等式 (2.3) 中的第四项, 把 FGM Copula 相依的密度函数代入, 即可以得到:

$$\begin{aligned} & \lambda_{12} e^{-(\lambda_{11} + \lambda_{22})h} \int_0^h \int_0^{u_1 + c_1 t} \int_0^{u_2 + c_2 t} e^{-\lambda_{12}t} \phi_{\text{or}}(u_1 + c_1 t - y_1, u_2 + c_2 t - y_2) f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 dt \\ &= \lambda_{12} e^{-(\lambda_{11} + \lambda_{22})h} \left[\int_0^h \int_0^{u_1 + c_1 t} \int_0^{u_2 + c_2 t} e^{-\lambda_{12}t} \phi_{\text{or}}(u_1 + c_1 t - y_1, u_2 + c_2 t - y_2) \right. \\ & \quad \left. f(y_1) f_2(y_2) dy_1 dy_2 dt + \beta \int_0^h \int_0^{u_1 + c_1 t} \int_0^{u_2 + c_2 t} e^{-\lambda_{12}t} \phi_{\text{or}}(u_1 + c_1 t - y_1, u_2 + c_2 t - y_2) \right. \\ & \quad \left. \times f(y_1, y_2)(1 - 2F_1(y_1))(1 - 2F_2(y_2)) dy_1 dy_2 dt \right]. \end{aligned}$$

把该结果代入到 (2.2) 中, 即可得到 (2.8).

注 如果我们令 $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 0$, 并且直接记 $\lambda_{12} = \lambda$ 则上面得到的偏微分方程 (2.2) 和 (2.8) 分别可以简化为:

$$\begin{aligned} & c_1 \frac{\partial \phi_{\text{or}}(u_1, u_2)}{\partial u_1} + c_2 \frac{\partial \phi_{\text{or}}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \\ &= \lambda \phi_{\text{or}}(u_1, u_2) - \lambda_{12} \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \phi_{\text{or}}(u_1 - y_1, u_2 - y_2) c(F_1(y_1), F_2(y_2)) f_1(y_1) f_2(y_2) dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & c_1 \frac{\partial \phi_{\text{or}}(u_1, u_2)}{\partial u_1} + c_2 \frac{\partial \phi_{\text{or}}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \\ &= \lambda \phi_{\text{or}}(u_1, u_2) - \lambda_{12} \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \phi_{\text{or}}(u_1 - y_1, u_2 - y_2) f_1(y_1) f_2(y_2) dy_1 dy_2 \\ & \quad - \beta \lambda_{12} \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \phi_{\text{or}}(u_1 - y_1, u_2 - y_2) f_1(y_1)(1 - 2F_1(y_1)) f_2(y_2)(1 - 2F_2(y_2)) dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

对于这个假设, 可以说这两个模型所描述的险种在索赔发生上是一致的, 而在索赔额上存在相依关系, 因此两者的相依关系非常强. 这在实际中, 会出现在对于同一大型标的物的不同类型的保险中, 而对于这样的险种, 更是需要放在一起考虑, 所以这样的假设也是很有实用意义.

3 复合二项模型情形

3.1 索赔额连续分布

在这一节, 我们把同样的问题放入到二维的复合二项模型, 由于 Copula 相依关系的唯一性对随机变量有连续性的要求, 因此首先考虑索赔分布为连续型的情形, 并重新给出模型定义:

$$X^k(n) = u_k + n - \sum_{i=1}^n Y_i^k, \quad k = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

在复合二项模型中, 时间是通过离散的 $n = 1, 2, \dots$ 来记录. 而此时第 i 时刻的索赔 Y_i^k 则表示为:

$$Y_i^k = \begin{cases} B_i^k, & I_i^k = 1, \\ 0, & I_i^k = 0. \end{cases}$$

其中 $\underline{I}^k = \{I_i^k, i \in \mathbb{N}\}, k = 1, 2$ 为 Bernoulli 随机变量序列, 表示索赔是否发生, 各自独立同分布, 并且相互间也独立, 其均值记为 α_1 和 α_2 . 而 $\underline{B}^k = \{B_i^k, i \in \mathbb{N}\}, k = 1, 2$ 为非负随机变量序列, 表示索赔发生时的索赔额, 并且对于不同的 k , 各自独立同分布, 服从非负连续型分布 F_{B^k} , 密度函数为 f_{B^k} , 分别简记为 F_k 和 f_k . 在此时的模型中, 我们同样用一个 Copula 连结函数来表示两类产品在同时发生索赔时索赔额的相依关系.

现在, 我们在下面的定理中给出有限时间的无破产概率, 即,

$$\phi_{\text{or}}^{(u_1, u_2)}(n) = 1 - P^{(u_1, u_2)}(T_{\text{or}} \leq n)$$

的递归公式.

定理 3.1 在二维复合二项模型 (3.1) 中, 对于 $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$, 索赔额 B^1 和 B^2 的分布分别为 F_1 和 F_2 , 对应的密度函数为 f_1 和 f_2 , 其联合密度由 Copula 连结函数 C 的密度函数 c 确定, 索赔发生的二项过程相互独立, 其参数分别为 α_1 和 α_2 , 则有限时间的无破产概率 $\phi_{\text{or}}^{(u_1, u_2)}(n), n \in \mathbb{N}^+$ 满足如下的递归公式,

$$\begin{aligned} \phi_{\text{or}}^{(u_1, u_2)}(n) = & \alpha_1(1 - \alpha_2) \int_0^{u_1+1} \phi_{\text{or}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1)}(n-1) f_1(y_1) dy_1 \\ & + \alpha_2(1 - \alpha_1) \int_0^{u_2+1} \phi_{\text{or}}^{(u_1+1, u_2+1-y_2)}(n-1) f_2(y_2) dy_2 \\ & + \alpha_1 \alpha_2 \int_0^{u_1+1} \int_0^{u_2+1} \phi_{\text{or}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1-y_2)}(n-1) c(F_1(y_1), F_2(y_2)) f_1(y_1) f_2(y_2) dy_1 dy_2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中, 初始条件为:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{or}}^{(z_1, z_2)}(1) = & \alpha_1(1 - \alpha_2) F_1(z_1 + 1) + \alpha_2(1 - \alpha_1) F_2(z_2 + 1) \\ & + \alpha_1 \alpha_2 C(F_1(z_1 + 1), F_2(z_2 + 1)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

注 证明过程是平凡的, 只要考虑时刻 1 时没有破产, 并且类似定理 2.1 把 Copula 连结函数所表示的联合密度函数代入等式即可.

进一步, 再考虑有限时间内同时发生破产的概率, 即,

$$\psi_{\text{sim}}^{(u_1, u_2)}(n) = P^{(u_1, u_2)}(T_{\text{sim}} \leq n).$$

由 T_{sim} 破产时间的定义, 此时并不一定要求初始资产均大于 0. 在下面定理给出其递归公式.

定理 3.2 在二维复合二项模型 (3.1) 中, 索赔额 B^1 和 B^2 的分布分别为 F_1 和 F_2 , 对应的密度函数为 f_1 和 f_2 , 其联合密度由 Copula 连结函数 C 的密度函数 c 确定, 索赔发生的二项过程相互独立, 其参数分别为 α_1 和 α_2 , 则有限时间的同时破产概率 $\psi_{\text{sim}}^{(u_1, u_2)}(n)$, $n \in \mathbb{N}^+$ 满足如下的递归公式,

$$\begin{aligned} \psi_{\text{sim}}^{(u_1, u_2)}(n) = & \alpha_1(1 - \alpha_2) \int_0^\infty \psi_{\text{sim}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1)}(n-1) f_1(y_1) dy_1 \\ & + \alpha_2(1 - \alpha_1) \int_0^\infty \psi_{\text{sim}}^{(u_1+1, u_2+1-y_2)}(n-1) f_2(y_2) dy_2 \\ & + \alpha_1 \alpha_2 \int_0^\infty \int_0^\infty \psi_{\text{sim}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1-y_2)}(n-1) c(F_1(y_1), F_2(y_2)) f_1(y_1) f_2(y_2) dy_1 dy_2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中, 初始条件为:

$$\psi_{\text{sim}}^{(z_1, z_2)}(k) = 1, \quad z_1 < 0, \quad z_2 < 0, \quad k \in \mathbb{N}^+, \quad (3.5)$$

对于 z_1 和 z_2 至少有一个不小于 0 的初始条件, 有如下结果. 不妨保证 $z_1 \geq 0$, 反过来只要对换两者的位置即可.

$$\psi_{\text{sim}}^{(z_1, z_2)}(1) = \begin{cases} \alpha_1 \alpha_2 \int_{z_1+1}^\infty \int_{z_2+1}^\infty c(F_1(y_1), F_2(y_2)) f_1(y_1) f_2(y_2) dy_1 dy_2, & z_1 \geq 0, \quad z_2 \geq -1, \\ \alpha_1(1 - F_1(z_1 + 1)), & z_1 \geq 0, \quad z_2 < -1. \end{cases} \quad (3.6)$$

注 和定理 3.1 类似, 对于 (3.4), 可以很容易的通过考虑时刻 1 的情形以及把 Copula 函数表示的联合密度函数代入即可得到. 在这里只需要对初始条件进行一定的说明. 当递归到两个模型的资产均小于 0 时, 自然递归停止, 得到了所要的结果. 而若在递归阶段中, 始终保持有至少一个模型的资产大于等于 0, 则需要递归到最后一个时刻, 因此初始条件的第二点为 $\psi_{\text{sim}}^{(z_1, z_2)}(1)$. 结果中由于两者的位置其实是等价的, 所以不妨只给出 $z_1 \geq 0$ 的情形, 而区分 z_2 是否大于等于 -1 . 因为若 $z_2 < -1$, 则无论 Y^2 是否发生索赔, 模型 2 必然在下一时刻继续保持破产状态, 因此只要观察 Y^1 即可. 而具体的结果也是显而易见的.

同样, 若选取 FGM Copula 连结函数来决定索赔额之间的相依关系, 则可以把上述的结果更具体地表示为以下的两个推论.

推论 3.3 在定理 3.1 的条件下, 若 C 为 FGM Copula 连结函数, 则有限时间的无破产概率 $\phi_{\text{or}}^{(u_1, u_2)}(n)$, $n \in \mathbb{N}^+$ 满足如下的递归公式:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{or}}^{(u_1, u_2)}(n) = & \alpha_1(1 - \alpha_2) \int_0^{u_1+1} \phi_{\text{or}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1)}(n-1) f_1(y_1) dy_1 \\ & + \alpha_2(1 - \alpha_1) \int_0^{u_2+1} \phi_{\text{or}}^{(u_1+1, u_2+1-y_2)}(n-1) f_2(y_2) dy_2 \\ & + \alpha_1 \alpha_2 \int_0^{u_1+1} \int_0^{u_2+1} \phi_{\text{or}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1-y_2)}(n-1) f_1(y_1) f_2(y_2) dy_1 dy_2 \\ & + \beta \alpha_1 \alpha_2 \int_0^{u_1+1} \int_0^{u_2+1} \phi_{\text{or}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1-y_2)}(n-1) f_1(y_1) (1 - 2F_1(y_1)) \\ & \times f_2(y_2) (1 - 2F_2(y_2)) dy_1 dy_2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中初始条件为:

$$\begin{aligned}\phi_{\text{or}}^{(z_1, z_2)}(1) &= \alpha_1(1 - \alpha_2)F_1(z_1 + 1) + \alpha_2(1 - \alpha_1)F_2(z_2 + 1) \\ &\quad + \alpha_1\alpha_2F_1(z_1 + 1)F_2(z_2 + 1) \\ &\quad + \beta\alpha_1\alpha_2(F_1(z_1 + 1) - F_1^2(z_1 + 1))(F_2(z_2 + 1) - F_2^2(z_2 + 1)).\end{aligned}\quad (3.8)$$

对于推论 3.3, 只要把连结函数的具体表达式代入即可. 而对于下面的推论 3.4, 也只要更多的对初始条件的第二部分进行积分及合并, 便能得到 (3.11).

推论 3.4 在定理 3.2 的条件下, 若 C 为 FGM Copula 连结函数, 则有限时间的同时破产概率 $\psi_{\text{sim}}^{(u_1, u_2)}(n)$, $n \in \mathbb{N}^+$ 满足如下的递归公式:

$$\begin{aligned}\psi_{\text{sim}}^{(u_1, u_2)}(n) &= \alpha_1(1 - \alpha_2) \int_0^\infty \psi_{\text{sim}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1)}(n-1)f_1(y_1)dy_1 \\ &\quad + \alpha_2(1 - \alpha_1) \int_0^\infty \psi_{\text{sim}}^{(u_1+1, u_2+1-y_2)}(n-1)f_2(y_2)dy_2 \\ &\quad + \alpha_1\alpha_2 \int_0^\infty \int_0^\infty \psi_{\text{sim}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1-y_2)}(n-1)f_1(y_1)f_2(y_2)dy_1dy_2 \\ &\quad + \beta\alpha_1\alpha_2 \int_0^\infty \int_0^\infty \psi_{\text{sim}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1-y_2)}(n-1)f_1(y_1)(1 - 2F_1(y_1)) \\ &\quad \times f_2(y_2)(1 - 2F_2(y_2))dy_1dy_2,\end{aligned}\quad (3.9)$$

其中初始条件为:

$$\psi_{\text{sim}}^{(z_1, z_2)}(k) = 1, \quad z_1 < 0, \quad z_2 < 0, \quad k \in \mathbb{N}^+, \quad (3.10)$$

对于 z_1 和 z_2 至少有一个不小于 0 的初始条件, 有如下结果. 不妨保证 $z_1 \geq 0$, 反过来只要对换两者的位置即可.

$$\psi_{\text{sim}}^{(z_1, z_2)}(1) = \begin{cases} \alpha_1\alpha_2[(1 - F_1(z_1 + 1))(1 - F_2(z_2 + 1)) \\ \quad + \beta(1 - F_1(z_1 + 1))^2(1 - F_2(z_2 + 1))^2 \\ \quad \times (1 + F_1(z_1 + 1))(1 + F_2(z_2 + 1))], & z_1 \geq 0, \quad z_2 \geq -1, \\ \alpha_1(1 - F_1(z_1 + 1)), & z_1 \geq 0, \quad z_2 < -1. \end{cases} \quad (3.11)$$

3.2 索赔额离散分布

在这一小节, 我们假设索赔额 B^k 为严格正的整数型离散随机变量, 还是使用同样的记号, 令它们的分布函数为 F_{B^k} , 分布列为 f_{B^k} , 分别简记为 F_k 和 f_k . 并且初始资产 u_k 也相应假设为整数. 若它们同时发生索赔时, 它们的联合分布函数由 Copula 连结函数给出, 即对于 $(y_1, y_2) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$,

$$F_{B^1, B^2}(y_1, y_2) = C(F_{B^1}(y_1), F_{B^2}(y_2)).$$

而对于分布列, 则不同于连续情形是利用 Copula 连结函数的密度函数表示, 而是根据离散分布的定义由下式给出:

$$f_{B^1, B^2}(y_1, y_2) = F_{B^1, B^2}(y_1, y_2) - F_{B^1, B^2}(y_1 - 1, y_2) - F_{B^1, B^2}(y_1, y_2 - 1) + F_{B^1, B^2}(y_1 - 1, y_2 - 1),$$

其中, 若 $y_1 = 0$ 或者 $y_2 = 0$, 则 $F_{B^1, B^2}(y_1, y_2) = 0$. 正如 Nelsen^[10] 在书中提到的, 这样的联合分布列是定义在 (Y_1, Y_2) 的支撑集上的. 因此从定义上看, 对于一个给定的联合分布, 能找到的 Copula 连结函数将不再唯一, 因为除了支撑集上的限制以外, 满足 Copula 定义各个函数都能成为该联合分布的 Copula 连结函数. 从而人们在根据所选的 Copula 连结函数进行讨论时可能就会出现偏差, 因为不同的连结函数在相依关系的本质上可能就存在不同, 这可以说是在离散情形中最主要的不足.

但是用 Copula 方法来对二元分布建立相依性依然是很有效的, 并且也受到很多的关注. 很多随机性质还是随着 Copula 连结函数能够继承下来, 比如随机序等等. 读者也可以通过一些相关的文章对此得到更多的信息, 比如 Cossette 和 Marceau^[11] 在 2000 年的考虑了 Poisson 的连续情形, 也考虑了负二项的离散模型, 当然不同于本文的是, 他们依然考虑的索赔间隔的相依关系; Marceau^[12] 在 2009 年考虑的复合二项模型, 对它的时间间隔和索赔额之间建立了相依关系, 包括多种二元几何分布之间的相依关系, 同时也建立了基于 Copula 连结函数的离散的相依关系等等. 特别地, 关于离散分布的 Copula 问题, Genest 和 Nešlehová^[13] 在 2007 年的文章中, 做了非常好的总结. 他们对于在离散情形下的 Copula 方法使用可能碰到的危险以及局限都作了仔细的阐述, 对 Copula 连结函数的参数估计问题也做了详细的讨论. 同时他们对其不唯一性, 讨论了可能存在的距离, 包括在不同的距离定义下, 对于一族 Copula 连结函数的 Carley 界. 另一个考虑角度, 是考虑所谓的一族 Copula 连结函数的“平坦性”, 他们给出其具体的结果如下:

命题 3.5 若 (X, Y) 为一对整数型随机变量, 联合分布设为 H , 边际分布为 F 和 G . 并且对于任意的 $i, j \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, 令 $R_{ij} = (F(i-1), F(i)] \times (G(j-1), G(j)]$. 则对于任意的 $C, D \in \mathcal{C}_H$, 即任意两个满足 H 的 Copula 连结函数, 对于 $u, v \in (0, 1)$, 有

$$\begin{aligned} |C(u, v) - D(u, v)| &\leq 2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \{\Pr(X = i) + \Pr(Y = j)\} \mathbf{1}_{R_{ij}}(u, v) \\ &\leq 2 \left\{ \max_{i \in \mathbb{N}} \Pr(X = i) + \max_{j \in \mathbb{N}} \Pr(Y = j) \right\}. \end{aligned}$$

因为对于随机变量的支撑集, 两个 Copula 连结函数的值是一样的, 所以从直观理解我们也可以想象到, 函数在非支撑集上某点的差距依赖于在它相邻的支撑点的跳跃. 由这个命题, 我们可以看到对于连续分布的情形, 两者的差距自然就收缩到 0, 即从另一个角度证明了连续情形下 Copula 连结函数的唯一性. 而对于现在离散分布, 通过这个命题容易看到, 若 X 或者 Y 的取值个数很少, 则很容易在某点堆积较大的概率, 从而会造成 Copula 连结函数的很大的“不平坦性”, 偏离的越多, 越可能使我们对联合分布中两者的相依性判断出现偏差. 关于进一步的考虑, 读者可以参考他们文中更多的内容. 而对于实际保险模型, 考虑离散型索赔额分布时, 一般都具有较大的保险金额. 也就是说索赔额理论上可以取值的量实际是非常大的, 虽然保险索赔往往还是以较大的概率集中在保险金额以下的某一个区间内, 但我们对于实际的考虑, 依然可以假定能够获得较好的“平坦性”, 特别若取值的概率在一个大的范围内“均匀”分布的话, 可以认为两个 Copula 连结函数的差距将会是足够小的. 因此当我们选取一类 Copula 连结函数考虑其相依性时依然可以有足够的参考价值.

对于我们下面给出的两个破产概率的递归结果, 现在直接给出选取了 FGM Copula 连结函数作为相依关系时的结果. 同时, 虽然如上面的讨论, 对同一联合分布, 可能受到 Copula 选取不唯一的困扰, 但是由于此时得到的递归结果只依赖于联合分布在其支撑集上的值, 所以这样得到的结果避免了不唯一性所带来的影响. 至少在这个问题上, 结果是确定的. 现在我们首先给出离散情形下, 对于无破产概率 $\phi_{\text{or}}^{(u_1, u_2)}(n)$ 的结果.

定理 3.6 在二维复合二项模型 (3.1) 中, 初始资产 $u_1, u_2 \in \mathbb{N}$, 严格正的整数型索赔额 B^1 和 B^2 的分布分别为 F_1 和 F_2 , 对应的分布列为 f_1 和 f_2 , 其联合分布由参数为 β 的 FGM Copula 连结函数确定, 索赔发生的二项过程相互独立, 其参数分别为 α_1 和 α_2 , 则有限时间的无破产概率 $\phi_{\text{or}}^{(u_1, u_2)}(n)$, $n \in \mathbb{N}^+$ 满足如下的递归公式,

$$\begin{aligned} \phi_{\text{or}}^{(u_1, u_2)}(n) = & \alpha_1(1 - \alpha_2) \sum_{y_1=1}^{u_1+1} \phi_{\text{or}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1)}(n-1) f_1(y_1) \\ & + \alpha_2(1 - \alpha_1) \sum_{y_2=1}^{u_2+1} \phi_{\text{or}}^{(u_1+1, u_2+1-y_2)}(n-1) f_2(y_2) \\ & + \alpha_1 \alpha_2 \sum_{y_1=1}^{u_1+1} \sum_{y_2=1}^{u_2+1} \phi_{\text{or}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1-y_2)}(n-1) f_1(y_1) f_2(y_2) \\ & + \beta \alpha_1 \alpha_2 \sum_{y_1=1}^{u_1+1} \sum_{y_2=1}^{u_2+1} \phi_{\text{or}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1-y_2)}(n-1) \\ & \times f_1(y_1) f_2(y_2) (1 - F_1(y_1 - 1) - F_1(y_1)) (1 - F_2(y_2 - 1) - F_2(y_2)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中初始条件为:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{or}}^{(z_1, z_2)}(1) = & \alpha_1(1 - \alpha_2) F_1(z_1 + 1) + \alpha_2(1 - \alpha_1) F_2(z_2 + 1) \\ & + \alpha_1 \alpha_2 F_1(z_1 + 1) F_2(z_2 + 1) \\ & + \beta \alpha_1 \alpha_2 (F_1(z_1 + 1) - F_1^2(z_1 + 1)) (F_2(z_2 + 1) - F_2^2(z_2 + 1)). \end{aligned} \quad (3.13)$$

证明 如前面的考虑, 只要考虑时刻 1 保证不发生破产即可, 所以立即可得,

$$\begin{aligned} \phi_{\text{or}}^{(u_1, u_2)}(n) = & \alpha_1(1 - \alpha_2) \sum_{y_1=1}^{u_1+1} \phi_{\text{or}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1)}(n-1) f_1(y_1) \\ & + \alpha_2(1 - \alpha_1) \sum_{y_2=1}^{u_2+1} \phi_{\text{or}}^{(u_1+1, u_2+1-y_2)}(n-1) f_2(y_2) \\ & + \alpha_1 \alpha_2 \sum_{y_1=1}^{u_1+1} \sum_{y_2=1}^{u_2+1} \phi_{\text{or}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1-y_2)}(n-1) f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2). \end{aligned} \quad (3.14)$$

考虑 $f_{B^1, B^2}(y_1, y_2)$, 因为由离散分布, 有

$$\begin{aligned} f_{B^1, B^2}(y_1, y_2) = & F_{B^1, B^2}(y_1, y_2) - F_{B^1, B^2}(y_1 - 1, y_2) - F_{B^1, B^2}(y_1, y_2 - 1) \\ & + F_{B^1, B^2}(y_1 - 1, y_2 - 1), \end{aligned}$$

此时把 FGM Copula 连结函数代表的联合分布代入上式, 则可以得到

$$\begin{aligned} f_{B^1, B^2}(y_1, y_2) = & F_1(y_1) F_2(y_2) + \beta F_1(y_1) F_2(y_2) (1 - F_1(y_1)) (1 - F_2(y_2)) \\ & - F_1(y_1 - 1) F_2(y_2) - \beta F_1(y_1 - 1) F_2(y_2) (1 - F_1(y_1 - 1)) (1 - F_2(y_2)) \\ & - F_1(y_1) F_2(y_2 - 1) - \beta F_1(y_1) F_2(y_2 - 1) (1 - F_1(y_1)) (1 - F_2(y_2 - 1)) \\ & + F_1(y_1 - 1) F_2(y_2 - 1) + \beta F_1(y_1 - 1) F_2(y_2 - 1) (1 - F_1(y_1 - 1)) (1 - F_2(y_2 - 1)). \end{aligned}$$

对于上式, 分别对第一行和第三行, 第二行和第四行计算, 进行简单的合并, 就可以得到

$$f_{B^1, B^2}(y_1, y_2) = f_1(y_1)f_2(y_2) + \beta f_1(y_1)f_2(y_2)(1 - F_1(y_1) - F_1(y_1 - 1))(1 - F_2(y_2) - F_2(y_2)). \quad (3.15)$$

把 (3.15) 代入到 (3.14) 即可以得到 (3.12).

对于初始条件, 显然有

$$\begin{aligned} \phi_{\text{or}}^{(z_1, z_2)}(1) &= \alpha_1(1 - \alpha_2) \sum_{y_1=1}^{z_1+1} f_1(y_1) + \alpha_2(1 - \alpha_1) \sum_{y_2=1}^{u_2+1} f_2(y_2) + \alpha_1\alpha_2 \sum_{y_1=1}^{z_1+1} \sum_{y_2=1}^{z_2+1} f_1(y_1)f_2(y_2) \\ &\quad + \beta\alpha_1\alpha_2 \sum_{y_1=1}^{z_1+1} \sum_{y_2=1}^{z_2+1} f_1(y_1)f_2(y_2)(1 - F_1(y_1 - 1) - F_1(y_1))(1 - F_2(y_2 - 1) - F_2(y_2)), \end{aligned} \quad (3.16)$$

对于前三项的求和马上就得到需要的结果, 现在只要观察 $\sum_{y_1=1}^{z_1+1} f_1(y_1)(1 - F_1(y_1 - 1) - F_1(y_1))$. 把它写开得到

$$\begin{aligned} \sum_{y_1=1}^{z_1+1} f_1(y_1)(1 - F_1(y_1 - 1) - F_1(y_1)) &= F_1(z_1 + 1) - \sum_{y_1=1}^{z_1+1} f_1(y_1)(F_1(y_1 - 1) - F_1(y_1)) \\ &= F_1(z_1 + 1) - F_1^2(z_1 + 1), \end{aligned}$$

其中第二个等式只要把右边第二部分的求和, 重新写开, 并且把 $f_1(y_1)$ 写成 $F_1(y_1) - F_1(y_1 - 1)$, 这样可以消去中间的所有项, 只剩下 $F_1^2(z_1 + 1)$. 而对于 Y_2 的考虑也是一样, 这样把结果代入 (3.16), 即得到 (3.13). $\square$

注 证明中对于初始条件的证明, 其实从结果的形式我们可以发现, 与之前推论 3.3 的初始条件是一样的. 所以重新考虑证明过程, 直接由下面的等式得到.

$$\begin{aligned} \phi_{\text{or}}^{(z_1, z_2)}(1) &= \alpha_1(1 - \alpha_2) \sum_{y_1=1}^{z_1+1} f_1(y_1) + \alpha_2(1 - \alpha_1) \sum_{y_2=1}^{u_2+1} f_2(y_2) + \alpha_1\alpha_2 \sum_{y_1=1}^{z_1+1} \sum_{y_2=1}^{z_2+1} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) \\ &= \alpha_1(1 - \alpha_2)F_1(z_1 + 1) + \alpha_2(1 - \alpha_1)F_2(z_2 + 1) + \alpha_1\alpha_2F_{Y_1, Y_2}(z_1 + 1, z_2 + 1). \end{aligned}$$

而此时把 FGM Copula 表示的联合分布代入到上式, 便立即得到了 (3.13). 这也说明, 其实抛开联合分布列的表示形式, 只要它们的联合分布的值在支撑集上是相同的, 则选取不同的 Copula 连结函数, 只是影响了其表示形式, 并不会改变该问题下的结果.

而对于同时破产概率 $\psi_{\text{sim}}^{u_1, u_2}(n)$, 由于考虑的方式与前面一样, 只是对于上面注释中那样轻松得到, 按照定理 3.6 的证明所考虑的方式, 通过对联合分布列的具体形式进行仔细的计算就可以得到相应结果. 所以最后直接把它写成推论.

推论 3.7 在定理 3.6 的条件下, 有限时间的同时破产概率 $\psi_{\text{sim}}^{(u_1, u_2)}(n)$, $n \in \mathbb{N}^+$ 满足如下的递归公式,

$$\begin{aligned} \psi_{\text{sim}}^{(u_1, u_2)}(n) &= \alpha_1(1 - \alpha_2) \sum_{y_1=1}^{\infty} \psi_{\text{sim}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1)}(n-1)f_1(y_1) \\ &\quad + \alpha_2(1 - \alpha_1) \sum_{y_2=1}^{\infty} \psi_{\text{sim}}^{(u_1+1, u_2+1-y_2)}(n-1)f_2(y_2) \\ &\quad + \alpha_1\alpha_2 \sum_{y_1=1}^{\infty} \sum_{y_2=1}^{\infty} \psi_{\text{sim}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1-y_2)}(n-1)f_1(y_1)f_2(y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \beta \alpha_1 \alpha_2 \sum_{y_1=1}^{\infty} \sum_{y_2=1}^{\infty} \psi_{\text{sim}}^{(u_1+1-y_1, u_2+1-y_2)} (n-1) f_1(y_1) f_2(y_2) \\
 & (1 - F_1(y_1 - 1) - F_1(y_1))(1 - F_2(y_2 - 1) - F_2(y_2)),
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

其中, 初始条件则为对于整数 z_1 和 z_2 :

$$\psi_{\text{sim}}^{(z_1, z_2)}(k) = 1, \quad z_1 < 0, \quad z_2 < 0, \quad k \in \mathbb{N}^+, \tag{3.18}$$

对于 z_1 和 z_2 至少有一个不小于 0 的初始条件, 有如下结果. 不妨保证 $z_1 \geq 0$, 反过来只要对换两者的位置即可.

$$\psi_{\text{sim}}^{(z_1, z_2)}(1) = \begin{cases} \alpha_1 \alpha_2 [(1 - F_1(z_1 + 1))(1 - F_2(z_2 + 1)) \\ + \beta(1 - F_1(z_1 + 1) + F_1^2(z_1 + 1)) \\ (1 - F_2(z_2 + 1) + F_2^2(z_2 + 1)), & z_1 \geq 0, \quad z_2 \geq -1, \\ \alpha_1(1 - F_1(z_1 + 1)), & z_1 \geq 0, \quad z_2 < -1. \end{cases} \tag{3.19}$$

致谢 作者非常感谢导师张立新教授和张奕教授的指导, 同时也非常感谢中国人民银行杭州中心支行的领导对研究工作的支持和关心.

参考文献

- 1 Albrecher H, Boxma O J. A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals. *Insurance Math Econom*, 2004, 35: 245–254
- 2 Albrecher H, Teugels J. Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. *J Appl Prob*, 2006, 43: 265–285
- 3 Boudreault M, Cossette H, Landriault D, et al. On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes. *Scand Actuar J*, 2006, 301–323
- 4 Cossette H, Marceau E, Marri F. On the compound Poisson risk model with dependence based on a generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern Copula. *Insurance Math Econom*, 2008, 43: 444–455
- 5 Ambagaspitiya R S. On the distribution of a sum of correlated aggregate claims. *Insurance Math Econom*, 1998, 23: 15–19
- 6 Ambagaspitiya R S. On the distribution of two classes of correlated aggregate claims. *Insurance Math Econom*, 1999, 24: 301–308
- 7 Cossette H, Gaillardetz P, Marceau E, et al. On two dependent individual risk models. *Insurance Math Econom*, 2002, 30: 153–166
- 8 Dang L F, Zhu N, Zhang H M. Survival probability for a two-dimensional risk model. *Insurance Math Econom*, 2009, 44: 491–496
- 9 Joe H. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. London: Chapman and Hall, 1997
- 10 Nelsen R B. *An Introduction to Copulas*, Second Edition. In: Springer Series in Statistics. New York: Springer-Verlag, 2006
- 11 Cossette H, Marceau E. The discrete-time risk model with correlated classes of business. *Insurance Math Econom*, 2000, 26: 133–149
- 12 Marceau E. On the discrete-time compound renewal risk model with dependence. *Insurance Math Econom*, 2009, 44: 245–259
- 13 Genest C, Neslehova J. A primer on Copulas for count data. *Insurance Astin Bull*, 2007, 37: 475–515

The ruin probabilities for the two-dimensional risk model based on Copula dependence

YU YiBin

Abstract During the process of applying the Copulas in the two-dimensional risk models, with the consideration of the dependence relation between the claim amounts, the author chooses the FGM Copula to be put into application. For the compound Poisson model, a partial integro-differential equation satisfied by the survival probability is derived. The recursive formula of the finite-time survival or ruin probabilities are then derived separately in the situation of continuous and discrete distribution of claim amount, for the compound binomial model. Furthermore, the uncertainty for the Copulas under the discrete case is also illustrated.

Keywords two-dimensional risk model, compound Poisson model, compound binomial model, Copula, ruin probabilities

MSC(2010) 62P05, 91B30

doi: 10.1360/012011-292