数据包络分析(DEA)

魏权龄

(中国人民大学数学系，北京 100872)

摘要　数据包络分析(简称 DEA)是运筹学、管理科学和数理经济学交叉研究的一个新的领域，是使用数学规划评价具有多个输入与输出的决策单元(简记为 DMU)间的相对有效性(DEA 有效)，即判断 DMU 是否位于生产可能集的“前沿面”上. 使用 DEA 对 DMU 进行效率评价时，可以得到很多在经济学中具有深刻经济含义和背景的管理信息. 介绍 DEA 研究的历史、现状，特别是它的发展过程，同时对某些模型作了扩展. 阐述了数学、经济学和管理科学是这一学科形成的柱石，优化是其研究的主要方法，而 DEA 的广泛应用是它能得以迅速发展的动力.

关键词　数据包络分析　非支配解　生产前沿面

数据包络分析(Data Envelopment Analysis)简称 DEA，是运筹学、管理科学和数理经济学交叉研究的一个新的领域. 它是由 Charnes 和 Cooper 等人[1]于 1978 年开始创建的. DEA 是使用数学规划模型评价具有多个输入和多个输出的“部门”或“单位”(称为决策单元，简记为 DMU)间的相对有效性(称为 DEA 有效). 根据对各 DMU 观察的数据判断 DMU 是否为 DEA 有效，本质上是判断 DMU 是否位于生产可能集的“前沿面”上. 生产前沿面是经济学中生产函数向多产出情况的一种推广,使用 DEA 方法和模型可以确定生产前沿面的结构,因此又可将 DEA 方法看做是一种非参数的统计估计方法.使用 DEA 对 DMU 进行效率评价时，可以得到很多在经济学中具有深刻经济含义和背景的管理信息，因而, DEA 领域的研究吸引了众多的学者[2].

本文讲述 DEA 研究的历史、现状，特别是它的发展过程，同时对某些模型作了扩展. 读者可以了解到数学、经济学和管理科学是这一学科形成的柱石，优化是其研究的主要方法，而 DEA 的广泛应用是它能得以迅速发展的动力. 从中也可以看出 Charnes 和 Cooper 始于 20 世纪 50 年代在运筹学、管理科学和经济学中诸多领域的研究工作对 DEA 的影响和推进.

在科学研究当中，由某个新的“生长点”发展成为一个研究领域(或分支)，是需要经过许多人长期共同努力去完成的. 就 DEA 领域来说, Charnes 和 Cooper，以及他们的学生、合作者和致力于 DEA 的学者们在以下几个方面做了一系列奠基性的工作: (ⅰ) 完成大量应用的实例，说明 DEA 应用的广泛性; (ⅱ) 进行 DEA 模型的计算研究和 DEA 软件的研制，以利于 DEA 方法和模型的实际应用; (ⅲ) DEA 模型的扩充和完善. 例如，加法模型、Log-型的 DEA 模型、关于具有决策者偏好的锥比率的 DEA 模型、具有无穷多个 DMU 的半无限规划的 DEA 模型、随机 DEA 模型，等等; (ⅳ) DEA 模型和方法的经济背景和管理背景研究，确立 DEA 在经济学和管理科学中的地位; (ⅴ) DEA 所依据的数学理论研究，包括凸分析、数学规划、对策论中与 DEA 有关的基础问题研究，等等.

中国学者从事 DEA 的研究始于 1986 年，他们在 DEA 的理论、模型、软件以及应用方面的许多研究成果在国际上受到好评[2~4]. 1988 年公开出版了关于 DEA 的第 1 本专著[5]，严格、系统地论述了 DEA 方法与模型. 据不完全统计，到 2000 年 1 月，被搜集在中国(大陆)学者“数据包络分析(DEA)文献索引”中的中、英文文章有 270 篇[6]. 关于中国学者在 DEA 方面成果的综述与评论，我们将在另一篇文章中给出.

1 第 1 个 DEA 模型 C^2R

DEA 的第 1 个模型是 1978 年由 Charnes 等人[1]给出的. 假设有 n 个部门或单位(称为“决策单元”(Decision Making Units), 简记 DMU). 每个 DMU 都有 m 种输入和 s 种输出, 其数据由表 1 给出, 其中 $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj})^{\mathrm{T}} > 0$, $y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \cdots, y_{sj})^{\mathrm{T}} > 0$, x_{ij} = DMU-j 对第 i 种输入的投入量, y_{rj} = DMU-j 对第 r 种输出的产出量 ($j = 1, 2, \cdots, n$; $i = 1, 2, \cdots, m$; $r = 1, 2, \cdots, s$).

表 1

1	2	…	…	n
x_1	x_2	…	…	x_n
y_1	y_2	…	…	y_n

为方便, 记 DMU-j_0 对应的输入、输出数据分别为 $x_0 = x_{j0}$, $y_0 = y_{j0}$, $1 \leqslant j_0 \leqslant n$. 评价 DMU-$j_0$ 的 DEA 模型(C^2R)为(分式规划)

$$\begin{cases} \max \dfrac{u^{\mathrm{T}} y_0}{v^{\mathrm{T}} x_0} \\ \dfrac{u^{\mathrm{T}} y_j}{v^{\mathrm{T}} x_j} \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0, \quad u \neq 0, \quad v \neq 0 \end{cases}$$

其中 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_m)^{\mathrm{T}}$, $u = (u_1, u_2, \cdots, u_s)^{\mathrm{T}}$ 分别为 m 种输入和 s 种输出的权系数. 利用 1962 年 Charnes 和 Cooper 对于分式规划的 Charnes-Cooper 变换

$$t = \frac{1}{v^{\mathrm{T}} x_0} > 0, \quad w = t v, \quad m = t u,$$

可将分式形式的模型(C^2R)化为等价的线性规划

$$(P_{C^2R}) \begin{cases} \max m^{\mathrm{T}} y_0 = h^0, \\ w^{\mathrm{T}} x_j - m^{\mathrm{T}} y_j \geqslant 0, \ j = 1, 2, \cdots, n, \\ w^{\mathrm{T}} x_0 = 1, \\ w \geqslant 0, \quad m \geqslant 0 \end{cases} \qquad (D_{C^2R}) \begin{cases} \min q, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_j l_j \leqslant q x_0, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y_j l_j \geqslant y_0, \\ l_j \geqslant 0, \ j = 1, 2, \cdots, n, \ q \in E^1. \end{cases}$$

定义 1[5, 7] 若(P_{C^2R})的最优目标值 $h^0 = 1$, 称 DMU-j_0 为弱 DEA 有效(h^0 称为效率指数).

定义 2 若(P_{C^2R})存在最优解 ω^0, μ^0 满足 $\omega^0 > 0$, $\mu^0 > 0$, $\mu^0 y_0 = 1$, 则称 DMU-j_0 为 DEA 有效.

利用线性规划的对偶定理和紧松定理, 可以得到关于 DEA 有效的等价定义.

定义 3 若(D_{C^2R})的任意最优解 θ^0, l_j^0, $j = 1, 2, \cdots, n$, 都满足

$$q^0 = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j l_j^0 = q^0 x_0, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j l_j^0 = y_0,$$

则称 DMU-j_0 为 DEA 有效.

上述的 DEA 模型(P_{C^2R})和(D_{C^2R})是使用数学规划模型将经济学家 Farrell 于 1957 年对于单输出/输入的有效性度量方法推广到多输出/多输入的情况.

利用(P_{C^2R})和(D_{C^2R})判断 DMU 的 DEA 有效性时并不直接. 早在 1952 年 Charnes 在处理线性规划的退化问题时, 在非 Archimedes 域上引进了非 Archimedes 无穷小的概念[1)], 给出了摄动法. 对于 DEA 模型(D_{C^2R}), Charnes 和 Cooper 给出了具有非 Archimedes 无穷小量 e 的 DEA 模型 ($D^e_{C^2R}$):

$$(D^e_{C^2R})\begin{cases}\min\left[q-e\,(\hat{e}^{\mathrm{T}}s^- + e^{\mathrm{T}}s^+)\right],\\ \sum_{j=1}^{n}x_j l_j + s^- = q\,x_0,\quad \sum_{j=1}^{n}y_j l_j - s^+ = y_0,\\ l_j \geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ s^+\geqslant 0,\ s^-\geqslant 0,\ q\in E^1,\end{cases}$$

其中 $\hat{e}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in E^m,\ \ e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in E^s.$

事实上, 存在一个正数 ε, 使得下面的定理成立 (见文献[5]):

定理 1　若 ($D^e_{C^2R}$) 的最优解 $q^0,\ l^0_j,\ j=1,2,\cdots,n,$ 满足

$$q^0=1,\ s^{-0}=0,\ s^{+0}=0,$$

则 DMU-j_0 为 DEA 有效.

2　生产可能集的公理体系和 DEA 模型的扩充

在数理经济学的研究中, 为了研究经济系统的结构, 往往需要引进一些公理. 设生产可能集为

$$T=\{(x,y)\ |\ \text{投入}\ x\in E^m_+,\quad \text{可产出}\ y\in E^s_+\}.$$

关于生产可能集 T, 有如下的一些公理 (见文献[8, 9]):

公理 1 (凸性公理)　若 $(x,y)\in T$, $(\hat{x},\hat{y})\in T$, 则 $\forall a\in[0,1]$, 均有 $a\,(x,y)+(1-a)\,(\hat{x},\hat{y})\in T$.

公理 2 (无效性公理)　若 $(x,y)\in T$, $\hat{x}\geqslant x,\ \hat{y}\leqslant y$, 则 $(\hat{x},\hat{y})\in T$.

公理 3 (平凡公理)　$(x_j,y_j)\in T,\ j=1,2,\cdots,n.$

公理 4a (锥性公理)　若 $(x,y)\in T$, $\alpha\geqslant 0$, 则 $a\,(x,y)\in T$.

公理 4b (压缩性公理)　若 $(x,y)\in T$, $0\leqslant a\leqslant 1$, 则 $a\,(x,y)\in T$.

公理 4c (扩张性公理)　若 $(x,y)\in T$, $1\leqslant a$, 则 $a\,(x,y)\in T$.

公理 5 (最小性公理)　生产可能集 T 是所有满足公理 1~3 或满足公理 1~3 和 4a~4c 中某一个的最小者.

当引进 3 个取值为 0 或 1 的参数 $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ 时, 生产可能集 T 有如下惟一的形式(见文献[9]):

$$T=\left\{(x,y)\ \middle|\ \sum_{j=1}^{n}x_j l_j\leqslant x,\ \sum_{j=1}^{n}y_j l_j\geqslant y,\ d_1\left(\sum_{j=1}^{n}l_j+d_2(-1)^{d_3}l_{n+1}\right)=d_1,\quad l_j\geqslant 0,\right.$$
$$\left. j=1,\ 2,\cdots,n,n+1\right\},$$

1) $\forall a>0$ 及 $\forall N>0$, 都有 $Ne<a$, 称 e 为非 Archimedes 无穷小, 也即 $e>0$ 是比任何大于 0 的数都小的量

特别有

(ⅰ) **当** T **满足公理** 1~3 **和** 4a **及** 5 **时有(相应地**, $d_1=0$)

$$T_{\mathrm{C^2R}}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sum_{j=1}^{n}x_j l_j \leqslant x,\ \sum_{j=1}^{n}y_j l_j \geqslant y,\ l_j \geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n\right\}.$$

(ⅱ) **当** T **满足公理** 1~3 **和** 5 **时有(相应地**, $d_1=1, d_2=0$)

$$T_{\mathrm{BC^2}}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sum_{j=1}^{n}x_j l_j \leqslant x,\ \sum_{j=1}^{n}y_j l_j \geqslant y,\ \sum_{j=1}^{n}l_j=1,\ l_j \geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n\right\}.$$

(ⅲ) **当** T **满足公理** 1~3 **和** 4b **及** 5 **时有(相应地**, $d_1=d_2=1$, $d_3=0$)

$$T_{\mathrm{FG}}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sum_{j=1}^{n}x_j l_j \leqslant x,\ \sum_{j=1}^{n}y_j l_j \geqslant y,\ \sum_{j=1}^{n}l_j \leqslant 1,\ l_j \geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n\right\}.$$

(ⅳ) **当** T **满足公理** 1~3 **和** 4c **及** 5 **时有(相应地**, $d_1=d_2=d_3=1$)

$$T_{\mathrm{ST}}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sum_{j=1}^{n}x_j l_j \leqslant x,\ \sum_{j=1}^{n}y_j l_j \geqslant y,\ \sum_{j=1}^{n}l_j \leqslant 1,\ l_j \geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n\right\}.$$

由此可得到 4 个最具代表性的 DEA **模型** C^2R(Charnes **等人**[1], 1978), BC^2 (Banker[8], 1984), FG(Färe **和** Grosskopf[10],1985), ST(Seiford **和** Thrall[11], 1990). **可以用统一的形式写成**

$$\begin{cases}\min q,\\ (q\,x_0,y_0)\in T,\end{cases}$$

也即(称(P)**和**(D)**为综合的** DEA **模型**)

$$(P)\quad\begin{cases}\min\ q,\\ \sum_{j=1}^{n}x_j l_j \leqslant q x_0,\quad \sum_{j=1}^{n}y_j l_j \geqslant y_0,\\ d_1\left(\sum_{j=1}^{n}l_j+d_2(-1)^{d_3}l_{n+1}\right)=d_1,\\ l_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n,n+1,q\in E^1\end{cases}$$

及对偶规划

$$(D)\quad\begin{cases}\max\ (m^{\mathrm{T}}y_0-d_1 m_0),\\ w^{\mathrm{T}}x_j-m^{\mathrm{T}}y_j+d_1 m_0\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n,\\ w^{\mathrm{T}}x_0=1,\\ w\geqslant 0,\ m\geqslant 0,\ d_1 d_2(-1)^{d_3}m_0\geqslant 0.\end{cases}$$

当取 δ_1, δ_2, δ_3 **为不同参数时, 可相应地得到模型** $(P_{\mathrm{C^2R}})$, $(D_{\mathrm{C^2R}})$; $(P_{\mathrm{BC^2}})$, $(D_{\mathrm{BC^2}})$; (P_{FG}), (D_{FG}); (P_{ST}), (D_{ST}). **类似地, 对综合的** DEA **模型**(P)**和**(D), **可以定义** DMU **的弱** DEA **有效性和** DEA **有效性, 以及具有非** Archimedes **无穷小量的** DEA **模型**. **可以证明(见文献**[12]**)如下定理**:

定理 2 (弱)DEA 有效(C^2R)$\Rightarrow$(弱)DEA 有效(FG)$\Rightarrow$(弱)DEA 有效(BC^2); (弱)DEA 有效(C^2R)$\Rightarrow$(弱)DEA 有效 (ST)$\Rightarrow$(弱)DEA 有效 (BC^2), 其中“(弱)DEA 有效 (C^2R) ”表示在 C^2R 模型下 DMU-j_0 为(弱)DEA 有效, 其他的表示意义类似.

3 加法模型和 Log-型的模型

早在 1961 年, Charnes 和 Cooper 在求解一个具有实际背景的没有可行解的线性规划问题时, 引进了目标规划(goal programming), 其中包括正、负偏差变量. 后来发展成为灵活地将正、负偏差引入到目标函数当中, 可以处理含有不同目的的多目标问题. 基于上述思想, Charnes 等人[13] 给出了加法模型 C^2GS^2. 实际上, 对综合 DEA 模型, 可以用统一的形式给出判别 DEA 有效性的加法模型和判别弱 DEA 有效性的加法模型. 考虑综合的加法模型

$$(\overline{P})\begin{cases}\max\,(\hat{e}^{\mathrm{T}}s^-+e^{\mathrm{T}}s^+),\\ \sum\limits_{j=1}^{n}x_j l_j+s^-=x_0,\\ \sum\limits_{j=1}^{n}y_j l_j-s^+=y_0,\\ d_1\left(\sum\limits_{j=1}^{n} l_j+d_2(-1)^{d_3}l_{n+1}\right)=d_1,\\ l_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n,n+1,\\ s^-\geqslant 0,\ \ s^+\geqslant 0;\end{cases}\qquad (\overline{D})\begin{cases}\min\left(w^{\mathrm{T}}x_0-m^{\mathrm{T}}y_0+d_1m_0\right)\\ w^{\mathrm{T}}x_j-m^{\mathrm{T}}y_j+d_1m_0\geqslant 0,\ \ j=1,\ 2,\cdots,n,\\ w\geqslant\hat{e}\,,m\geqslant e,\\ d_1d_2(-1)^{d_3}m_0\geqslant 0.\end{cases}$$

定理 3 DMU-j_0 为 DEA 有效的充分必要条件是 $(\overline{P})$和$(\overline{D})$ 的最优值为 0 .

利用加法模型判别 DMU 的 DEA 有效性时, 可以绕开引入非 Archimedes 无穷小量 e 在计算上所带来的不便, 同时, 也可以像 $(D^{e}_{C^2R})$ 模型中那样得到决策单元在 T 的生产前沿面上的投影. 判断弱 DEA 有效性也有相应的模型. 可证: DMU-j_0 为弱 DEA 有效的充分必要条件是下面的线性规划问题的最优目标值为 0 :

$$(P)\begin{cases}\max t,\\ \sum\limits_{j=1}^{n}x_j l_j+t\,\hat{e}=x_0,\ \ \sum\limits_{j=1}^{n}y_j l_j-t\,e=y_0,\\ d_1\left(\sum\limits_{j=1}^{n}l_j+d_2(-1)^{d_3}l_{n+1}\right)=d_1,\\ l_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n,n+1,\ \ t\geqslant 0,\ \ t\in E^1.\end{cases}\ .$$

1983 年, Charnes 等人[14] 研究了 Log-型的 DEA 模型, 它是将原始的数据 $X=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$和 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 变换到 $(\mathrm{Log}X,\mathrm{Log}Y)$ 1), 再使用相应于 C^2R 和 BC^2 的加法模型. 实际上可以考虑 Log-型的综合的加法模型

1) 若 $C=(c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}>0$, 记 $\mathrm{Log}C=(\log c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

$$(\hat{P})\begin{cases}\max\left(\hat{e}^{\mathrm{T}}s^{-}+e^{\mathrm{T}}s^{+}\right),\\ \sum_{j=1}^{n}(\mathrm{Log}\,x_j)\,l_j+s^{-}=\mathrm{Log}\,x_0,\\ \sum_{j=1}^{n}(\mathrm{Log}\,y_j)\,l_j-s^{+}=\mathrm{Log}\,y_0,\\ d_1\left(\sum_{j=1}^{n}l_j+d_2(-1)^{d_3}\,l_{n+1}\right)=d_1,\\ l_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n,n+1,\\ s^{-}\geqslant 0,\ s^{+}\geqslant 0\end{cases}\qquad (\hat{D})\begin{cases}\min\left(w^{\mathrm{T}}\mathrm{Log}\,x_0-m^{\mathrm{T}}\mathrm{Log}\,y_0+d_1m_0\right),\\ w^{\mathrm{T}}\mathrm{Log}\,x_j-m^{\mathrm{T}}\mathrm{Log}\,y_j+d_1m_0\geqslant 0,\ j=1,\cdots,n,\\ w\geqslant\hat{e},\ m\geqslant e,\\ d_1d_2(-1)^{d_3}m_0\geqslant 0.\end{cases}$$

若 DMU-j_0 在上述 Log-型模型下为 DEA 有效，则 $\exists w^0>0,\ m^0>0,\ d_1m_0^0$，有

$$w^{0\mathrm{T}}\mathrm{Log}\,x_0-m^{0\mathrm{T}}\mathrm{Log}\,y_0+d_1m_0^0=0,$$

即

$$\prod_{r=1}^{s}y_{r_0}^{m_r^0}=\mathrm{e}^{d_1m_0^0}\prod_{i=1}^{m}x_{i_0}^{w_i^0}.$$

特别，当 $s=1$ 时有 $\left(b=m_0^0/m_1^0,\ a_i=w_i^0/m_1^0,\ i=1,2,\cdots,m\right)$

$$y_{10}=\mathrm{e}^{d_1b}\prod_{i=1}^{m}x_{i_0}^{a_i}.$$

可见, Log-型 DEA 模型是用 Cobb-Douglas 生产函数的局部逼近.

4 (弱)DEA 有效与(弱)pareto 解的等价性

对于具有 m 种输入和 s 种输出的 n 个 DMU 的评价问题，可用 $m+s$ 个目标的多目标规划问题来描述，即

$$(VP)\begin{cases}V-\min\,(x,-y),\\ (x,y)\in T,\end{cases}$$

其中 T 为生产可能集，而 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_s)^{\mathrm{T}}$. 一个自然的问题是：DMU-$j_0$ 为(弱)DEA 有效时，相应的(x_0,y_0)是否为多目标规划(VP)的(弱)pareto 解.

早在 1962 年 Charnes 和 Cooper 在研究多目标规划问题时，曾给出了检验可行解为 pareto 解的充分必要条件，被称为 Charnes-Cooper 检验. 对于 BC^2 模型，Charnes 等人[13]利用 Charnes-Cooper 检验证明了 DEA 有效与多目标规划(VP)的 pareto 解的等价性. 这是十分重要的，因为多目标规划问题的 pareto 解是最基本的. 试想，如果 DEA 领域中的 DEA 有效概念与多目标规划中的 pareto 解的概念相左，那么 DEA 有效性的定义、乃至整个 DEA 领域将是没有依据和基础的了.

定理 4 对于综合 DEA 模型(P)和(D)，有

(ⅰ) DMU-j_0 为 DEA 有效的充分必要条件是(x_0,y_0)为多目标规划(VP)的 pareto 解[5, 12].

(ⅱ) 若 DMU-j_0 为弱 DEA 有效，则(x_0,y_0)为多目标规划(VP)的弱 pareto 解[5, 12].

(ⅲ) 对于 DEA 模型 C^2R (即 $\delta_1=0$)和模型 ST($d_1=1, d_2=1, d_3=1$), 若(x_0, y_0)为(VP)的弱 pareto 解, 则 DMU-j_0 为弱 DEA 有效[15] .

5　锥比率的 DEA 模型 C^2WH 及其推广

在通常的 DEA 模型中(C^2R, BC^2, FG 和 ST), m 种输入指标和 s 种输出指标在评价 DMU 的有效性时, 所处的地位都是等同的, 因为表明 $m+s$ 种指标的重要程度的权系数$w=(w_1, w_2,\cdots, w_m)^T$和$m=(m_1, m_2, \cdots, m_s)^T$之间没有任何限制, 这是一种欠缺. 实际上, 从 DEA 的第 1 个模型公开之后, 从事多目标决策的人就曾提出过异议, 认为 DEA 模型中没能体现决策者的偏好. 特别是早在 1974 年 P. L. Yu 就给出了多目标的非支配解(nondominated solution)的概念, 已将多目标的 pareto 解推广到能体现决策者偏好的非支配解, 而通常的 DEA 有效概念只不过与多目标规划的 pareto 解等价而已(见定理 4(ⅰ)).

基于上面的考虑, 1989 年 Charnes 等人[16]推广了 C^2R 模型, 得到体现决策者偏好的、被称为“锥比例的 C^2WH 模型”(当$V=E_+^m$, $U=E_+^s$, $K=E_+^n$时, 即为 C^2R)

$$(C^2WH)\quad\begin{cases}\max\ \dfrac{u^T y_0}{v^T x_0},\\ v^T X-u^T Y\in K,\\ v\in V\setminus\{0\},\ u\in U\setminus\{0\},\end{cases}$$

其中$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $Y=(y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$, $V\subset E_+^m$为闭凸锥, 并且$\mathrm{Int}\,V\neq\varnothing$, $U\subset E_+^s$锥, $\mathrm{Int}\,U\neq\varnothing$, $K\subset E_+^n$为闭凸锥, $x_j\in-\mathrm{Int}\,V^*$, $y_j\in-\mathrm{Int}\,U^*$, $j=1,2,\cdots,n$. 利用 Charnes-Cooper 变换, 将上述模型(C^2WH)化为具有锥结构的 DEA 模型(广义约束的线性规划, 在“约束规格”下, 对偶定理成立, 见文献[16, 17])

$$(P_{C^2WH})\begin{cases}\max\ m^T y_0,\\ w^T X-m^T Y\in K,\\ w^T x_0=1,\\ w\in V,\ m\in U,\end{cases}\qquad (D_{C^2WH})\begin{cases}\min q,\\ Xl-q\,x_0\in V^*,\\ -Yl+y_0\in U^*,\\ l\in -K^*.\end{cases}$$

定义 4　若(P_{C^2WH})存在最优解w^0, m^0满足$w^0\in\mathrm{Int}\,V$, $m^0\in\mathrm{Int}\,U$, 并且$m^{0T}y_0=1$, 则称 DMU-j_0 为 DEA 有效(C^2WH) **.**

对于锥比率的 DEA 模型也有相应的加法模型, 并且借助于加法模型可以证明如下的定理:

定理 5　在“约束规格”的假设下[16, 17], DMU-j_0 为 DEA 有效(C^2WH)的充分必要条件是(x_0, y_0)为下面多目标规划的相对于 $V^*\times U^*$的非支配解:

$$\begin{cases}V-\min\ (x,\ -y),\\ (x,y)\in T_{C^2WH},\end{cases}$$

其中生产可能集$T_{C^2WH}=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in(Xl, Yl)+(-V^*, U^*),\ l\in -K^*\}$.

当 V 和 U 为由“和形式”给出的多面锥, 且$K=E_+^n$, 即($A=A_{m'\times m}$, $B=B_{s'\times s}$), $V=\{A^T w'|w'\geqslant 0\}$, $U=\{B^T m'|m'\geqslant 0\}$ 则 $V^*=\{v\,|\,Av\leqslant 0\}$, $U^*=\{u\,|\,Bu\leqslant 0\}$. 故 ($P_{C^2WH}$) 和

(D_{C^2WH})化为多面锥比率的 DEA 模型[5, 18]

$$(\overline{P}_{C^2WH})\begin{cases}\max m'^{T}(By_0),\\ w'^{T}(AX)-m'^{T}(BY)\geqslant 0,\\ w'^{T}(AX_0)=1,\\ w'\geqslant 0,\quad m'\geqslant 0,\end{cases}\qquad (\overline{D}_{C^2WH})\begin{cases}\min q,\\ (AX)\,l\leqslant q\,(AX_0),\\ (BY)\,l\geqslant (BY_0),\\ l\geqslant 0.\end{cases}$$

可见，多面锥比率的 DEA 模型是将原来的输入、输出数据 X 和 Y 化为由表 2 给出的通常的 DEA 模型；当多面锥由“交形式”给出时，可以很容易将它们转化为“和形式”[19].

表 2

1	2	…	…	n
Ax_1	Ax_2	…	…	Ax_n
By_1	By_2	…	…	By_n

1996 年 Yu 等人[12]给出了更为一般的具有锥结构的综合 DEA 模型 $(e=(1,1,\cdots,1)^{T}\in E^{n})$

$$(P_{GDEA})\begin{cases}\max\ (m^{T}y_0-d_1m_0)=h_0,\\ w^{T}X-m^{T}Y+m_0d_1e^{T}\in K,\\ w^{T}x_0=1,\\ \begin{pmatrix}w\\ m\end{pmatrix}\in W, d_1d_2(-1)^{d_3}m_0\geqslant 0,\end{cases}\qquad (D_{GDEA})\begin{cases}\min q,\\ \begin{pmatrix}Xl-q\,x_0\\ -Yl+y_0\end{pmatrix}\in W^{*},\\ d_1\left(e^{T}l+d_2(-1)^{d_3}l_{n+1}\right)=d_1,\\ l\in -K^{*}, l_{n+1}\geqslant 0, q\in E^{1}.\end{cases}$$

其中 d_1, d_2, d_3 为取值为 0 和 1 的参数．对于 d_1, d_2, d_3 的不同取值可以得到具有锥结构的 DEA 模型 C²R, BC², FG 和 ST．特别当 $W=V\times U$, $d_1=0$ 时，即为 C²HW 模型；当 $V=E_{+}^{m}$, $U=E_{+}^{s}$, $K=E_{+}^{n}$ 时，即为通常的 DEA 模型.

关于具有锥结构的综合 DEA 模型(P_{GDEA})和(D_{GDEA})，Wei，Yu 和 Brockett 等人作了系统的研究(见文献[9, 12, 20, 21])．证明了 DEA 有效(GDEA)与对应的多目标规划问题相应于 W^*的非支配解的等价性；研究了相应的加法模型和多面锥的 DEA 模型，等等．不难看出，对具有锥结构的综合 DEA 模型的研究包括了对所有上述 DEA 模型的研究.

记生产可能集为

$$T_{GDEA}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{pmatrix}Xl-x\\ -Yl+y\end{pmatrix}\in W^{*},\ d_1\left(e^{T}l+d_2(-1)^{d_3}l_{n+1}\right)=d_1,\ l\in -K^{*},\ l_{n+1}\geqslant 0\right\}.$$

上述 DEA 模型(D_{GDEA})可写为

$$(\text{GDEA-I})\begin{cases}\min q,\\ (q\,x_0, y_0)\in T_{GDEA}, q\in E\end{cases},$$

称为输入倾向的综合 DEA 模型(input-oriented generaliged DEA model)．对称地可以得到产出倾向的综合 DEA 模型(output-oriented generalized DEA model)[3]

$$(\text{GDEA-O})\begin{cases}\max z,\\ (x_0, zy_0)\in T_{GDEA},\ z\in E^{1}.\end{cases}$$

对于(GDEA-O)模型可以类似于(GDEA-I)模型，完全平行地进行讨论.

具有锥结构的离散的 DEA 模型的研究，见文献[22].

6 具有无穷多个 DMU 的 DEA 模型

1986 年 Charnes 等人研究了具有无穷多个 DMU 的半无限规划的 DEA 模型 C^2W[7]和 C^2WY[23]. 半无限规划也是 Charnes 等人创建的一个数学规划领域. C^2W 模型是国际上第 1 个非线性的 DEA 模型, 它深刻地揭示了 DEA 在数学上和经济上的含义, 被认为“提出了一个精美的研究结构, 并且对统计方面的研究给出了一个分析基础”. 设 Z 是任意的集合, 考虑

$$(P_{\mathrm{C^2WY}})\begin{cases}\max\ (m^{\mathrm{T}}y(z_0)-d_1m_0),\\ w^{\mathrm{T}}x(z)-m^{\mathrm{T}}y(z)+d_1m_0\geqslant 0,\ z\in Z,\\ w^{\mathrm{T}}x(z_0)=1,\\ w\in V,m\in U,d_1d_2(-1)^{d_3}m_0\geqslant 0,\end{cases}\qquad (D_{\mathrm{C^2WY}})\begin{cases}\min\ q\\ \sum\limits_{z\in Z}x(z)l(z)-q\ x(z_0)\in V^*,\\ -\sum\limits_{z\in Z}y(z)l(z)+y(z_0)\in U^*,\\ d_1\left(\sum\limits_{z\in Z}l(z)+d_2(-1)^{d_3}\ l_0\right)=d_1,\\ l(z)\geqslant 0,z\in Z,\ l_0\geqslant 0,\end{cases}$$

相应的生产可能集为

$$T_{\mathrm{C^2WY}}=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}\sum\limits_{z\in Z}x(z)l(z)-x\in V^*,\quad \sum\limits_{z\in Z}y(z)l(z)-y\in -U^*,\\ d_1\left(\sum\limits_{z\in Z}l(z)+d_2(-1)^{d_3}\ l_0\right)=d_1\,l\ (z)\geqslant 0,z\in Z,\ \ l_0\geqslant 0\end{array}\right.\right\}.$$

定义 5 若($P_{\mathrm{C^2WY}}$)的最优值为 1, 称 $(x(z_0),y(z_0))$ 是在 $T_{\mathrm{C^2WY}}$ 的生产前沿面上(即 DMU-Z_0 为弱 DEA 有效).

特别, 当取 $d_1=1,\ d_2=1,\ d_3=0$ (即具有无穷多个 DMU 的 DEA 模型 FG), $V=E_+^m,U=E_+^1$, $Z=E_+^m=\{x\,|\,x\geqslant 0\}$时, 我们可以看出 DEA 的生产函数的背景. 考虑由表 3 给出的 DEA 模型: 其中 $f\ (x)$为具有一阶连续偏导数的生产函数, 且 $f\ (x)$为凹的 k 阶齐次函数, $k\leqslant 1$. 利用 DEA 模型($P_{\mathrm{C^2WY}}$)和($D_{\mathrm{C^2WY}}$)可以得到如下的定理[24]:

表 3

$x\in E_+^m$	
x	x_0
$f(x)$	y_0

定理 6 设 $(x_0,y_0)\in T_{\mathrm{C^2WY}}$, 且 $x_0>0$, 则有 $T_{\mathrm{C^2WY}}=\{(x,y)\,|\,f(x)\quad y,x\in E_+^m\}$; 设 $(x_0,y_0)\in T_{\mathrm{C^2WY}}$, 则 (x_0,y_0) 在 $T_{\mathrm{C^2WY}}$ 的生产前沿面上的充分必要条件为 $y_0=f(x_0)$; 若 (x_0,y_0) 在 $T_{\mathrm{C^2WY}}$ 的生产前沿面上, 则有 $w^{0\mathrm{T}}x_0-m^0y_0=-m_0^0$, 其中 w^0,m^0,m_0^0 为($P_{\mathrm{C^2WY}}$)的最优解, 且 $w^0=f_x(x_0)^{\mathrm{T}},m^0=1,\ m_0^0=(1-k)f(x_0)$. 进而, $m_0^0>0$ 当且仅当 $(x_{0,}\ \ y_0)$ 处于规模收益递减状态; $m_0^0=0$ 当且仅当 (x_0,y_0) 处于规模收益不变状态.

基于以上的讨论可知: 由有限多个 DMU 得到的生产可能集(例如 T_{FG})是对生产函数的下图$\{(x,y)\,|\,f(x)\geqslant y,x\in E_+^m\}$的一种逼近; DEA 的生产前沿面可看做是用分段(片)的线性函数对生产函数曲面的一种逼近; DEA 模型中的 m_0^0 可用来判断 DMU 的规模收益状态. 以上述的理论为基础, 利用 DEA 模型可评估部门或企业的技术进步速度, 以及各企业的技术进步相对超前或滞后年限(见文献[25, 26]), 同时也可建立非参数的微观经济模型(见文献[10, 27]).

7 机会约束的 DEA 模型

机会约束规划(chance constrained programming)**是随机规划的一个重要而实用的分支**，1959 **年由** Charnes **和** Cooper **首先提出来．在** DEA **模型的研究中，随机** DEA **模型和具有锥结构的** DEA **模型，曾被认为是两个重要的研究方向**[28]. 1987 **年** Sengupta[29]**和** 1993 **年** Land **等人**[30]**曾研究过随机的** DEA **模型**. 1996 **年** Huang **和** Li **在研究所有的输入、输出均为随机变量时，给出了随机非支配点** (stochastically nondominated point)**的概念，由此得到备受人们注目的机会约束的** DEA **模型**[31].

设 $\tilde{x}_j$ **为** m **维的投入随机向量，** $\tilde{y}_j$ **为** s **维的产出随机向量**，$j=1, 2, \cdots, n$.

定义 6　记

$$\tilde{T}=\left\{(\tilde{x},\tilde{y}) \mid \tilde{x}=\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_j l_j,\ \tilde{y}=\sum_{j=1}^{n}\tilde{y}_j l_j,\ d_1\left(\sum_{j=1}^{n} l_j+d_2(-1)^{d_3} l_{n+1}\right)=d_1,\ l_j \geqslant 0,\ j=1,2,\ldots,n,n+1\right\},$$

称 $\tilde{T}$ **为随机生产可能集．若** $\forall(\tilde{x},\tilde{y})\in\tilde{T}$ **均有** $P\{(\tilde{x},-\tilde{y})\in(\tilde{x}_0,-\tilde{y}_0)+\tilde{A}\}\leqslant a$，**称** $(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$ **为相对于闭凸锥** $\tilde{A}$ **的** a**-随机非支配点**, DMU-j_0 **为相对于** G **的** a **-随机非支配有效**.

不难看出，利用相对于 G **的** a **-随机非支配点的概念，可以定义** $\tilde{T}$ **的** a **-随机有效前沿面** (stochastically efficient frontier).

为了方便，考虑 G **是由“交形式”给出的凸多面锥**

$$\tilde{A}=V\times U,\ V=\{v \mid Av\leqslant 0\},\ U=\{u \mid Bu\leqslant 0\},$$

考虑下面的机会约束的 DEA **模型(实际上，它是随机的** Chanres-Cooper **检验)**:

$$(\mathrm{P_{CC}})\begin{cases}\max \mathrm{P}\left\{\hat{e}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{n}(A\tilde{x}_j)\ l_j\right)-e^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{n}(B\tilde{y}_j)\ l_j\right)\leqslant \hat{e}^{\mathrm{T}}A\tilde{X}_0-e^{\mathrm{T}}B\tilde{Y}_0\right\},\\ \mathrm{P}\left\{a_i\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_j l_j\leqslant\tilde{x}_0\right)\right\}\geqslant 1-e,\ i=1,2,\ldots,m',\\ \mathrm{P}\left\{b_r\left(\sum_{r=1}^{n}\tilde{y}_j l_j\geqslant\tilde{y}_0\right)\right\}\geqslant 1-e,\ r=1,2,\ldots,s',\\ d_1\left(\sum_{j=1}^{n} l_j+d_2(-1)^{d_3} l_{n+1}\right)=d_1,\ l_j\geqslant 0,\ j=1,2,\ldots,n,n+1,\end{cases}$$

其中 a_i **为** A **的第** i **行，** b_r **为** B **的第** r **行**，$i=1,2,\ldots,m', r=1,2,\ldots,s'$, **而** $e>0$ **是非** Archimedes **无穷小量**.

定理 7　若 DMU-j_0 **为相对于** $\tilde{A}$ **的** a **-随机非支配有效** DMU，**则**$(\mathrm{P_{CC}})$**的最优目标值不大于** a .

文献[31]**中指出，当** $\tilde{x}_j,\tilde{y}_j\ (j=1,\ldots,n)$ **均为正态分布时，可得到与问题**$(\mathrm{P_{CC}})$**等价的非线性规划模型，也有相应的定理**.

8　DEA 模型与二人约束对策

早在 1953 年 Charnes 和 Cooper 首先提出和解决了带约束的矩阵对策, 并将机会约束的思想移植到对策论当中, 提出机会约束对策的概念. Banker 等人[32, 33]研究了 DEA 模型与二人、有限、零和对策之间的关系; Wei 等人 1)对于具有锥结构的综合 DEA 模型与具有锥结构的对策之间的关系进行了研究; Chanres 等人[34]利用半无限规划研究了具有无穷多个 DMU 的 DEA 模型 C^2W 与二人、有限/半无限、零和对策之间的关系. 他们的研究都是根据输入、输出数据建立相应的对策模型, 证明对策的值即为 DEA 模型中的效率指数.

Rousseau 和 Semple[35, 36]给出了另一种称为比率效率对策有模型 (ratio effiency games), 并研究了与 DEA 模型的等价关系; Hao 等人 2)研究了具有锥结构的约束对策与具有锥结构的综合 DEA 模型的等价性. 上述的研究对 DEA 模型和 DEA 有效性给出了对策论的背景. 考虑二人、无限、零和对策(简记为对策 G)

$$G=\left\{\mathrm{I},\ \mathrm{II};\ S_1,S_2;\ \frac{m^{\mathrm{T}}Yl}{w^{\mathrm{T}}Xl+d_1m_0}\right\},$$

其中

$$S_1=\{(l,d_1d_2l_{n+1})\,|\,d_1(e^{\mathrm{T}}l+d_2(-1)^{d_3}l_{n+1})=d_1,\ l\in -K^*,\ l_{n+1}\geqslant 0\},$$

$$S_2=\left\{(w,m,d_1m_0)\,|\,w\in V,m\in U,d_1d_2(-1)^{d_3}m_0\geqslant 0,\ \frac{m^{\mathrm{T}}y_0}{w^{\mathrm{T}}x_0+d_1m_0}=1\right\},$$

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ \ Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n),$$

支付函数为

$$f_1(l,d_1d_2l_{n+1},w,m,d_1m_0)=\frac{m^{\mathrm{T}}Yl}{w^{\mathrm{T}}Xl+d_1m_0}=-f_2(l,d_1d_2l_{n+1},w,m,d_1m_0).$$

定义7　设$\left(l^0,d_1d_2l^0{}_{n+1}\right)\in S_1$, $\left(w^0,m^0,d_1m^0{}_0\right)\in S_2$, 若$\forall\left(l,d_1d_2l_{n+1}\right)\in S_1$, $\forall(w,m,d_1m_0)\in S_2$ 均有 $f_1\left(l,d_1d_2l_{n+1},w^0,m^0,d_1m^0{}_0\right)\leqslant f_1\left(l^0,d_1d_2l^0{}_{n+1},w^0,m^0,d_1m^0{}_0\right)\leqslant f_1(\lambda_0,\delta_1d_2l^0{}_{n+1},w,m,d_1m_0)$, 则称$\left(l^0,d_1d_2l^0{}_{n+1}\right)$和$\left(w^0,m^0,d_1m^0{}_0\right)$分别为局中人 I 和 II 的最优策略, 且对策值

$$G_{\mathrm{V}}=f_1\left(l^0,d_1d_2l^0{}_{n+1},w^0,m^0,d_1m^0{}_0\right).$$

若 $G_{\mathrm{V}}=1$, 称 DMU-j_0 为对策有效 (game efficiency).

回忆具有锥结构的综合 DEA 模型的生产可能集(这里, $W=V\times U$):

$$T_{\mathrm{GDEA}}=\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{array}{l}Xl-x\in V^*,\ -Yl+y\in U^*,\\ d_1\left(e^{\mathrm{T}}l+d_2(-1)^{d_3}l_{n+1}\right)=d_1,\ l\in -K^*,\ l_{n+1}\geqslant 0\end{array}\right\}.$$

可以看出对策 G 的含义: 当 DMU-j_0 的效率固定在 $1\left(即\dfrac{m^{\mathrm{T}}y_0}{w^{\mathrm{T}}x_0+d_1m_0}=1\right)$时, 局中人 I 看做是

---

1) Wei Q L, Hao G, Yan H. The generalized DEA model and the convex cone constrained game. European Journal of Operational Research (待发表)

2) Hao G, Wei Q L, Yan H. Convex cone constrained efficiency game and generalized DEA. Journal of Operational Research Society (待发表)

“评估人”(客观的裁判员), 他从生产可能集 T_{GDEA} 中确定 $(x,y)=(Xl,Yl)$, 使得 $f_1(l,\ d_1d_2l_{n+1},\ w,\ m,\ d_1m_0)$ 取最大; 局中人Ⅱ看做是 DMU-j_0, 他可以选取权系数 $(w,m,d_1m_0)\in S_2$, 使得 $f_1(l,\ d_1d_2l_{n+1},\ w,m,\ d_1m_0)$取最小. 显然, 如果对策值 $G_{\mathrm{V}}>1$, DMU-j_0不是有效的(因为尽管局中人Ⅱ选取了对他最有利的权系数, 而生产可能集中仍存在效率(即 G_{V})大于 1 的生产可能状态).

定理 8 在“约束规格”的假设下[1)], 对策 G 的值 G_{V} 等于具有锥结构的输出倾向的综合 DEA 模型(GDEA-O)的效率指数(即最优目标值).

9 逆 DEA 模型

1999 年 Zhang 和 Cui[37]在研究中国经济信息系统中评价子系统的相对效率时, 给出了一个新的 DEA 模型. 随后, Wei 等人[38]对该模型进行了研究和改进, 提出了逆 DEA 模型(Inverse DEA Model). 1999 年 Yan 等人[2)]又将其推广到具有锥结构的情况, 并用来研究资源配置和生产的投入(或产出)估计的模型中去.

具有锥结构的逆 DEA 模型是指: 对于 DMU-j_0, 若输出倾向的 DEA 模型(GDEA-O)的效率指数 $z^0>1$, 其中

$$(\mathrm{GDEA\text{-}O})\quad \begin{cases}\max z,\\ Xl-x_0\in V^*,\ -Yl+zy_0\in U^*,\\ d_1\left(e^{\mathrm{T}}l+d_2(-1)^{d_3}l_{n+1}\right)=d_1,\\ l\in -K^*,\ l_{n+1}\geqslant 0, z\in E^1.\end{cases}$$

现将投入 x_0 沿着 $-V^*$方向“增加”到 $a^0=x_0+\Delta x,\ \Delta x\in -V^*$, 产出由 y_0 沿着$-U^*$方向“增加”到 b^0. 若要求效率指数保持不变时(反映了当前 DMU-j_0的技术状态不变), 估计产出量 b^0. 考虑多目标问题

$$(VP)'\quad \begin{cases}V-\max(b_1,b_2,\ldots,b_n),\\ Xl-a^0\in V^*,\ -Yl+z^0b\in U^*,\\ b-y_0\in -U^*,\\ d_1\left(e^{\mathrm{T}}l+d_2(-1)^{d_3}l_{n+1}\right)=d_1,\\ l\in -K^*,\ l_{n+1}\geqslant 0,\end{cases}$$

其中 $b=(b_1,b_2,\ldots,b_s)^{\mathrm{T}}$.

定理 9 设 $a^0-x_0\in -V^*, b^0-y_0\in -U^*$, 则新的 DMU-$j_0$(相应于($a^\circ$, b°))的效率指数仍为 z^0 的充分必要条件是: b^0 为多目标问题 $(VP)'$ 相对于 Int U^*的非支配解.

10 生产可能集的真正有效前沿面及其结构

在 Charnes 等人关于 DEA 的第 1 篇文章中, 就提出了生产前沿面的概念. 现在我们进行更为一般的讨论, 考虑生产可能集($K=E^n_+$):

1) 见 1803 页脚注 2)

2) Yan H, Wei Q L, Hao G. DEA Models for resource reallocation and production input/output estimation. Working Paper, 1999

$$T_{\text{GDEA}}=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}\begin{pmatrix}Xl-x\\ -Yl+y\end{pmatrix}\in W^{*}, d_1\left(e^{\mathrm{T}}l+d_2(-1)^{d_3}l_{n+1}\right)=d_1,\\ l_j\geqslant 0,\ j=1,2,\ldots,n,n+1\end{array}\right.\right\}.$$

定义 8 设$(\overline{w},\overline{m})\in \operatorname{Int}W$, $d_1d_2(-1)^{d_3}\overline{m}_0\geqslant 0$, 且

$$\overline{w}^{\mathrm{T}}x_j-\overline{m}^{\mathrm{T}}y_j+d_1\overline{m}_0\geqslant 0,\quad j=1,2,\ldots,n.$$

令 $L=\{(x,y)\,|\,\overline{w}^{\mathrm{T}}x-\overline{m}^{\mathrm{T}}y+d_1\overline{m}_0=0\}$, 若$T_{\text{GDEA}}\cap L\neq\varnothing$, 称 L 为 T_{GDEA} 的有效前沿面.

定理 10 DMU-j_0 为 DEA 有效(GDEA)的充分必要条件是(x_0, y_0)落在 T_{GDEA} 的某个有效前沿面上.

在定义 8 中所定义的有效前沿面, 实际上是指 T_{GDEA} 的支持超平面. T_{GDEA} 的真正的有效前沿面(properly efficient surface)是指以$(\overline{w},\overline{m})(\in \operatorname{Int}W)$ 为法方向的生产可能集 T_{GDEA} 自身的面. 1996 年, Yu 等人使用综合 DEA 模型中 K-锥(取 K 为特殊的"偏袒锥"(predilection cones))构造出了 T_{GDEA} 的真正有效前沿面, 由此得出对各种不同的 DEA 模型(C^2R, BC^2, FG 和 ST)的真正有效前沿面的构造性定理(见文献[9, 20]).

1999 年, Wei 等人1)利用求凸多面体全部极点的方法(见文献[39])给出了确定生产可能集的真正(弱)有效前沿面的更为简单的方法, 由此可得到生产可能集的(弱)pareto 面的结构. 不难看出, 求出生产可能集的真正(弱)有效前沿面, 可以更深入地对 DMU 进行分析, 甚至不必进行线性规划的单纯形方法求解, 得出更多的管理信息.

11 DEA 有效的经济背景

由定理 10, DMU-j_0 为 DEA 有效的充要条件是(x_0, y_0)落在生产可能集的某个有效前沿面上. 一般称落在由(P_{BC^2}), (D_{BC^2})所对应的生产可能集 T_{BC^2} (即满足公理 1~3 和 5)的某个有效前沿面上的 DMU 为技术有效(technical efficiency), 也即在 BC^2 模型之下为 DEA 有效的 DMU 为技术有效的(由定理 2, 在 C^2R, FG 和 ST 模型之下的 DEA 有效的 DMU 也是技术有效的); 规模有效(scale efficiency)是指落在由($P_{\mathrm{C^2R}}$)和($D_{\mathrm{C^2R}}$)所对应的生产可能集$T_{\mathrm{C^2R}}$ (即满足公理 1~3, 4a 和 5)的某个有效前沿面上. 可见, 在 C^2R 模型之下为 DEA 有效的 DMU 是技术有效, 同时也为规模有效.

利用 DEA 模型研究 DMU 的规模收益状况 (return to scale)是人们一直关心的问题. 1984 年 Banker 等人[8]利用 BC^2 模型, 在关于最优解惟一的假设下, 给出了判断 DMU 为规模收益递减、不变和递增的条件. 1992 年 Banker 和 Thrall[40]利用 BC^2 模型给出了判断规模收益状况的充要条件. 1993 年, Wei 等人[21]针对更为一般形式的具有锥结构的综合 DEA 模型, 在生产函数的背景之下, 使用输出倾向的综合 DEA 模型(GDEA-O), 对于在具有锥结构的 BC^2 模型下为弱 DEA 有效的 DMU(注意, 这是很重要的. 有些文章的讨论, 没有这个条件是不对的), 给出了 DMU 为规模收益递减、不变和递增的严格的数学定义. 当使用不同的 DEA 模型(具有锥结构的 DEA 模型 C^2R, BC^2, FG 和 ST)去判断 DMU 为规模收益递减、不变和递增的状况

1) Wei Q L, Yan H, Hao G. Characteristics and construction method of surface and weak surface of DEA production possibility. Working Paper, 1999

时，给出了充分必要条件.

考虑

$$(\text{GDEA-O})' \begin{cases} \min \left(w^{\mathrm{T}} x_0 + d_1 m_0\right), \\ w^{\mathrm{T}} X - m^{\mathrm{T}} Y + m_0 d_1 e^{\mathrm{T}} \in K, \\ m^{\mathrm{T}} y_0 = 1, \\ \begin{pmatrix} w \\ m \end{pmatrix} \in W, \end{cases} \qquad (\text{GDEA-O}) \begin{cases} \max z, \\ \begin{pmatrix} Xl - x_0 \\ -Yl + y_0 \end{pmatrix} \in W^*, \\ d_1\left(e^{\mathrm{T}} l + d_2 (-1)^{d_3} l_{n+1}\right) = d_1, \\ l \in -K^*, l_{n+1} \geqslant 0, z \in E^1. \end{cases}$$

设 $w^0, m^0, d_1 m_0^0$ 为(GDEA-O)′ 的最优解，$l^0, d_1 d_2 l_{n+1}^0, z^0$ 为(GDEA-O)的最优解．在以下定理中都需假设：DMU-j_0 在 BC^2 模型($d_1 = 1$, $d_2 = 0$)下为弱 DEA 有效(BC^2).

定理 11 DMU-j_0 为规模收益不变的充分必要条件是：DMU-j_0 为弱 DEA 有效(FG)和弱 DEA 有效(ST); DMU-j_0 为规模收益递增的充分必要条件是：DMU-j_0 为弱 DEA 有效(ST)，而在 FG 模型下不为弱 DEA 有效(FG); DMU-j_0 为规模收益递减的充分必要条件是：DMU-j_0 为弱 DEA 有效(FG)，而在 ST 模型下不为弱 DEA 有效.

定理 12(C^{2}R 模型) DMU-j_0 为规模收益不变的充分必要条件是：(GDEA-O)的最优值 $Z_0 = 1$ (即弱 DEA 有效(C^{2}R)); DMU-j_0 为规模收益递增的充分必要条件是：(GDEA-O)的最优值 $Z_0 > 1$，且 $\sum_{j=1}^{n} l_j^0 < 1$; DMU-j_0 为规模收益递减的充分必要条件是：(GDEA-O)的最优值 $Z_0 > 1$，且 $\sum_{j=1}^{n} l_j^0 > 1$.

定理 13(BC^2 模型) DMU-j_0 为规模收益不变的充分必要条件是：存在(GDEA-O)′ 的最优解 w^0, m^0, m_0^0，使得 $m_0^0 = 0$; DMU-j_0 为规模收益递增的充分必要条件是：对(GDEA-O)′ 的任意最优解 w^0, m^0, m_0^0，都有 $m_0^0 < 0$; DMU-j_0为规模收益递减的充分必要条件是：对(GDEA-O)′ 的任意最优解 w^0, m^0, m_0^0，都有 $m_0^0 > 0$.

定理 14(FG 模型) DMU-j_0 为规模收益不变的充分必要条件是：存在(GDEA-O)′ 的最优解 w^0, m^0, m_0^0，使得 $m_0^0 = 0$; DMU-j_0为规模收益递减的充分必要条件是：对(GDEA-O)′ 的任意最优解 w^0, m^0, m_0^0，都有 $m_0^0 > 0$.

定理 15 (ST 模型) DMU-j_0 为规模收益不变的充分必要条件是：存在(GDEA-O)′ 的最优解 w^0, m^0, m_0^0，使得 $m_0^0 = 0$; DMU-j_0 为规模收益递增的充分必要条件是：对(GDEA-O)′ 的任意最优解 w^0, m^0, m_0^0，都有 $m_0^0 < 0$.

致谢 本工作为国家自然科学基金资助项目(批准号: 19771087).

参 考 文 献

1 Charnes A, Cooper W W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 1978, 2: 429~444

2 Seiford L M. Data Envelopment Analysis: the evolution of state of the art (1978~1995). Journal of Production Analysis, 1996, 7: 99~137

3 Charnes A, Cooper W W, Lewin A Y, et al, eds. Data Envelopment Analysis. Boston, Dordrecht, London: Kluwer Academic Publisher, 1994

4 Phillips J Y, Rousseau J J, eds. Systems and Management Science by Extremal Methods. Boston, Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers, 1992
5 魏权龄. 评价相对有效性的 DEA 方法——运筹学的新领域. 北京: 中国人民大学出版社, 1988
6 魏权龄. 数据包络分析(DEA)文献索引(1986. 4~1999. 12), 网站: WWW. ORME.RUC. EDU. CN, 中国人民大学数学系,中国人民大学运筹学与数量经济研究所, 2000
7 Charnes A, Cooper W W, Wei Q L. A semi-infinite multicriteria programming approach to Data Envelopment Analysis with infinitely many decision making units. Center for Cybernetic Studies Report CCS 511, 1987
8 Banker R D, Charnes A, Cooper W W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. Management Science, 1984, 30(9): 1078~1092
9 Yu G, Wei Q L, Brockett P, et al. Construction of all DEA efficient surfaces of the production possibility set under the generalized Data Envelopment Analysis model. European Journal of Operational Research, 1996, 95: 491~510
10 Färe R, Grosskopf S. A nonparametric cost approach to scale efficiency. Journal of Economics, 1985, 87: 594~604
11 Seiford L M, Thrall R M. Recent development in DEA, the mathematical programming approach to frontier analysis. Journal of Econometrics, 1990, 46: 7~38
12 Yu G, Wei Q L, Brockett P. A generalized Data Envelopment Analysis model. Annals of Operations Research, 1996, 66: 47~89
13 Charnes A, Cooper W W, Golary B, et al. Foundation of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions. Journal of Econometrics (Netherlands), 1985, 30 (1-2): 91~107
14 Charnes A, Cooper W W, Seiford L M, et al. Invariant multiplicative efficiency and piecewise Cobb-Douglas envelopment. Operations Research Letters, 1983, 2(3): 38~49
15 魏权龄, 刘起运, 胡显佑. 数量经济学. 北京: 中国人民大学出版社, 1998. 第 10 章
16 Charnes A, Cooper W W, Wei Q L, et al. Cone ratio Data Envelopment Analysis and multi-objective programming. International Journal of Systems Science, 1989, 20(7): 1099~1118
17 Charnes A, Cooper W W, Wei Q L, et al. Fundamental theorems of non-dominated solutions associated with cone in normed linear spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1990, 150: 54~78
18 Charnes A, Cooper W W, Sun D B, et al. Polyhedral cone-ratio DEA models with an illustrative application to large commercial banks. Journal of Econometrics, 1990, 46: 73~91
19 Yan H, Wei Q L. A method of transferring cones of intersection-form to cones of sum-form and its applications in DEA models. International J of System Science, 2000, 31(5): 629~638
20 Wei Q L, Yu G. Analyzing the properties of K-cone in generalized Data Envelopment Analysis model. Journal of Econometrics, 1997, 80: 63~84.
21 Wei Q L, Yu G, Lu J S. A necessary and sufficient conditions for return to scale properties in generalized data envelopment models. Center for Cybernetic Studies Report 708, 1993
22 Copper W W, Wei Q L, Yu G. Using displaced cone representations in DEA models for non-dominated solutions in multi-objective programming. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 1997, 10: 41~49
23 Charnes A, Cooper W W, Wei Q L, et al. Compositive Data Envelopment Analysis and Multiobjective Programming. Center for Cybernetic Studies Report CCS 633, 1988
24 Huang Z M, Sun D B, Wei Q L. Theories and applications of the compositive Data Envelopment Analysis model with cone structure. SCI-TECH Information Services, 1995: 57~73
25 Wei Q L, Sun D B, Xiao Z J. Measuring technical progress with Data Envelopment Analysis. European Journal of Operational Research, 1995, 80: 691~702
26 Wei Q L, Chiang W C. An integral method for the measurement of technological progress and Data Envelopment Analysis. Journal of Systems Science and Systems Engineering, 1996, 5(1): 75~86
27 Wei Q L, Chiang W C. The production frontier of DEA and its application in microeconomics. ICSSSE' 93, 1993, 107~112
28 Charnes A, Cooper W W, Ruosseau J J, et al. Data Envelopment Analysis and axiomatic noting of efficiency and reference sets. Center for Cybernetic Studies Report CCS 558, 1987
29 Sengupta J K. Data Envelopment Analysis for efficiency measurement in the stochastic case. Computers and Operations Research, 1987, 14: 117~129
30 Land K C, Lovell C A K, Thore S. Chance-constrained Data Envelopment Analysis. Managerial and Decision Economics, 1993, 14: 541~554

31 Huang Z M, Li S X. Dominance stochastic model in Data Envelopment Analysis. European Journal of Operational Research, 1996, 95: 390~403
32 Banker R D. A game theoretic approach to measuring efficiency. European Journal of Operational Research, 1980, 5: 262~266
33 Banker R D, Charnes A, Cooper W W, et al. Constrained game formulations and interpretations for data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 1989, 42: 299~308
34 Charnes A, Cooper W W, Wei Q L. A two-person zero-sum semi-infinite game model and data envelopment analysis with infinitely many decision making units. Center for Cybernetic Studies Report CCS 572, 1987
35 Rousseau J J, Semple J H. Two-person ratio efficiency games. Management Science, 1995, 41(3): 435~441
36 Semple J. Constrained games for evaluating organizational performance. European Journal of Operational Research, 1996, 96: 103~112
37 Zhang X S, Cui J C. A project evaluating system in the State Economic Information System of China. Intl Trans in Operation Research, 1999, 6: 441~452
38 Wei Q L, Zhang J, Zhang X S. An Inverse DEA model for input/output estimate. European Journal of Operational Research, 2000, 121:151~163
39 Wei Q L, Yan H. An algebra-based vertex identification process on polytopes. Beijing Mathematics, 1997, 3(2): 40~48
40 Banker R D, Thrall R M. Estimation of returns to scale using Data Envelopment Analysis. European Journal of Operational Research, 1992, 62: 78~84

(2000-02-21 **收稿**, 2000-06-08 **收修改稿**)