中国科学: 数学　2011 年　第 41 卷　第 9 期: 759～788
www.springerlink.com　math.scichina.com

计算多项式函数的全局下确界和全局最小值的有效算法

肖水晶, 曾广兴*

南昌大学数学系, 南昌 330031
E-mail: xiaoshjing@163.com, zenggx@ncu.edu.cn

收稿日期: 2010-12-07; 接受日期: 2011-08-01; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10761006, 11161034) 资助项目

摘要　通过捕获所谓的严格临界点, 本文提出了一个计算实多项式函数的全局下确界和全局最小值的有效方法. 对于实数域 $\mathbb{R}$ 上一个 n 元多项式 f, 该方法可用来判定 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上是否具有有限的全局下确界. 在 f 具有有限的全局下确界的情况下, f 的下确界可严格地表示为码 $(h;a,b)$, 其中 h 是一个实单元多项式, a 和 b 是使得 $a<b$ 的两个有理数, 而 $(h;a,b)$ 代表 $h(z)$ 在开区间 $]a,b[$ 中仅有的实根. 此外, 当 f 具有有限下确界时, 本文的方法可进一步判定 f 的下确界能否达到. 在我们的算法设计中, 著名的吴方法起着重要作用.

关键词　多项式优化　全局下确界　全局最小值　严格临界点　转换原理　吴方法　有理单元表示

MSC (2000) 主题分类　68W30, 12F10

1　引言

多项式的全局极小化问题可描述如下: 对于一个非零的实多元多项式 $f\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$, 计算 f 的全局下确界 $\inf f(\mathbb{R}^n)$, 且在 $\inf f(\mathbb{R}^n)\neq-\infty$ 时, 判定 f 的全局下确界能否达到, 即判定 f 是否具有全局最小值. 这样一个问题已在许多文献中被研究, 例如文献 [1–6]. 在文献 [1] 中, 考察了目标多项式函数的一阶偏导数, 并且采用了 Gröbner 基运算. 当所有一阶偏导数具有无限多个公共零点时, 目标多项式函数的临界点不能简单和清晰地给出. 文献 [2] 对目标多项式函数附加了一些有关条件, 以致在应用上不具有普遍性. 文献 [3] 的作者通过半正定规划方法研究了一类多项式的全局极小化问题. 然而, 半正定规划方法对于其他多项式, 比如 Motzkin 多项式 $x_1^4x_2^2+x_1^2x_2^4+x_3^6-3x_1^2x_2^2x_3^2$, 不能产生所期望的结果. 在文献 [4] 中, 对于给定的多项式 $f\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$, 引进了一个辅助多项式 $f_\lambda:=f(x_1,\dots,x_n)+\lambda(x_1^{2m}+\cdots+x_n^{2m})$, 其中 λ 是一个任意正数, $2m$ 是一个大于 f 的全次数的固定偶数. 与原多项式 f 相比较, f_λ 在问题处理上具有如下两个优势: 其一, f_λ 总具有全局最小值; 其二, f_λ 的所有一阶偏导数 $\partial f_\lambda/\partial x_i$ $(i=1,\dots,n)$ 组成一个零维系统, 且它们对于任意全次数的项序构成一个简化 Gröbner 基. 作为文献 [4] 中一个重要结果, 当 λ 趋向 0 时, $\inf f(\mathbb{R}^n)$ 正是 $f(x_\lambda)$ 的极限, 这里 x_λ 为 f_λ 的任意一个最小值点. 根据这一结果, 文献 [4] 得到了一个基于解矩阵特征问题的算法. 通过该算法, 在确有的情况下能获得 f 的最小值, 且在 f 没有全局最小值的情况下可计算出 $\inf f(\mathbb{R}^n)$. 然而, 一个判定多项式是否有最小值的直接方法在文献 [4] 中未给出. 此外, 当算法所产生的矩阵特征

英文引用格式: Xiao S J, Zeng G X. Algorithms for computing the global infimum and minimum of a polynomial function (in Chinese). Sci Sin Math, 2011, 41(9): 759–788, doi: 10.1360/012010-977

值不能写成清晰可比的数据时, 难以通过相互比较鉴别出欲求的下确界. 在文献 [5] 中, 通过梯度理想上平方和松弛 (sum of squares (SOS) relaxation), 提出了一个求多项式的全局最小值的算法. 然而, 文献 [5] 中主要算法 (Algorithm 1) 立足于这一前提: 输入的多项式被假定能达到下确界, 且该算法计算出的最小值往往是近似的. 在文献 [6] 中, 通过把原先的优化问题化为半正定规划问题, 作者在 f 有下界的情况下考虑了计算 f 的全局下确界的问题. 由于文献 [6] 中算法是数值的, 所计算出的下确界 (或最小值) 也大多是近似的.

在本文中, 我们将提出一个有效地计算实多项式函数的全局下确界和全局最小值的新方法. 对于实数域 $\mathbb{R}$ 上一个 n 元多项式 f, 本文中的方法可用来判定 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上是否具有有限的 (全局) 下确界. 在 f 具有有限下确界的情况下, f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的下确界可严格地表示为码 $(h; a, b)$, 其中 h 是一个在端点为有理数的开区间 $]a, b[$ 中恰有一个根的实单元多项式, 而 $(h; a, b)$ 正代表 $h(z)$ 在 $]a, b[$ 中仅有的实根. 此外, 当 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上具有有限下确界时, 可进一步判定 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的下确界能否达到, 即判定 f 是否具有全局最小值.

在我们的算法设计中, 著名的吴方法起着重要作用. 吴方法是立足于所谓的零点分解定理 (见文献 [7] 中定理 5.1). 设 g 是 $F[\overline{Y}]$ 中一个非常量多项式, 其中 F 是一个域, 且 $\overline{Y} := \{y_1, \ldots, y_m\}$ 是一个变量集. 变量 y_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ 被称作 g 关于通常字典序 $y_1 \prec \cdots \prec y_m$ 的首变量, 若 $g \in F[y_1, \ldots, y_j]$, 但 $g \notin F[y_1, \ldots, y_{j-1}]$. 在下文中, g 的首变量将记作 $\mathrm{lv}(g)$, 且 g 作为 $F[y_1, \ldots, y_{j-1}]$ 上含单变量 y_j 的多项式的首项系数被称作 g 的初式. 由 $F[\overline{Y}]$ 中非常量多项式 $g_1, \ldots, g_s$ 组成的一个序列 C 被称作一个 (关于通常字典序的) 升链, 若 $\mathrm{lv}(g_1) \prec \cdots \prec \mathrm{lv}(g_s)$. 此时, 由 $g_1, \ldots, g_s$ 的初式所组成的集合称作 C 的初式集.

再设 P 和 Q 是 $F[\overline{Y}]$ 的两个有限子集, 且 K 是 F 的任意一个扩张. 此时, 我们可得到 K^n 的如下子集:

$$\mathrm{Zero}_K(P/Q) = \{\bar{\alpha} \in \bar{K}^n \mid \text{对于全部}\, p \in P,\, p(\bar{\alpha}) = 0, \text{但对于全部}\, q \in Q,\, q(\bar{\alpha}) \neq 0\}.$$

特别地, 当 $Q = \{1\}$ 时, 我们将使用 $\mathrm{Zero}_K(P)$ 来取代 $\mathrm{Zero}_K(P/\{1\})$.

为方便起见, 现将零点分解定理引述如下:

零点分解定理 设 F 是一个可计算域, 且 P 是 $K[\overline{Y}]$ 的一个有限子集, 则存在一个有效算法, 可构造出一组升链 $C_1, \ldots, C_r$, 使得对于 F 的任意扩张 K, 下面等式成立:

$$\mathrm{Zero}_K(P) = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant r} \mathrm{Zero}_K(C_j/I_j),$$

其中 I_j 是 C_j 的初式集, $j = 1, \ldots, r$.

上面定理中所说的有效算法即为熟知的吴方法. 应指出, 吴方法已编制成一个名为**wsolve**的计算机通用软件, 可用于有理系数多项式来生成升链.

由 [7] 中定义 3.12 知, 一个字典序可诱导出由 $F[\overline{Y}]$ 中多项式所组成的全部升列之间的一个偏序 $\succ$, 使得对于两个升列 $C_1 = \{f_1, \ldots, f_r\}$ 和 $C_2 = \{g_1, \ldots, g_s\}$, $C_1 \succ C_2$, 如果满足下面两个条件之一:

(1) 存在一个自然数 t, 使得 $t \leqslant \min\{r, s\}$, f_j 和 g_j 同序, $1 \leqslant j < t$, 但 g_t 的序低于 f_t.

(2) $r < s$, 且 f_j 和 g_j 同序, $1 \leqslant j < r$.

正如 [7] 中定理 3.3 所指出, 偏序 $\succ$ 是良型的 (well-founded), 即根本不存在由升列构成的如下无限序列: $C_1 \succ C_2 \succ \cdots \succ C_j \succ \cdots$.

在全文中, 除实数域 $\mathbb{R}$ 和有理域 $\mathbb{Q}$ 外, 所涉及的域 F 也都被假定是特征为零的域. 对于域 F 上多项式环 $F[\overline{Y}]$, 除非特别指明, 有关变量的字典序总默认为通常字典序 $y_1 \prec \cdots \prec y_m$.

本文的剩余部分安排如下. 第 2 节包含一些预备工作. 在这一节中, 我们将实数域 $\mathbb{R}$ 扩充为一个包含无限大正元素 η 的实闭域 $\mathcal{R}$, 并获得了一些涉及域 $\mathbb{R}(\eta)$ 上单元多项式的有用算法. 在第 3 节中, 我们针对半代数子集引进了 "严格临界点" 这一概念, 并提出了一个捕获某类半代数子集的严格临界点的算法. 在第 4 节中, 对于实数域 $\mathbb{R}$ 上一个 n 元多项式 f, 我们研究了 f 在仿射空间 $\mathcal{R}^n$ 中闭立方体 $[-\eta,\eta]^n$ 上的最小值, 由此在理论上建立了一些反映该最小值与 f 的全局下确界之间紧密关系的结论, 其中包括一个有关多元多项式 f 具有全局最小值的充分必要条件. 在此基础上, 我们提出了一个算法, 该算法既可计算 f 的全局下确界, 又可判定 f 的全局下确界能否达到, 这里 f 是实数域 $\mathbb{R}$ 上任意一个多元多项式. 最后一节给出了几个实例, 用来表明我们的算法的有效性.

2　预备工作

在建立主要算法前, 我们需要一些预备工作. 在此, 先需要将实数域 $\mathbb{R}$ 扩充为一个包含无限大元素 η 的序域.

设 η 是实数域 $\mathbb{R}$ 上一个未定元, $\mathbb{R}[\eta]$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上含未定元 η 的单元多项式环, 且 $\mathbb{R}(\eta)$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上含未定元 η 的有理函数域, 则 $\mathbb{R}(\eta)=\{\frac{g(\eta)}{h(\eta)} \mid g, h\in\mathbb{R}[\eta], \text{ 且 } h(\eta)\neq 0\}$. 由序域理论 (参见文献 [8] 或 [9]), 实数域 $\mathbb{R}$ 的序 $\leqslant$ 可惟一地拓展为 $\mathbb{R}(\eta)$ 的一个序, 仍记作 $\leqslant$, 使得对于非零元 $\frac{g}{h}\in\mathbb{R}(\eta)$, 其中 $g, h\in\mathbb{R}[\eta]\setminus\{0\}$, $\frac{g}{h}<0$, 当且仅当 $\mathbb{R}[\eta]$ 中单元多项式 gh 的首项系数为负.

显然, 对于非零多项式 $g\in\mathbb{R}[\eta]$, $g<0$ 当且仅当 g 的首项系数为负. 从而 $-\eta<0$ 且 $a-\eta<0$, 其中 a 为任意实数. 由此有 $0<\eta$ 且 $a<\eta$, 其中 a 为任意实数. 换言之, η 是实数域 $\mathbb{R}$ 上无限大的正元素.

记 $\mathcal{R}$ 为序域 $(\mathbb{R}(\eta),\leqslant)$ 的实闭包, 且 $\mathcal{R}$ 的惟一序仍记作 $\leqslant$. 自然有 $\mathbb{R}\subset\mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ 中一个元素 α 称作是实数域 $\mathbb{R}$ 上有界元素, 若对于某个正数 d, $-d<\alpha<d$. $\mathcal{R}$ 中一个元素 ϵ 称作是实数域 $\mathbb{R}$ 上无限小元素, 若对于任意正数 δ, $-\delta<\epsilon<\delta$. 现在, 我们构造 $\mathcal{R}$ 的如下两个子集:

$$A:=\{z\in\mathcal{R}\mid \text{ 对于某个正数 } d\in\mathbb{R}, -d\leqslant z\leqslant d\},$$
$$M:=\{z\in\mathcal{R}\mid \text{ 对于每个正数 } d\in\mathbb{R}, -\delta\leqslant z\leqslant \delta\}.$$

因而, A 由 $\mathcal{R}$ 中所有在 $\mathbb{R}$ 上有界的元素组成, 而 M 由 $\mathcal{R}$ 中所有在 $\mathbb{R}$ 上无限小的元素组成. 容易验证, A 是 $\mathcal{R}$ 的一个子环, M 是 A 的一个理想, 且 A 和 M 在 $\mathcal{R}$ 中关于序 $\leqslant$ 都是凸的. 根据序 $\leqslant$ 的结构, 显然 $\mathbb{R}\subset A\subset\mathcal{R}$, 且 $\eta^{-1}\in M$. 在下文中, $\mathcal{R}\setminus A$ 中的元素都称作在 $\mathbb{R}$ 上的无界元素.

对于 $\alpha\in\mathcal{R}$, 构造 $\mathbb{R}$ 的如下子集:

$$\Omega_\alpha:=\{r\in\mathbb{R}\mid \alpha\leqslant r\}.$$

当 $\Omega_\alpha\neq\emptyset$ 时, 其中 $\alpha\in\mathcal{R}$, 记 $\pi(\alpha)$ 为 Ω_α 的下确界 $\inf(\Omega_\alpha)$. 此时, $\pi(\alpha)\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, 且 $\pi(\alpha)\in\mathbb{R}$ 当且仅当 $\alpha\in A$. 当 $\Omega_\alpha=\emptyset$ 时, 我们规定 $\pi(\alpha):=\infty$. 这样, 我们得到一个 $\mathcal{R}$ 到 $\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$ 的映射 π, 使得对于每个 $\alpha\in\mathcal{R}$, $\pi(\alpha)$ 恰是 α 的象.

容易验证, 映射 π 满足下面命题中全部条件, 该命题的证明留给读者.

命题 2.1　设记号同上, 则下面条件都成立:

(1) 限制映射 $\pi\,|_A$ 是环 A 到环 $\mathbb{R}$ 的一个 $\mathbb{R}$- 同态, 使得 M 恰为 $\pi\,|_A$ 的核.

(2) 对于 $\xi\in\mathcal{R}\setminus A$, $\pi(\xi)=\infty$ 若 $\xi>0$; 否则, $\pi(\xi)=-\infty$.

(3) 对于 $\alpha,\beta\in\mathcal{R}$, 由 $\alpha\leqslant\beta$ 可推出 $\pi(\alpha)\leqslant\pi(\beta)$, 这里约定: 对于任意实数 r, $-\infty<r<\infty$.

定义 1　对于 $\alpha\in\mathcal{R}$, $\pi(\alpha)$ 称作 α 的标准化.

由命题 2.1 中条件 (1) 知, $\pi(g(\eta^{-1}))=g(0)$, 其中 $g\in\mathbb{R}[z]$. 特别地, $\pi(\eta^{-1})=0$. 此外, 对于任意 $\alpha\in A$, $\alpha-\pi(\alpha)\in M$.

在下文中, 我们将采用如下常用符号: 对于 $a,b\in\mathbb{R}$, 其中 $a<b$, $]a,b[$ (或 $[a,b]$) 表示 $\mathbb{R}$ 中左右端点分别为 a 和 b 的开 (或闭) 区间 $\{r\in\mathbb{R}\mid a<r<b\}$ (或 $\{r\in\mathbb{R}\mid a\leqslant r\leqslant b\}$), 但 $]\alpha,\beta[_{\mathcal{R}}$ (或 $[\alpha,\beta]_{\mathcal{R}}$) 表示 $\mathcal{R}$ 中左右端点分别为 α 和 β 的开 (或闭) 区间 $\{\gamma\in\mathcal{R}\mid\alpha<\gamma<\beta\}$ (或 $\{\gamma\in\mathcal{R}\mid\alpha\leqslant\gamma\leqslant\beta\}$), 其中 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$. 当然, (有限的或无限的) 半开 (或闭) 区间可类似地表示.

对于 $\mathcal{R}$ 上一个变量 y, $\mathbb{R}[\eta][y]$ 中元素既可看作 $\mathbb{R}[y]$ 上含 η 的单元多项式, 又可看作 $\mathbb{R}[\eta]$ 上含 y 的单元多项式. 对于非零 $\Phi(y)\in\mathbb{R}[\eta][y]$, 用 $\mathrm{lcoeff}(\Phi,\eta)$ 和 $\deg(\Phi;\eta)$ 表示 $\Phi(y)$ 作为 $\mathbb{R}[y]$ 上含 η 的单元多项式的首项系数和次数. 同样, 用 $\mathrm{lcoeff}(\Phi,y)$ 和 $\deg(\Phi;y)$ 表示 $\Phi(y)$ 作为 $\mathbb{R}[\eta]$ 上含 y 的单元多项式的首项系数和次数. 显然, $\mathrm{lcoeff}(\Phi(y),\eta)\in\mathbb{R}[y]$, 但 $\mathrm{lcoeff}(\Phi(y),y)\in\mathbb{R}[\eta]$.

为了精确地表示实多项式函数的全局下确界和全局最小值, 我们将采用下面定义所描述的区间表示法 (Interval representation). 对于实代数数的区间表示, 有关详情可见于 [10] 中 §8.5.

定义 2　设 $h(y)$ 是 $\mathbb{R}[y]$ 中一个非零多项式, 且 $]a,b[$ 是 $\mathbb{R}$ 中一个开区间. 若 $h(a)$ 和 $h(b)$ 都不为零, 且 $h(y)$ 在 $]a,b[$ 中恰有一个根, 则 $h(y)$ 在 $]a,b[$ 中仅有的实根记作: $(h(z);a,b)$. 形如 $(h(z);a,b)$ 的实数被称为区间表示的实数. 此时进一步称, $(h(z);a,b)$ 是一个 F 上区间表示的实代数数, 若 F 是 $\mathbb{R}$ 的一个使得 $h(z)\in F[z]$ 且 $a,b\in F$ 的子域.

Sturm 定理以及广义的 Sturm-Tarski 定理是实域论和实代数几何中两个重要的算法定理. 对于 Sturm 定理以及广义的 Sturm-Tarski 定理的具体内容, 可见于文献 [10]. 借助于 Sturm 定理以及广义的 Sturm-Tarski 定理, 容易得到下面算法, 该算法可用来比较两个区间表示的实数的大小.

算法 2.2　(**判定两个区间表示的实数的大小**)

结构:　$\mathbb{R}$ 的一个可计算的序子域 F, 使得单元多项式的实根隔离法可执行.

输入:　非零多项式 $g(y)$ 和 $h(y)\in F[y]$ 以及 $\mathbb{R}$ 中两个开区间 $]a,b[$ 和 $]c,d[$, 使得 $g(y)$ 和 $h(y)$ 分别在 $]a,b[$ 和 $]c,d[$ 内恰有一个根.

输出:　$\{(g(y);a,b)<(h(y);c,d),\ (g(y);a,b)=(h(y);c,d),\ (g(y);a,b)>(h(y);c,d)\}$ 中惟一能够成立的关系式.

计算过程:

步骤 1　通过实根隔离法, 计算出 $g(y)h(y)$ 的一组隔离区间: $]c_1,d_1[,\ldots,]c_m,d_m[$.

步骤 2　在开区间序列 $]c_1,d_1[,\ldots,]c_m,d_m[$ 中抽取出全部开区间 $]c_k,d_k[,\ldots,]c_r,d_r[$, 其中 $1\leqslant k<r\leqslant m$, 使得 $]c_i,d_i[\cap]a,b[\neq\emptyset$, $i=k,\ldots,r$. 对于 i 从 k 到 r, 由 Sturm 定理检测 $g(y)$ 在 $]c_i',d_i'[$ 内是否有根, 其中 $c_i':=\max\{a,c_i\}$, 且 $d_i':=\min\{b,d_i\}$. 若对于某个 $n_g\in\{k,\ldots,r\}$, $g(y)$ 在 $]c_{n_g}',d_{n_g}'[$ 内有根, 则做下一步.

步骤 3　在开区间序列 $]c_1,d_1[,\ldots,]c_m,d_m[$ 中抽取出全部开区间 $]c_\ell,d_\ell[,\ldots,]c_s,d_s[$, 其中 $1\leqslant\ell<s\leqslant m$, 使得 $]c_j,d_j[\cap]c,d[\neq\emptyset$, $j=\ell,\ldots,s$. 对于 j 从 ℓ 到 s, 由 Sturm 定理检测 $h(y)$ 在 $]c_j'',d_j''[$ 内是否有根, 其中 $c_j'':=\max\{c,c_j\}$, 且 $d_j'':=\min\{d,d_j\}$. 若对于某个 $n_h\in\{\ell,\ldots,s\}$, $h(y)$ 在 $]c_{n_h}'',d_{n_h}''[$ 内有根, 则做下一步.

步骤 4　根据 $n_g<n_h$, 或 $n_g=n_h$, 或 $n_g>n_h$, 相应地输出如下结果:

$$(g(y);a,b)<(h(y);c,d),\quad 或\ (g(y);a,b)=(h(y);c,d),\quad 或\ (g(y);a,b)>(h(y);c,d).$$

证明 设 $n_g<n_h$, 且设 α 和 β 分别是 $g(y)$ 在 $]c'_{n_g},d'_{n_g}[$ 内和 $h(y)$ 在 $]c''_{n_h},d''_{n_h}[$ 内的根. 注意到, $]c'_{n_g},d'_{n_g}[=]c_{n_g},d_{n_g}[\cap]a,b[$ 且 $]c''_{n_h},d''_{n_h}[=]c_{n_g},d_{n_g}[\cap]c,d[$. 从而 α 和 β 是 $g(y)h(y)$ 分别在 $]c_{n_g},d_{n_g}[$ 和 $]c_{n_h},d_{n_h}[$ 内的根. 由于 $n_g<n_h$, 从而

$$\alpha=(gh(y);c_{n_g},d_{n_g})<(gh(y);c_{n_h},d_{n_h})=\beta.$$

注意到 α 也是 $g(y)$ 在 $]a,b[$ 内的根. 由于 $(g(y);a,b)$ 是 $g(y)$ 在 $]a,b[$ 内的惟一根, 从而 $\alpha=(g(y);a,b)$. 同样, $\beta=(h(y);c,d)$. 因而, $(g(y);a,b)<(h(y);c,d)$.

同理, $(g(y);a,b)=(h(y);c,d)$ (或 $(g(y);a,b)>(h(y);c,d)$), 只要 $n_g=n_h$ (或 $n_g>n_h$). 证毕. □

在下面, 对于一个有限集合 S, 将用记号 $\#S$ 表示 S 中元素的个数.

算法 2.3 **(计算 $\#\{\alpha\in\mathcal{R}\mid u(\alpha)=0$, 和 $a<\Psi(\alpha)<b\}$, 其中 $u(y)\in\mathbb{R}(\eta)[y]$ 且 $\Psi(y)\in\mathbb{R}(\eta)(y)$)**

结构: $\mathbb{R}$ 的一个可计算的序子域 F.

输入: 非零多项式 $u(y)$, $v(y)$ 和 $w(y)\in F(\eta)[y]$ 以及 a 和 $b\in F$, 使得 $a<b$, $u(y)$ 和 $w(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中没有公共根, 且 $u(y)$ 和 $(v(y)-aw(y))(v(y)-bw(y))$ 在 $\mathcal{R}$ 中没有公共根.

输出: $\#\{\alpha\in\mathcal{R}\mid u(\alpha)=0,\text{且}a<\frac{v(\alpha)}{w(\alpha)}<b\}$.

计算过程:

步骤 1 记 $u'(y)$ 为 $u(y)$ 的导数, 且计算 $u(y)$ 和 $(v(y)-aw(y))(v(y)-bw(y))u'(y)$ 的 (标准) Sturm 序列如下:

$$g_1,g_2,\dots,g_m,$$

其中 $g_i\in F(\eta)[y]$ 是非零多项式, $i=1,\dots,m$.

步骤 2 抽取 g_i 的首项系数 a_i, $i=1,\dots,m$.

步骤 3 分别计算表 $\langle(-1)^{\deg(g_i)}a_i\mid i{=}1,\dots,m\rangle$ 和 $\langle a_i\mid i{=}1,\dots,m\rangle$ 中的符号变化数 W_1 和 W_2.

步骤 4 由 Sturm 定理, 计算 $u(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中的所有相异根的个数 W. 由此输出如下结果:

$$\#\left\{\alpha\in\mathcal{R}\mid u(\alpha)=0,\text{ 且 }a<\frac{v(\alpha)}{w(\alpha)}<b\right\}=\frac{1}{2}(W-W_1+W_2).$$

证明 令 $T_1:=\{\alpha\in\mathcal{R}\mid u(\alpha)=0,\text{且 }(v(\alpha)-aw(\alpha))(v(\alpha)-bw(\alpha))>0\}$, 且 $T_2:=\{\alpha\in\mathcal{R}\mid u(\alpha)=0,\text{且 }(v(\alpha)-aw(\alpha))(v(\alpha)-bw(\alpha))<0\}$. 设 B 是 $\mathcal{R}$ 中一个充分大的正元素, 使得 $u(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中的全部根都在开区间 $]-B,B[$ 内. 由广义的 Sturm-Tarski 定理 (见 [10] 中定理 8.4.3), 我们有 $\#T_1-\#T_2=V_1-V_2$, 其中 V_1 和 V_2 分别是表 $\langle g_i(-B)\mid i=1,\dots,m\rangle$ 和 $\langle g_i(B)\mid i=1,\dots,m\rangle$ 中的符号变化数. 由于 B 可取充分大, 从而 $g_i(-B)$ 和 $(-1)^{\deg(g_i)}a_i$ ($g_i(B)$ 和 a_i) 具有相同符号, $i=1,\dots,m$. 这意味着 $V_1=W_1$ 且 $V_2=W_2$. 因而 $\#T_1-\#T_2=W_1-W_2$.

另一方面, 由于 $u(y)$ 和 $(v(y)-aw(y))(v(y)-bw(y))$ 在 $\mathcal{R}$ 中没有公共根, 从而 $\#T_1+\#T_2=W$. 于是 $\#T_2=\frac{1}{2}(W-W_1+W_2)$.

注意到, $u(y)$ 和 $w(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中没有公共根. 从而有

$$\begin{aligned}&\{\alpha\in\mathcal{R}\mid u(\alpha)=0,\text{且 }(v(\alpha)-aw(\alpha))(v(\alpha)-bw(\alpha))<0\}\\&=\left\{\alpha\in\mathcal{R}\mid u(\alpha)=0,\text{且 }\left(\frac{v(\alpha)}{w(\alpha)}-a\right)\left(\frac{v(\alpha)}{w(\alpha)}-b\right)<0\right\}\\&=\left\{\alpha\in\mathcal{R}\mid u(\alpha)=0,\text{且 }a<\frac{v(\alpha)}{w(\alpha)}<b\right\}.\end{aligned}$$

至此, 算法 2.3 的正确性得证. □

类似地, 我们可证明下面算法的正确性.

算法 2.4 (计算 $\#\{\alpha \in \mathcal{R} \mid u(\alpha) = 0, 和 -\infty < \Psi(\alpha) < a\}$, 其中 $u(y) \in \mathbb{R}(\eta)[y]$ 且 $\Psi(y) \in \mathbb{R}(\eta)(y)$)

结构: $\mathbb{R}$ 的一个可计算的序子域 F.

输入: 非零多项式 $u(y)$, $v(y)$ 和 $w(y) \in F(\eta)[y]$ 以及 $a \in F$, 使得 $u(y)$ 和 $w(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中没有公共根, 且 $u(y)$ 和 $v(y) - aw(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中没有公共根.

输出: $\#\{\alpha \in \mathcal{R} \mid u(\alpha) = 0, 且 -\infty < \frac{v(\alpha)}{w(\alpha)} < a\}$ 和 $\#\{\alpha \in \mathcal{R} \mid u(\alpha) = 0, 且\ a < \frac{v(\alpha)}{w(\alpha)} < \infty\}$.

计算过程:

步骤 1 记 $u'(y)$ 为 $u(y)$ 的导数, 且计算 $u(y)$ 和 $(v(y) - aw(y))w(y)u'(y)$ 的 (标准)Sturm 序列如下:

$$g_1, g_2, \dots, g_m,$$

其中 $g_i \in F(\eta)[y]$ 是非零多项式, $i = 1, \dots, m$.

步骤 2 抽取 g_i 的首项系数 a_i, $i = 1, \dots, m$.

步骤 3 分别计算表 $\langle (-1)^{\deg(g_i)} a_i \mid i=1,\dots,m \rangle$ 和 $\langle a_i \mid i=1,\dots,m \rangle$ 中的符号变化数 W_1 和 W_2.

步骤 4 由 Sturm 定理, 计算 $u(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中的所有相异实根的个数 W. 由此输出如下结果:

$$\#\left\{\alpha \in \mathcal{R} \mid u(\alpha) = 0, 且 -\infty < \frac{v(\alpha)}{w(\alpha)} < a\right\} = \frac{1}{2}(W - W_1 + W_2),$$

$$\#\left\{\alpha \in \mathcal{R} \mid u(\alpha) = 0, 且\ a < \frac{v(\alpha)}{w(\alpha)} < \infty\right\} = \frac{1}{2}(W + W_1 - W_2).$$

为方便叙述后面的算法, 我们需要下面的定义.

定义 3 设 F 是 $\mathbb{R}$ 的一个子域, $F(\eta)[y]$ 是域 $F(\eta)$ 上含单变量 y 的多项式环, 且 $F(\eta)(y)$ 为 $F(\eta)[y]$ 的分式域. $F(\eta)[y] \times F(\eta)(y)^n$ 中一个 $n+1$ 元序组 $(u(y), \phi_1(y), \dots, \phi_n(y))$ 称作一个有理单元表示 (简记: RUR), 若 $u(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中至少有一个根, 且 $u(y)$ 和 $\phi_j(y)$ 的分母互素 (即对于 $u(y)$ 在域 $F(\eta)$ 的任意扩张中每个根 α, 有理式 $\phi_j(y)$ 的分母在 $y = \alpha$ 时不为零, $j = 1, \dots, n$).

对于一个多项式 $g \in F(\eta)[x_1, \dots, x_n]$ 以及 $F(\eta)[y] \times F(\eta)(y)^n$ 中一个 RUR $\xi := (u(y), \phi_1(y), \dots, \phi_n(y))$, 记 $(g : \xi)$ 为 $\mathcal{R}$ 的如下子集:

$$\{g(\phi_1(\alpha), \dots, \phi_n(\alpha)) \mid \alpha\ 是\ u(y)\ 在\ \mathcal{R}\ 中一个根\}.$$

子集 $(g : \xi)$ 中最小元素, 记作 $\min(g : \xi)$, 将其称作 g 关于 ξ 的最小值, 且它的标准化 $\pi(\min(g : \xi))$ 称作 g 关于 ξ 的标准化最小值.

基于以上算法 2.3 和 2.4, 我们可以给出下面的算法.

算法 2.5 (计算域 $\mathbb{R}(\eta)$ 上多项式关于 RUR 的标准化最小值)

结构: $\mathbb{R}$ 的一个可计算的序子域 F, 使得单元多项式的实根隔离法被容许执行.

输入: 一个多项式 $g \in F(\eta)[x_1, \dots, x_n]$ 以及 $F(\eta)[y] \times F(\eta)(y)^n$ 中一个 RUR $\xi := (u(y), \phi_1(y), \dots, \phi_n(y))$.

输出: 一个元素 $\lambda \in \{-\infty, \infty, (h(z); c, d)\}$, 其中 $h(z)$ 是一个 F 上含未定元 z 的非零多项式, $]c, d[\subset \mathbb{R}$ 是一个有限开区间, 且 $h(z)$ 在 $]c, d[$ 中恰有一个根, 使得

- λ 是 g 关于 ξ 的标准化最小值.

计算过程:

步骤 1　将 $g(\phi_1(y),\dots,\phi_n(y))$ 表为这样的形式: $\frac{v(y)}{w(y)}$, 其中 $v(y), w(y)\in\mathbb{R}(\eta)[y]$, 且 $u(y)$ 和 $w(y)$ 互素.

步骤 2　对于新变量 z, 计算多项式 $u(y)$ 和 $v(y)-zw(y)$ 关于未定元 y 的结式, 并将该结式表示为 $\frac{H(\eta,z)}{G(\eta)}$, 其中 $H(\eta,z)\in\mathbb{R}[\eta][z]$, 且 $G(\eta)\in\mathbb{R}[\eta]$.

步骤 3　抽取 $H(\eta,z)$ 作为 $\mathbb{R}[z]$ 上含 η 的单元多项式的首项系数 $h(z)$.

步骤 4　通过实根隔离法, 计算出 $h(z)$ 的一组隔离区间: $]c_1,d_1[,\dots,]c_m,d_m[$.

步骤 5　记 $c_0=-\infty$, 且 $d_0=c_1$. 对于 i 从 0 到 m, 由算法 2.3 或 2.4 计算非负整数 N_i, 这里 $N_i:=\#\{\alpha\in\mathcal{R}\mid u(\alpha)=0,\text{且}c_i<\frac{v(\alpha)}{w(\alpha)}<d_i\}$. 若对于某个 $k\in\{0,1,\dots,m+1\}$, $N_k>0$, 则结束计算. 根据情况 $k=0$, 或 $1\leqslant k\leqslant m$, 或所有 $N_i=0$ $(i=0,1,\dots,m)$, 相应地输出如下结果:

$$\lambda=-\infty,\ \text{或}\ \lambda=(h(z);c_k,d_k),\ \text{或}\ \lambda=\infty.$$

证明　由定义 3 可保证 $g(\phi_1(y),\dots,\phi_n(y))$ 能表为如步骤 1 中所示的形式 $\frac{v(y)}{w(y)}$, 因为 $u(y)$ 和 $\phi_j(y)$, $j=1,\dots,n$, 的分母是互素的. 令 $\mu:=\min(g:\xi)$, 则 μ 在 $\{\frac{v(\alpha)}{w(\alpha)}\mid\alpha$ 是 $u(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中的一个根$\}$中是最小的. 从而存在 $u(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中的一个根 α, 使得 $\mu=\frac{v(\alpha)}{w(\alpha)}$.

由于 $u(y)$ 和 $w(y)$ 互素, 从而易知, $u(y)$ 和 $v(y)-zw(y)$ 作为 $\mathbb{R}(\eta)[z]$ 上含 y 的多项式没有非常量的公因式. 从而结式 $\frac{H(\eta,z)}{G(\eta)}$ 不为零. 注意到, $u(y)$ 和 $v(y)-\mu w(y)$ 有公共根 α. 因而 $\frac{H(\eta,\mu)}{G(\eta)}=0$, 即 $H(\eta,\mu)=0$. 将 $H(\eta,z)$ 表为如下形式:

$$H(\eta,z):=h(z)\eta^d+h_1(z)\eta^{d-1}+\cdots+h_d(z),$$

其中 $h(z),h_1(z),\dots,h_d(z)\in F[z]$, 且 $h(z)$ 为 $H(\eta,z)$ 作为 $\mathbb{R}[z]$ 上含 η 的单元多项式的首项系数.

由等式 $H(\eta,\mu)=0$ 有

$$h(\mu)+h_1(\mu)\eta^{-1}+\cdots+h_d(\mu)\eta^{-d}=\eta^{-d}H(\eta,\mu)=0.$$

现针对 μ, 分如下三种情形进行讨论:

情形 1　$\pi(\mu)=-\infty$, 即 $\mu\in\mathcal{R}\setminus A$ 且 $\mu<0$. 此时, $c_0<\mu<d_0$, 即 $c_0<\frac{v(\alpha)}{w(\alpha)}<d_0$. 从而由计算步骤 5 知, $N_0\geqslant 1$.

情形 2　$\pi(\mu)=\infty$, 即 $\mu\in\mathcal{R}\setminus A$ 且 $\mu>0$. 此时, 假设存在某个 $\ell\in\{0,\dots,m\}$ 使得 $N_\ell\neq 0$, 则有 $u(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中的一个根 α', 使得 $c_\ell<\frac{v(\alpha')}{w(\alpha')}<d_\ell$. 由于 μ 在 $\{\frac{v(\alpha)}{w(\alpha)}\mid\alpha$ 是 $u(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中的一个根$\}$中是最小的, 从而 $\mu\leqslant\frac{v(\alpha')}{w(\alpha')}<d_\ell\leqslant d_m$, 矛盾. 因而 $N_i=0$, $i=0,\dots,m$.

情形 3　$\pi(\mu)\in\mathbb{R}$, 即 $\mu\in A$. 此时, 根据命题 2.1, 由上面的等式有

$$\begin{aligned}h(\pi(\mu))&=h(\pi(\mu))+h_1(\pi(\mu))\pi(\eta^{-1})+\cdots+h_d(\pi(\mu))\pi(\eta^{-1})^d\\&=\pi(h(\mu)+h_1(\mu)\eta^{-1}+\cdots+h_d(\mu)\eta^{-d})=\pi(0)=0.\end{aligned}$$

这表明, $\pi(\mu)$ 是多项式 $h(z)$ 在 $\mathbb{R}$ 中的一个实根. 由步骤 4 知, $]c_1,d_1[,\dots,]c_m,d_m[$ 是 $h(z)$ 的一组隔离区间. 从而有某个 $k\in\{1,\dots,m\}$, 使得 $c_k<\pi(\mu)<d_k$, 即 $\pi(c_k)<\pi(\mu)<\pi(d_k)$. 根据命题 2.1 中条件 (3), $c_k<\mu<d_k$, 即 $c_k<\frac{v(\alpha)}{w(\alpha)}<d_k$. 因而, $N_k\geqslant 1$.

假若对于某个 $\ell\in\{0,\dots,k-1\}$, $N_\ell\neq 0$, 则 $u(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中有一个根 α', 使得 $c_\ell<\frac{v(\alpha')}{w(\alpha')}<d_\ell$. 由于 μ 在 $\{\frac{v(\alpha)}{w(\alpha)}\mid\alpha$ 是 $u(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中的一个根$\}$中是最小的, 从而 $\mu\leqslant\frac{v(\alpha')}{w(\alpha')}<d_\ell\leqslant c_{\ell+1}\leqslant c_k$, 矛盾. 因而 $N_i=0$, $i=0,\dots,k-1$.

此外, 显然 $\pi(\mu) = (h(z); c_k, d_k)$. 至此, 算法的正确性得证. □

算法 2.6 (判定一个实数是否为已知多项式关于一个 RUR 的值)

结构: $\mathbb{R}$ 的一个可计算的序子域 F.

输入: 一个多项式 $f \in F[x_1, \ldots, x_n]$, $F(\eta)[y] \times F(\eta)(y)^n$ 中一个 RUR $\xi := (u(y), \phi_1(y), \ldots, \phi_n(y))$ 以及一个 F 上区间表示的实代数数 $(h(z); a, b)$.

输出: 词 "**TRUE**" 或 "**FALSE**", 使得

- 若 $(h(z); a, b) \in (f : \xi)$, 则输出 "**TRUE**"; 否则输出 "**FALSE**".

计算过程:

步骤 1 计算有理式 $f(\phi_1(y), \ldots, \phi_n(y))$, 并将其表示为 $\frac{v(y)}{w(y)}$, 其中 $v(y), w(y) \in \mathbb{R}(\eta)[y]$, 且 $u(y)$ 和 $w(y)$ 互素. 再将有理式 $h\left(\frac{v(y)}{w(y)}\right)$ 表示为 $\frac{G(y)}{w(y)^s}$, 其中 $G(y) \in \mathbb{R}(\eta)[y]$, 且 s 是多项式 $h(z)$ 的次数.

步骤 2 计算多项式 $u(y)$ 和 $G(y)$ 的最大公因式 $u_1(y)$, 并分别计算 $v(y)$ 和 $w(y)$ 除以 $u_1(y)$ 的余式 $v_1(y)$ 和 $w_1(y)$.

步骤 3 由算法 2.3, 计算非负整数 N, 这里 $N := \#\{\alpha \in \mathcal{R} \mid u_1(\alpha) = 0, \text{且} a < \frac{v_1(\alpha)}{w_1(\alpha)} < b\}$. 若 $N > 0$, 则输出 "**TRUE**"; 否则, 输出 "**FALSE**".

证明 由定义 3 可保证 $f(\phi_1(y), \ldots, \phi_n(y))$ 能表为所希望的形式 $\frac{v(y)}{w(y)}$. 由步骤 2 易见, $u_1(y)$ 和 $w_1(y)$ 互素.

假设 $u_1(y)$ 和 $(v_1(y) - aw_1(y))(v_1(y) - bw_1(y))$ 在 $\mathcal{R}$ 中有一个公共根 α, 则 $u_1(\alpha) = 0$. 从而 $G(\alpha) = 0$, 但 $w_1(\alpha) \neq 0$. 于是 $h(a)$ 或 $h(b) = h(\frac{v_1(\alpha)}{w_1(\alpha)}) = h(\frac{v(\alpha)}{w(\alpha)}) = \frac{G(\alpha)}{w(\alpha)^s} = 0$, 矛盾. 因而, $u_1(y)$ 和 $(v_1(y) - aw_1(y))(v_1(y) - bw_1(y))$ 在 $\mathcal{R}$ 中没有公共根. 根据算法 2.3, 步骤 3 中的计算是可行的.

现设 $(h(z); a, b) \in (f : \xi)$. 由 $(f : \xi)$ 的定义知, $(f : \xi) = \{f(\phi_1(\alpha), \ldots, \phi_n(\alpha)) \mid \alpha$ 是 $u(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中一个根$\}$. 从而 $(h(z); a, b) \in \{\frac{v(\alpha)}{w(\alpha)} \mid \alpha$ 是 $u(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中一个根$\}$, 即存在 $u(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中的一个根 α_1, 使得 $(h(z); a, b) = \frac{v(\alpha_1)}{w(\alpha_1)}$. 由于 $(h(z); a, b)$ 是 $h(z)$ 的一个根, 从而 $h(\frac{v(\alpha_1)}{w(\alpha_1)}) = 0$, 即 $G(\alpha_1) = 0$. 由于 $u_1(y)$ 是多项式 $u(y)$ 和 $G(y)$ 的最大公因式, 从而 $u_1(\alpha_1) = 0$. 于是, 由步骤 2 易知, $\frac{v(\alpha_1)}{w(\alpha_1)} = \frac{v_1(\alpha_1)}{w_1(\alpha_1)}$. 从而 $\frac{v_1(\alpha_1)}{w_1(\alpha_1)} = (h(z); a, b)$. 这表明, $\frac{v_1(\alpha_1)}{w_1(\alpha_1)} \in \{\alpha \in \mathcal{R} \mid u_1(\alpha) = 0, \text{且} a < \frac{v_1(\alpha)}{w_1(\alpha)} < b\}$. 因而, $N > 0$.

反过来, 设 $N > 0$, 则存在 $u_1(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中的一个根 α', 使得 $a < \frac{v_1(\alpha')}{w_1(\alpha')} < b$. 由步骤 2 知, α' 是 $u(y)$ 和 $G(y)$ 在$\mathcal{R}$ 中的一个公共根, 且 $\frac{v(\alpha')}{w(\alpha')} = \frac{v_1(\alpha')}{w_1(\alpha')}$. 由此有, $a < \frac{v(\alpha')}{w(\alpha')} < b$, 且 $w(\alpha') \neq 0$. 于是, 我们有 $h(\frac{v(\alpha')}{w(\alpha')}) = \frac{G(\alpha')}{w(\alpha')^s} = 0$. 此时必有 $\frac{v(\alpha')}{w(\alpha')} \in \mathbb{R}$. 由于 $(h(z); a, b)$ 是 $h(z)$ 在 $]a, b[$ 内的惟一根, 从而 $(h(z); a, b) = \frac{v(\alpha')}{w(\alpha')} \in \{\frac{v(\alpha)}{w(\alpha)} \mid \alpha$ 是 $u(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中一个根$\}$, 即 $(h(z); a, b) \in (f : \xi)$. 算法的正确性得证. □

3 严格临界点及其捕获

在本节中, 我们将针对半代数子集引进所谓的严格临界点的定义. 基于吴方法, 我们提出一个捕获某类半代数子集中严格临界点的有效算法, 该类半代数子集与所讨论的问题密切相关. 本节中的算法是下节中主要算法的核心.

不失一般性, 设 $(F, \leqslant)$ 是一个实闭包为 R 的可计算序域, 且 $F[\overline{Y}] := F[y_1, \ldots, y_m]$ 是 F 上 m 元多项式环.

设 S 是 R^m 的一个半代数子集. 对于 $b_1, \ldots, b_r \in R$, 其中 $0 \leqslant r < m$, 可构造 R 的如下子集:

$$S_{(b_1,\ldots,b_r)} := \{a \in R \mid \text{有} a_{r+2}, \ldots, a_m \in R, \text{ 使得} (b_1, \ldots, b_r, a, a_{r+2}, \ldots, a_m) \in S\}.$$

注意: 当 $r=0$ 时, $S_{()}:=\{a\in R \mid 有 a_2,\ldots,a_m\in R, 使得 (a,a_2,\ldots,a_m)\in S\}$, 且 $S_{()}\neq\emptyset$ 只要 $S\neq\emptyset$.

由文献 [11] 中命题 2.1.7 知, $S_{(b_1,\ldots,b_r)}$ 是由 R 中有限个不相交的 (开, 闭或半开半闭) 区间以及有限个孤立点所组成的半代数子集, 只要 $S_{(b_1,\ldots,b_r)}\neq\emptyset$. 对于 $S_{(b_1,\ldots,b_r)}$ 中孤立点 a, $\{a\}$ 可看作左右端点相同的闭区间 $[a,a]$. 这样, 当 $S_{(b_1,\ldots,b_r)}\neq\emptyset$ 时, $S_{(b_1,\ldots,b_r)}$ 是由 R 中有限多个不相交的 (开, 闭或半开半闭) 区间所组成的. 此外, 我们可以认定, $S_{(b_1,\ldots,b_r)}$ 中任意两个区间不具有相同端点, 它既是其中一个区间的开端点, 同时又是另一区间的闭端点. 在下文中, 这些区间的端点都称作 $S_{(b_1,\ldots,b_r)}$ 的 (区间) 端点. $S_{(b_1,\ldots,b_r)}$ 中一个区间端点称作有限端点, 如果它是 R 中元素. 当 $S_{(b_1,\ldots,b_r)}\neq\emptyset$ 时, $S_{(b_1,\ldots,b_r)}$ 的每个闭端点都是有限的, 且 $S_{(b_1,\ldots,b_r)}$ 至少具有一个有限端点, 又 $S_{(b_1,\ldots,b_r)}\neq R$.

定义 4 设记号同上. S 中一个点 $(a_1,\ldots,a_m)$ 称作一个严格临界点, 若对于每个 $r\in\{0,\ldots,m-1\}$, a_{r+1} 是 $S_{(b_1,\ldots,b_r)}$ 中某个区间的闭端点.

作为一个简单但有用的事实, 我们指出: 若 $(a_1,\ldots,a_m)$ 是 S 中一个严格临界点, 且 T 是 S 的一个半代数子集, 则 $(a_1,\ldots,a_m)$ 也是 T 中一个严格临界点, 只要 $(a_1,\ldots,a_m)\in T$.

根据文献 [11] 中定义 2.7.1, R^m 中一个子集 S 称作一个基本的开半代数子集, 若 S 可表示如下:

$$S:=\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in R^m \mid p_j(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)>0,\ j=1,\ldots,r\},$$

其中 $p_j(y_1,\ldots,y_m)\in F[y_1,\ldots,y_m]$, $j=1,\ldots,r$.

在下面, 我们将借助于吴方法, 给出一个捕获 R^m 中半代数子集 $\mathrm{Zero}_R(P)\cap S$ 中严格临界点的有效方法, 其中 P 是 $F[\overline{Y}]$ 的一个有限子集, 且 S 是 R^m 中一个基本的开半代数子集. 为此目的, 我们需要建立几个相关的引理.

引理 1 设 P 和 Q 是 $F[\overline{Y}]$ 的两个有限子集, $C_1,\ldots,C_r$ 是按吴方法由 P 所获得的一组升列, 且 S 是 R^m 中一个半代数子集. 若 $(a_1,\ldots,a_m)$ 是 $\mathrm{Zero}_R(P/Q)\cap S$ 中一个严格临界点, 则对于某个 $C\in\{C_1,\ldots,C_r\}$, $(a_1,\ldots,a_m)$ 是 $\mathrm{Zero}_R(C/Q\cup I_C)\cap S$ 中一个严格临界点, 这里 I_C 是 C 的初式集.

证明 由零点分解定理可知, 如下等式成立:

$$\mathrm{Zero}_R(P/Q)=\bigcup_{1\leqslant j\leqslant r}\mathrm{Zero}_R(C_j/Q\cup I_j).$$

这里 I_j 是 C_j 的初式集, $j=1,\ldots,r$. 从而有

$$\mathrm{Zero}_R(P/Q)\cap S=\bigcup_{1\leqslant j\leqslant r}\mathrm{Zero}_R(C_j/Q\cup I_j)\cap S.$$

根据前面指出的事实, 引理 1 中的结论显然成立. 证毕. □

记号 1 设 $f\in F[y_1,\ldots,y_m]$, 且 U 是 $\{y_1,\ldots,y_m\}$ 的一个非空子集.

- $\mathrm{diff}(f,y_i)$ 表示 f 关于变量 y_i 的偏导数, $i=1,\ldots,m$.
- $\mathrm{Diff}(f,U)$ 表示集合 $\{\mathrm{diff}(f,y)\mid y\in U, 且 \mathrm{diff}(f,y)\neq 0\}$.

根据文献 [7] 中定义 3.20, 一个由 $F[\overline{Y}]$ 中非常量多项式组成的升链 $\langle g_1,\ldots,g_s\rangle$ 称作完全的 (或不完全的), 若 $s=m$ (或 $s<m$).

设 $C=\langle g_1,\ldots,g_s\rangle$ 是 $F[\overline{Y}]$ 中一个 (关于通常字典序的) 不完全升链, 使得每个变量 y_i 在 $\langle g_1,\ldots,g_s\rangle$ 中真正出现, $i=1,\ldots,m$, 则 $\{y_1,\ldots,y_m\}\backslash\{\mathrm{lv}(g_1),\ldots,\mathrm{lv}(g_s)\}\neq\emptyset$. 从而, 在集 $\{y_1,\ldots,y_m\}\backslash\{\mathrm{lv}(g_1),\ldots,\mathrm{lv}(g_s)\}$ 中有一个最低的变量 y_λ, $1\leqslant\lambda<m$. 此时必有

$$\mathrm{lv}(g_i)=y_i,\quad i=1,\ldots,\lambda-1, 且\, y_\lambda\prec\mathrm{lv}(f_\lambda)\prec\cdots\prec\mathrm{lv}(g_s).$$

据此, 对于 $i=\lambda, \dots, s$, 按如下方式规定变量子集 U_i:

- 若 $\deg(g_i, \mathrm{lv}(g_i))=1$, 则 $U_i:=\emptyset$;
- 若 $\deg(g_\lambda, \mathrm{lv}(g_\lambda))>1$, 则 $U_\lambda:=\{y\in\{y_1,\dots,y_m\} \mid y_\lambda \prec y \preceq \mathrm{lv}(g_\lambda)\}$;
- 若 $\deg(g_i, \mathrm{lv}(g_i))>1$ 且 $\lambda<i\leqslant s$, 则 $U_i:=\{y\in\{y_1,\dots,y_m\} \mid \mathrm{lv}(g_{i-1}) \prec y \preceq \mathrm{lv}(g_i)\}$.

定义 5 设记号同上. 不完全升链 $\langle g_1,\dots,g_s\rangle$ 称作是可简化的, 若满足下面条件:

(1) 对于每个 $i\in\{1,\dots,m\}$, 变量 y_i 在 $\langle g_1,\dots,g_s\rangle$ 中真正出现.

(2) $\bigcup_{i=\lambda}^{s} U_i\neq\emptyset$.

否则, 升链 $\langle g_1,\dots,g_s\rangle$ 称作是不可简化的.

引理 2 设 $C=\{g_1,\dots,g_s\}$ 是 $F[\overline{Y}]$ 中一个可简化的不完全升列, 且相应的记号同上. 若 $U_k\neq\emptyset$, 其中 $\lambda\leqslant k\leqslant s$, 且 $C_1, \dots, C_r$ 是按照吴方法由 $C\cup \mathrm{Diff}(f_k, U_k)$ 所获得的一组升列, 则对于每个 $i\in\{1,\dots,r\}$, $C\succ C_i$.

证明 由 U_k 的规定知, $\deg(g_k, \mathrm{lv}(g_k))>1$, 且 $\mathrm{lv}(g_k)\in U_k$. 令 $g=\mathrm{diff}(g_k, \mathrm{lv}(g_k))$, 则 $g\in \mathrm{Diff}(g_k, U_k)$, 且 $\mathrm{lv}(g)=\mathrm{lv}(g_k)$. 根据零点分解定理的构造性证明 (参见 [7] 中定理 5.1 的证明所涉及的有关算法), 这些升列 $C_1, \dots, C_r$ 的形成开始于 $C\cup\mathrm{Diff}(g_k, U_k)$ 的某个基本集 B; 从而 $B\succeq C_i$, $i=1, \dots, r$.

注意到, $\mathrm{lv}(g)=\mathrm{lv}(g_k)$ 且 $\deg(g, \mathrm{lv}(g))<\deg(g_k, \mathrm{lv}(g_k))$. 从而, $\{g_1,\dots,g_{k-1},g\}$ 是包含在 $C\cup \mathrm{Diff}(g_k, U_k)$ 中的一个升列, 且 $C\succ\{g_1,\dots,g_{k-1},g\}$. 由于 B 是包含在 $C\cup\mathrm{Diff}(g_k,U_k)$ 中具有最低序的一个升列, 从而有 $C\succ\{g_1,\dots,g_{k-1},g\}\succeq B\succeq C_i$, $i=1, \dots, r$. 证毕. □

引理 3 设 $C=\{g_1,\dots,g_s\}$ 是 $F[\overline{Y}]$ 中一个可简化的不完全升列, I 为 C 的初式集, H 是 $F[\overline{Y}]$ 的一个包含 I 的有限子集, 且 S 是 R^m 中一个基本的开半代数子集. 若采用上面与 C 相关的记号, 且 $U_{k_1}, \dots, U_{k_t}$ 是变量子集序列 $U_\lambda, \dots, U_s$ 中全部非空集, 其中 $\lambda\leqslant k_1<\cdots<k_t\leqslant s$, 则对于 $\mathrm{Zero}_R(C/H)\cap S$ 中任意一个严格临界点 $\bar{\alpha}$, 存在一个 $\ell\in\{1,\dots,t\}$, 使得 $\bar{\alpha}$ 是 $\mathrm{Zero}_R(C\cup\mathrm{Diff}(f_{k_\ell}, U_{k_\ell})/H)\cap S$ 中一个严格临界点.

证明 根据有关基本的开半代数子集的定义, 记

$$S:=\{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in R^m \mid p_j(\alpha_1,\dots,\alpha_m)>0,\ j=1, \dots, r\},$$

其中 $p_j(y_1,\dots,y_m)\in F[y_1,\dots,y_m]$, $j=1, \dots, r$.

设 $\bar{\alpha}:=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ 是 $\mathrm{Zero}_R(C/H)\cap S$ 中任意一个严格临界点. 显然, $g_i(\bar{\alpha})=0$, $i=1, \dots, s$, $p_j(\bar{\alpha})>0$, $j=1, \dots, r$, 但 $h(\bar{\alpha})\neq 0$, $\forall h\in H$. 由定义 4 后面的事实可知, 只需证明下面的关系式:

$$\bar{\alpha}\in\bigcup_{1\leqslant i\leqslant t}\mathrm{Zero}_R(C\cup\mathrm{Diff}(f_{k_i}, U_{k_i})/H)\cap S.$$

假设上面的关系式不成立, 则 $\bar{\alpha}\notin\bigcup_{1\leqslant i\leqslant t}\mathrm{Zero}_R(\mathrm{Diff}(f_{k_i}, U_{k_i}))$. 此时, 我们有如下

断言 有变量 $y_{\tau_1}, \dots, y_{\tau_{s-\lambda+1}}$, 使得

(1) $y_\lambda\prec y_{\tau_1}\preceq \mathrm{lv}(g_\lambda)\prec y_{\tau_2}\preceq\mathrm{lv}(g_{\lambda+1})\prec\cdots\preceq\mathrm{lv}(g_{s-1})\prec y_{\tau_{s-\lambda+1}}\preceq\mathrm{lv}(g_s)$.

(2) $\mathrm{diff}(g_{\lambda-1+i}, y_{\tau_i})(\alpha)\neq 0$, $i=1, \dots, s-\lambda+1$.

事实上, 由条件知, $U_\lambda=\emptyset$, 或 $U_\lambda\in\{U_{k_1},\dots,U_{k_t}\}$. 若 $U_\lambda=\emptyset$, 则由上面规定知, $\deg(g_\lambda, \mathrm{lv}(g_\lambda))=1$, 即 $\mathrm{diff}(g_\lambda, \mathrm{lv}(g_\lambda))\in I$. 从而 $\mathrm{diff}(g_\lambda, \mathrm{lv}(g_\lambda))(\bar{\alpha})\neq 0$. 此时, 取 $y_{\tau_1}:=\mathrm{lv}(g_\lambda)$ 即可. 若 $U_\lambda\in\{U_{k_1},\dots, U_{k_t}\}$, 则由假设知, $\bar{\alpha}\notin\mathrm{Zero}_R(\mathrm{Diff}(f_\lambda, U_\lambda))$. 从而, U_λ 中至少有一个变量 y_{τ_1}, 使得 $\mathrm{diff}(g_\lambda, y_{\tau_1})(\alpha)\neq 0$. 此时, 显然 $y_\lambda\prec y_{\tau_1}\preceq\mathrm{lv}(g_\lambda)$. 如此进行下去, 我们可得到满足要求的变量 $y_{\tau_2}, \dots, y_{\tau_{s-\lambda+1}}$.

考虑矩阵 $A := (\mathrm{diff}(g_{\lambda-1+i}, y_{\tau_j})(\bar{\alpha}))_{(s-\lambda+1)\times(s-\lambda+1)}$. 此时可知, 矩阵 A 是一个主对角线元素取自于 $\{\mathrm{diff}(g_{\lambda-1+i}, y_{\tau_i})(\bar{\alpha}) \mid i = 1, \ldots, s-\lambda+1\}$ 的下三角矩阵. 因而, A 是一个可逆矩阵.

将变量 $y_1, \ldots, y_m$ 重新排列: $y_1, \ldots, y_{\lambda-1}, y_{\tau_1}, \ldots, y_{\tau_{m-\lambda+1}}$, 其中 $\tau_1, \ldots, \tau_{m-\lambda+1}$ 是 $\lambda, \ldots, m$ 的一个排列. 易见, $\lambda \in \{\tau_{s-\lambda+2}, \ldots, \tau_{m-\lambda+1}\}$. 不妨设 $\lambda = \tau_{m-\lambda+1}$.

由适合实闭域的隐函数定理 (见 [11] 中推论 2.9.8) 可知, 存在点 $(\alpha_{\tau_{s-\lambda+2}}, \ldots, \alpha_{\tau_{m-\lambda+1}})$ 在 R^{m-s} 中的一个开邻域 D, 点 $(\alpha_{\tau_1}, \ldots, \alpha_{\tau_{s-\lambda+1}})$ 在 $R^{s-\lambda+1}$ 中的一个开邻域 V 以及 D 到 V 中一个连续映射 ψ, 使得对于每个 $(\beta_{\tau_1}, \ldots, \beta_{\tau-\lambda+1}) \in V \times D$,

$$g_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-1}, \beta_\lambda, \ldots, \beta_m) = 0,\ i = \lambda, \ldots, s,\ \text{当且仅当}\ (\beta_{\tau_1}, \ldots, \beta_{\tau_{s-\lambda+1}}) = \psi(\beta_{\tau_{s-\lambda+2}}, \ldots, \beta_{\tau_{m-\lambda+1}}).$$

从而, $(\alpha_{\tau_1}, \ldots, \alpha_{\tau_{s-\lambda+1}}) = \psi(\alpha_{\tau_{s-\lambda+2}}, \ldots, \alpha_{\tau_{m-\lambda+1}})$.

由多项式函数的连续性可知, 存在 $(\alpha_{\tau_1}, \ldots, \alpha_{\tau_{s-\lambda+1}})$ 在 $R^{s-\lambda+1}$ 中的一个开邻域 Δ_1 以及 $(\alpha_{\tau_{s-\lambda+2}}, \ldots, \alpha_{\tau_{m-j+1}})$ 在 R^{m-s} 中的一个开邻域 Δ_2, 使得 $p_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-1}, \beta_\lambda, \ldots, \beta_m) > 0$, $j = 1, \ldots, r$, 且对于每个 $h \in H$, $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-1}, \beta_\lambda, \ldots, \beta_m) \neq 0$, 只要 $(\beta_{\tau_1}, \ldots, \beta_{\tau_{m-\lambda+1}}) \in \Delta_1 \times \Delta_2$.

注意到, $(\alpha_{\tau_1}, \ldots, \alpha_{\tau_{s-\lambda+1}}) = \psi(\alpha_{\tau_{s-\lambda+2}}, \ldots, \alpha_{\tau_{m-\lambda+1}}) \in \Delta_1 \cap V$. 由 ψ 的连续性知, 有 $(\alpha_{\tau_{s-\lambda+2}}, \ldots, \alpha_{\tau_{m-\lambda+1}})$ 在 R^{m-s} 中的一个开邻域 W, 使得 $W \subseteq D$ 且 $\psi(W) \subseteq \Delta_1 \cap V$.

由于 $W \cap \Delta_2$ 也是 $(\alpha_{\tau_{s-\lambda+2}}, \ldots, \alpha_{\tau_{m-\lambda+1}})$ 的一个开邻域, 从而有 R 中一个正元素 δ, 使得

$$\{(\alpha_{\tau_{s-\lambda+2}}, \ldots, \alpha_{\tau_{m-\lambda}})\} \times]\alpha_{\tau_{m-\lambda+1}} - \delta, \alpha_{\tau_{m-\lambda+1}} + \delta[\subseteq D \cap W \cap \Delta_2.$$

对于任意 $\beta \in]\alpha_{\tau_{m-\lambda+1}} - \delta, \alpha_{\tau_{m-\lambda+1}} + \delta[$, 我们有 $(\alpha_{\tau_{s-\lambda+2}}, \ldots, \alpha_{\tau_{m-\lambda}}, \beta) \in D \cap W \cap \Delta_2$. 从而 $\psi(\alpha_{\tau_{s-\lambda+2}}, \ldots, \alpha_{\tau_{m-\lambda}}, \beta) \in \Delta_1 \cap V$.

令 $(\beta_{\tau_1}, \ldots, \beta_{\tau_{s-\lambda+1}}) := \psi(\alpha_{\tau_{s-\lambda+2}}, \ldots, \alpha_{\tau_{m-\lambda}}, \beta)$, 且记 $(\beta_{\tau_{s-j+2}}, \ldots, \beta_{\tau_{m-j}}, \beta_{\tau_{m-j+1}}) := (\alpha_{\tau_{s-\lambda+2}}, \ldots, \alpha_{\tau_{m-\lambda}}, \beta)$. 此时易见, $g_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-1}, \beta_\lambda, \ldots, \beta_m) = 0, i = \lambda, \ldots, s$. 此外, 由于 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-1}, \beta_\lambda, \ldots, \beta_m) \in \Delta_1 \times \Delta_2$, 从而 $p_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-1}, \beta_\lambda, \ldots, \beta_m) > 0$, $j = 1, \ldots, r$, 且对于所有 $h \in H$, $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-1}, \beta_\lambda, \ldots, \beta_m) \neq 0$. 注意到, 对于 $i = 1, \ldots, \lambda-1$, $g_i \in F[y_1, \ldots, y_i]$. 从而有

$$g_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-1}, \beta_\lambda, \ldots, \beta_m) = g_i(a_1, \ldots, a_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, \lambda-1.$$

由此有, $\beta = \beta_\lambda \in (\mathrm{Zero}_R(C/H) \cap S)_{(a_1, \ldots, a_{\lambda-1})}$. 由 β 的任意性, 我们有

$$]\alpha_\lambda - \delta, \alpha_\lambda + \delta[=]\alpha_{\tau_{m-\lambda+1}} - \delta, \alpha_{\tau_{m-\lambda+1}} + \delta[\subseteq (\mathrm{Zero}_R(C/H) \cap S)_{(a_1, \ldots, a_{\lambda-1})}.$$

然而, 由于 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ 是 $\mathrm{Zero}_R(C/H) \cap S$ 中一个严格临界点, 从而 α_λ 是 $(\mathrm{Zero}_R(C/H) \cap S)_{(a_1, \ldots, a_{\lambda-1})}$ 的一个闭端点, 矛盾! 因而, $\bar{\alpha} \in \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant t} \mathrm{Zero}_R(C \cup \mathrm{Diff}(f_{k_i}, U_{k_i})/H) \cap S$. 证毕. □

为后面的叙述方便起见, 我们给出下面的

定义 6 仍设 C 是如引理 3 中所说的一个可简化的不完全升列, 且相关的记号亦同引理 3. 下面的运算将称作 C 的一个简化过程:

- 对于每个 $i \in \{1, \ldots, t\}$, 按照吴方法由 $C \cup \mathrm{Diff}(f_{k_i}, U_{k_i})$ 获取一组升列 $\mathcal{C}_i = \{C_{i1}, \ldots, C_{ir_i}\}$.
- 删除 $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant t} \mathcal{C}_i$ 中全部不可简化的不完全升列, 并保留剩余部分 $\mathcal{C}'$.

由可简化的不完全升列和完全升列构成的剩余部分 $\mathcal{C}'$ 将被称作 C 的一个简化结果. 此外, 对于每个 $C' \in \mathcal{C}'$, 将用记号 $C \to C'$ 表示 C 和 C' 之间的简化关系.

由引理 2 知, $C \succ C'$, 只要 $C \to C'$.

引理 4 设 C 是 $F[\overline{Y}]$ 中一个可简化的不完全升列, $\mathcal{C}'$ 为 C 的一个简化结果, H 是 $F[\overline{Y}]$ 中一个包含 C 的初式集的有限子集, 且 S 是 R^m 中一个基本的开半代数子集, 则对于 $\mathrm{Zero}_R(C/H)\cap S$ 中任意一个严格临界点 $\bar{\alpha}$, 存在一个 $C'\in\mathcal{C}'$, 使得 $\bar{\alpha}$ 是 $\mathrm{Zero}_R(C'/H\cup I_{C'})\cap S$ 中一个严格临界点, 其中 $I_{C'}$ 是 C' 的初式集.

证明 用 $\mathcal{C}$ 表示集合 $\bigcup_{1\leqslant i\leqslant t}\mathcal{C}_i$, 其中 $\mathcal{C}_i\,(i=1,\ldots,t)$ 是按照定义 6 所得的升列集合. 于是, $\mathcal{C}'$ 是由 $\mathcal{C}$ 中全部可简化的不完全升列和完全升列构成的子集.

设 $\bar{\alpha}:=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ 是 $\mathrm{Zero}_R(C/H)\cap S$ 中任意一个严格临界点. 由引理 1 和 3 易知, 存在一个 $C'\in\mathcal{C}$, 使得 $\bar{\alpha}$ 是 $\mathrm{Zero}_R(C'/H\cup I_{C'})\cap S$ 中一个严格临界点, 其中 $I_{C'}$ 是 C' 的初式集. 只需证明 $C'\in\mathcal{C}'$.

假设 $C'\notin\mathcal{C}'$, 则 C' 是一个不可简化的不完全升列. 为节省符号, 仍记 $C':=\{g_1,\ldots,g_s\}$, 且采用定义 5 之前的符号 $U_\lambda,\ldots,U_s$. 根据定义 5, 有下面两种可能情形:

情形 1 对于某个 $d\in\{1,\ldots,m\}$, 变量 y_d 不真正出现在 $\langle g_1,\ldots,g_s\rangle$. 此时易见, $(\mathrm{Zero}_R(C'/H\cup I_{C'})\cap S)_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-1})}$ 是 R 的一个开区间; 这与前面结论矛盾: $\bar{\alpha}$ 是 $\mathrm{Zero}_R(C'/H\cup I_{C'})\cap S$ 中一个严格临界点.

情形 2 $\bigcup_{i=\lambda}^{s}U_i=\emptyset$. 此时, 由变量子集 U_i 的规定知,

$$\deg(g_i,\mathrm{lv}(g_i))=1,\ \text{即}\ \mathrm{diff}(g_i,\mathrm{lv}(g_i))\in I_{C'},\ \text{其中}\ i=\lambda,\ldots,s.$$

从而 $\mathrm{diff}(g_i,\mathrm{lv}(g_i))(\bar{\alpha})\neq 0$, $i=\lambda,\ldots,s$. 此时, 矩阵 $(\mathrm{diff}(g_{\lambda+i-1},\mathrm{lv}(g_{\lambda+j-1}))(\bar{\alpha}))_{(s-\lambda+1)\times(s-\lambda+1)}$ 是一个主对角线元素取自于 $\{\mathrm{diff}(g_i,\mathrm{lv}(g_i))(\bar{\alpha})\mid i=\lambda,\ldots,s\}$ 的下三角矩阵. 因而, 该矩阵是一个可逆矩阵.

类似于引理 3 的证明, 通过适合实闭域的隐函数定理可推出, $\bar{\alpha}$ 不是 $\mathrm{Zero}_R(C'/H\cup I_{C'})\cap S$ 中一个严格临界点, 矛盾!

综合上面两种情形可知, $C'\in\mathcal{C}'$. 证毕. □

现在, 我们可以给出下面的算法.

算法 3.1 (捕获严格临界点)

结构: 一个实闭包为 R 的可计算序域 $(F,\leqslant)$.

输入: m 元多项式环 $F[y_1,\ldots,y_m]$ 的一个有限子集 P.

输出: 由环 $F[y_1,\ldots,y_m]$ 中完全升列组成的一个集合 $\mathcal{C}$, 使得

- 对于 R^m 中任意基本的开半代数子集 S, $\mathrm{Zero}_R(P)\cap S$ 中每个严格临界点都属于 $\bigcup_{C\in\mathcal{C}}\mathrm{Zero}_R(C/I_C)$, 其中 I_C 为 $\mathcal{C}$ 中升列 C 的初式集.

计算过程: 对于 $k=1,2,\ldots$, 按如下方式递归地计算集合 $\mathcal{C}_k$ 和 $\mathcal{D}_k$:

(1) (**第一步**) 按照吴方法由 P 可获得一组升列, 删除其中的不可简化的不完全升列, 并将所剩的升列分为两部分: $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$, 其中 $\mathcal{C}_1$ 为完全升列组成的集合, 而 $\mathcal{D}_1$ 为可简化的不完全升列组成的集合.

(2) 假定在第 k 步后已经获得两组升列 $\mathcal{C}_k$ 和 $\mathcal{D}_k$. 若 $\mathcal{D}_k=\emptyset$, 则计算终止, 且输出

$$(\mathcal{C}=\mathcal{C}_k).$$

否则, 对于每个可简化的不完全升列 $D\in\mathcal{D}_k$, 计算 D 的一个简化结果 $\mathcal{C}_D$. 将 $\bigcup_{D\in\mathcal{D}_k}\mathcal{C}_D$ 中的所有完全升列添加于 $\mathcal{C}_k$, 由此获得集合 $\mathcal{C}_{k+1}$; 而 $\bigcup_{D\in\mathcal{D}_k}\mathcal{C}_D$ 中所有可简化的不完全升列组成集合 $\mathcal{D}_{k+1}$.

证明 为证明算法的正确性, 只需证明如下两点叙述:

(1) 上面的计算过程不是无休止的.

(2) 若上面的计算在第 s 步后终止, 则对于 R^m 中任意基本的开半代数子集 S, $\mathrm{Zero}_R(P)\cap S$ 中每个严格临界点都属于 $\bigcup_{C\in\mathcal{C}_s}\mathrm{Zero}_R(C/I_C)$, 其中 I_C 为 $\mathcal{C}_s$ 中升列 C 的初式集.

首先, 假设上面的计算过程是无休止的. 此时, 我们将获得由升列所组成的如下序列:

$$D_1\to D_2\to\cdots\to D_k\to\cdots,$$

其中 $D_k\in\mathcal{D}_k$, $k=1,2,\ldots$

由引理 2, 我们将获得这样的无限序列: $D_1\succ C_2\succ\cdots\succ D_k\succ\cdots$; 这是不可能的, 因为 $\succ$ 是良型的. 因此, 上面的计算过程将在有限步后终止, 即叙述 (1) 成立.

为证明叙述 (2), 设 $\bar{\alpha}$ 是 $\mathrm{Zero}_R(P)\cap S$ 中任意一个严格临界点. 下面对 k 施用归纳法, 证明如下

断言　对于 $k=1,2,\ldots$, 存在一个 $C\in\mathcal{C}_k\cup\mathcal{D}_k$ 以及 $F[\overline{Y}]$ 的一个有限子集 H_k, 使得 H_k 包含 C 的初式集, 且 $\bar{\alpha}$ 是 $\mathrm{Zero}_R(C/H_k)\cap S$ 中一个严格临界点, 这里约定: $\mathcal{C}_k=\mathcal{C}_s$ 且 $\mathcal{D}_k=\emptyset$, 只要 $k>s$.

记 C_1, $\ldots$, C_r 是在第一步中由有限子集 P 所获得的一组升列. 由引理 1 知, 对于某个 $C\in\{C_1,\ldots,C_r\}$, $\bar{\alpha}$ 是 $\mathrm{Zero}_R(C/H_1)\cap S$ 中一个严格临界点, 这里 H_1 是 C 的初式集.

假设 $C\notin\mathcal{C}_1\cup\mathcal{D}_1$. 由第一步中所执行的运算知, C 是一个不可简化的不完全升列. 此时, 仿照引理 4 的后半部分证明可推出, $\bar{\alpha}$ 将不是 $\mathrm{Zero}_R(C/H_1)\cap S$ 中一个严格临界点, 矛盾! 因而, $C\in\mathcal{C}_1\cup\mathcal{D}_1$. 这表明, 上面断言在 $k=1$ 时成立.

假定上面断言在 $k=d$ 时成立, 则 $\bar{\alpha}$ 是 $\mathrm{Zero}_R(C/H_d)\cap S$ 中一个严格临界点, 其中 $C\in\mathcal{C}_d\cup\mathcal{D}_d$, 且 H_d 是 $F[\overline{Y}]$ 的一个包含 C 的初式集的有限子集.

若 $C\in\mathcal{C}_d$, 则 $C\in\mathcal{C}_d\subseteq\mathcal{C}_{d+1}\subseteq\mathcal{C}_{d+1}\cup\mathcal{D}_{d+1}$. 此时, 上面断言在 $k=d+1$ 时成立.

若 $C\in\mathcal{D}_d$, 则 C 是一个可简化的不完全升列. 记 $\mathcal{C}'$ 是 C 的一个简化结果. 由引理 4 知, 存在一个 $C'\in\mathcal{C}'$, 使得 $\bar{\alpha}$ 是 $\mathrm{Zero}_R(C'/H_d\cup I_{C'})\cap S$ 中一个严格临界点, 其中 $I_{C'}$ 是 C' 的初式集. 令 $H_{d+1}:=H_d\cup I_{C'}$, 则 $\bar{\alpha}$ 是 $\mathrm{Zero}_R(C'/H_{d+1})\cap S$ 中一个严格临界点. 由上面的简化过程知, $C'\in\mathcal{C}'\subseteq\mathcal{C}_{d+1}\cup\mathcal{D}_{d+1}$. 此时, 上面断言在 $k=d+1$ 时也成立.

由归纳法原理, 上面断言获证.

现设上面的计算在第 s 步后终止, 则 $\mathcal{D}_s=\emptyset$, 即 $\mathcal{C}_s\cup\mathcal{D}_s=\mathcal{C}_s$. 根据上面断言, 存在一个 $C_1\in\mathcal{C}_s$ 以及 $F[\overline{Y}]$ 的一个包含 C_1 的初式集的有限子集 H_s, 使得 $\bar{\alpha}$ 是 $\mathrm{Zero}_R(C_1/H_s)\cap S$ 中一个严格临界点. 注意到, H_s 包含 C 的初式集 I_{C_1}. 从而

$$\bar{\alpha}\in\mathrm{Zero}_R(C_1/H_s)\cap S\subseteq\mathrm{Zero}_R(C_1/I_{C_1})\subseteq\bigcup_{C\in\mathcal{C}_s}\mathrm{Zero}_R(C/I_C),$$

其中 I_C 为 $\mathcal{C}_s$ 中升列 C 的初式集. 这表明, 叙述 (2) 也成立. 证毕. □

4　计算全局下确界和全局最小值

在本节中, 我们将藉助于算法 2.1, 给出一个计算多项式函数的全局下确界和全局最小值的有效方法. 为此目的, 我们将在第 2 节中所引进的序域 $(\mathbb{R}(\eta),\leqslant)$ 及其实闭包 $\mathcal{R}$ 上讨论所涉及的实多项式函数. 此外, 本节中算法还将涉及到计算完全升链的有理单元表示族. 对于完全升链的有理单元表示族这一概念, 参见文献 [12] 中定义 1.

根据文献 [12] 中定义 1, 我们进一步给出下面的定义.

定义 7 设 F 是 $\mathbb{R}$ 的一个可计算子域, C 是多项式环 $F(\eta)[y_1,\dots,y_m]$ 中一个完全升链, I 为 C 的初式集, 且 t 是一个新变元.

当 $\mathrm{Zero}_{\mathcal{R}}(C/I)\neq\emptyset$ 时, $F(\eta)[t]\times F(\eta)(t)^m$ 的一个有限子集 $\{[u_i(t),\phi_{i1}(t),\dots,\phi_{im}(t)]\mid i=1,\dots,s\}$ 称为 C 在 $\mathcal{R}$ 中的一族有理单元表示 (或 C 在 $\mathcal{R}$ 中的一个 RUR 族), 若满足下列条件:

(1) 对于每个 $i\in\{1,\dots,s\}$, $u_i(t)$ 在 $\mathcal{R}$ 中至少有一个根, 且 $u_i(t)$ 和 $\phi_{ij}(t)$ 是互素的, $j=1,\dots,m$. 换言之, $(u_i(t),\phi_{i1}(t),\dots,\phi_{im}(t))$ 是 $F(\eta)[t]\times F(\eta)(t)^m$ 中一个 RUR, $i=1,\dots,s$.

(2) 对于 $F(\eta)$ 的任意扩张 K, 若 α 是 $u_i(t)$ 在 K 中一个根, 其中 $i\in\{1,\dots,s\}$, 则 $(\phi_{i1}(\alpha),\dots,\phi_{im}(\alpha))\in\mathrm{Zero}_K(C/I)$.

(3) 对于 $F(\eta)$ 的任意扩张 K, 若 $(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathrm{Zero}_K(C/I)$, 则存在一个 $k\in\{1,\dots,s\}$ 以及 $u_k(t)$ 在 $F(\eta)(\beta_1,\dots,\beta_n)$ 中的一个根 α, 使得 $(\beta_1,\dots,\beta_m)=(\phi_{k1}(\alpha),\dots,\phi_{km}(\alpha))$.

当 $\mathrm{Zero}_{\mathcal{R}}(C/I)=\emptyset$ 时, 规定空集 $\{\ \}$ 为 C 在 $\mathcal{R}$ 中的惟一 RUR 族.

基于吴方法，文献 [12] 提出了一个计算完全升链的有理单元表示族的算法, 见文献 [12] 中算法 3.4. 基于 [12] 中算法 3.4, 对于 $F(\eta)[y_1,\dots,y_m]$ 中一个完全升链 C, C 在 $\mathcal{R}$ 中的一个 RUR 族可通过下面方式获得:

- 由 [12] 中算法 3.4, 计算 C 的一个 RUR 族 Ξ.
- 根据 Sturm 定理, 从 Ξ 中删除所有这样的 RUR $(u(t),\phi_1(t),\dots,\phi_m(t))$, 其中 $u(t)$ 在 $\mathcal{R}$ 中无根.

在仿射空间 $\mathcal{R}^n$ 中, 记 $[-\eta,\eta]^n$ 为中心为原点且边长为 2η 的闭立方体, 且记 $]-\eta,\eta[^n$ 为 $[-\eta,\eta]^n$ 的内部, 则

$$[-\eta,\eta]^n=\{(a_1,\dots,a_n)\in\mathcal{R}^n\mid -\eta\leqslant a_i\leqslant\eta,\ i=1,\dots,n\},$$
$$\text{且 }]-\eta,\eta[^n=\{(a_1,\dots,a_n)\in\mathcal{R}^n\mid -\eta< a_i<\eta,\ i=1,\dots,n\}.$$

显然, $[-\eta,\eta]^n$ 是 $\mathcal{R}^n$ 的一个有界的闭半代数子集, 且 $[-\eta,\eta]^n$ 包含整个 $\mathbb{R}^n$. 引进这个半代数子集的重要性在下面的命题中得到体现.

命题 4.1 设 $f:=f(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ 是一个 n 元实多项式, 则 f 在 $[-\eta,\eta]^n$ 上有最小值.

证明 记 ϕ 为 $[-\eta,\eta]^n$ 到 $\mathcal{R}$ 的如此映射, 使得 $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\mapsto f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, 只要 $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in[-\eta,\eta]^n$. 显然, 对于 $\mathcal{R}$ 的区间拓扑, 映射 ϕ 是连续的. 由文献 [11] 中定理 2.58 知, $\phi([-\eta,\eta]^n)$ 是 $\mathcal{R}$ 的一个有界的闭半代数子集. 根据文献 [11] 中命题 2.1.7 可知, $\phi([-\eta,\eta]^n)$ 是由 $\mathcal{R}$ 中有限个不相交的闭区间组成的, 只要将 $\phi([-\eta,\eta]^n)$ 中孤立点看作具有相同端点的闭区间. 显然，这些闭区间端点中最小者正是 f 在 $[-\eta,\eta]^n$ 上的最小值. 证毕. □

命题 4.2 设 $f:=f(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ 是一个 n 元实多项式, 且 μ 是 f 在 $[-\eta,\eta]^n$ 上的最小值, 则下面的叙述成立:

(1) $\pi(\mu)$ 是 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的下确界, 即 $\inf f(\mathbb{R}^n)=\pi(\mu)$, 这里 π 是第 2 节中所定义的映射.

(2) f 在 $\mathbb{R}^n$ 上有最小值, 当且仅当 $\mu\in\mathbb{R}$. 此时, μ 是 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的最小值.

证明 设 $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ 是 f 在闭立方体 $[-\eta,\eta]^n$ 上的一个最小值点, 则 $-\eta\leqslant\alpha_i\leqslant\eta$, 其中 $i=1,\dots,n$, 且 $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\mu$.

(1) 显然, $\inf f(\mathbb{R}^n)\in\mathbb{R}$, 或 $\inf f(\mathbb{R}^n)=-\infty$. 下面分两种可能情形讨论:

情形 1 $\inf f(\mathbb{R}^n)\in\mathbb{R}$. 此时, 令 $a:=\inf f(\mathbb{R}^n)$. 由下确界的定义知, 下面语句在 $\mathbb{R}$ 中成立:

$$\forall(x_1,\dots,x_n)(f(x_1,\dots,x_n)\geqslant a).$$

注意到 $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{R}$. 由适合实闭域的转移原理 (见 [11] 中命题 5.2.3 或 [13] 中定理 2.78), 上面语句在 $\mathcal{R}$ 中也成立. 由上面语句有, $\mu = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geqslant a$, 即 $\mu - a \geqslant 0$.

设 d 是任意一个正数. 由下确界的定义知, 有某个 $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, 使得 $f(a_1, \ldots, a_n) < a + d$. 注意到 $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \subseteq [-\eta, \eta]^n$. 由于 μ 是 f 在 $[-\eta, \eta]^n$ 上的最小值, 从而 $\mu \leqslant f(a_1, \ldots, a_n)$. 由此有 $\mu < a + d$, 即 $\mu - a < d$. 于是, $0 \leqslant \mu - a < d$. 由 d 的任意性知，$\mu - a \in M$. 由命题 2.1 中条件 (1) 知，$\pi(\mu - a) = 0$, 即 $\pi(\mu) - a = 0$. 因而 $\pi(\mu) = a$.

情形 2 $\inf f(\mathbb{R}^n) = -\infty$. 此时, 由下确界的定义知, 下面语句在 $\mathbb{R}$ 中成立:

$$\forall y (\exists (x_1, \ldots, x_n)(f(x_1, \ldots, x_n) < y)).$$

注意到 $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{R}$. 由适合实闭域的转移原理, 上面语句在 $\mathcal{R}$ 中也成立. 因而, 有 $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathcal{R}$, 使得 $f(\beta_1, \ldots, \beta_n) < -\eta$.

令 $\theta := \max\{\beta_1, -\beta_1, \ldots, \beta_n, -\beta_n\}$, 则 $\theta \geqslant 0$, 且 $-\theta \leqslant \beta_i \leqslant \theta$, $i = 1, \ldots, n$. 假若 $\theta \in A$, 则由子环 A 在 $\mathcal{R}$ 中的凸性知, $\beta_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$. 于是 $\pi(\beta_i) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. 由命题 2.1 中条件 (2) 和 (3) 有

$$f(\pi(\beta_1), \ldots, \pi(\beta_n)) = \pi(f(\beta_1, \ldots, \beta_n)) \leqslant \pi(-\eta) = -\infty.$$

注意到 $f(\pi(\beta_1), \ldots, \pi(\beta_n)) \in \mathbb{R}$. 因而, 上面的关系式不可能成立. 从而 $\theta \notin A$. 换言之, θ 是一个在 $\mathbb{R}$ 上无限大的正元素. 显然, θ 是 $\mathbb{R}$ 上的超越元. 于是, 存在域 $\mathbb{R}(\theta)$ 到 $\mathbb{R}(\eta)$ 的一个 $\mathbb{R}$- 同构 σ, 使得 $\sigma(\theta) = \eta$. 由于 θ 和 η 都是在 $\mathbb{R}$ 上无限大的正元素, 从而易见, σ 实际上是 $\mathcal{R}$ 的序子域 $\mathbb{R}(\theta)$ 到序子域 $\mathbb{R}(\eta)$ 的一个保序的同构映射. 注意到, $\mathcal{R}$ 既是序子域 $\mathbb{R}(\theta)$ 的实闭包, 又是序子域 $\mathbb{R}(\eta)$ 的实闭包. 因而, σ 可拓展为 $\mathcal{R}$ 的一个 (保序的) 自同构映射, 仍记为 σ. 此时有 $-\sigma(\theta) \leqslant \sigma(\beta_i) \leqslant \sigma(\theta)$, $i = 1, \ldots, n$, 即 $(\sigma(\beta_1), \ldots, \sigma(\beta_n)) \in [-\eta, \eta]^n$. 同时有

$$f(\sigma(\beta_1), \ldots, \sigma(\beta_n)) = \sigma(f(\beta_1, \ldots, \beta_n)) < \sigma(-\eta).$$

注意到 $-\eta$ 是一个在 $\mathbb{R}$ 上无界的负元素, 且 σ 为 $\mathcal{R}$ 的一个 (保序的) 自同构映射. 从而 $\sigma(-\eta)$ 也是一个在 $\mathbb{R}$ 上无界的负元素. 由于 μ 是 f 在 $[-\eta, \eta]^n$ 上的最小值, 从而 $\mu \leqslant f(\sigma(\beta_1), \ldots, \sigma(\beta_n)) < \sigma(-\eta)$. 于是, μ 必是一个在 $\mathbb{R}$ 上无界的负元素, 即 $\pi(\mu) = -\infty$.

(2) 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上有最小值 b, 则有 $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, 使得 $f(a_1, \ldots, a_n) = b$. 由于 $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \subseteq [-\eta, \eta]^n$ 且 μ 是 f 在 $[-\eta, \eta]^n$ 上的最小值, 从而 $\mu \leqslant b$. 另一方面, 由于 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上有最小值 b, 从而下面语句在 $\mathbb{R}$ 中成立:

$$\forall (x_1, \ldots, x_n)(f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant b).$$

注意到 $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{R}$. 由适合实闭域的转移原理, 上面语句在 $\mathcal{R}$ 中也成立. 根据上面语句, $\mu = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geqslant b$. 因而, $\mu = b \in \mathbb{R}$.

反过来, 设 $\mu \in \mathbb{R}$. 注意到, $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mu$. 从而下面语句在 $\mathcal{R}$ 中成立:

$$\exists (x_1, \ldots, x_n)(f(x_1, \ldots, x_n) = \mu).$$

注意到上面语句中常量 μ 是一个实数. 由适合实闭域的转移原理, 上面语句在 $\mathbb{R}$ 中也成立. 这意味着, 存在 $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, 使得 $f(b_1, \ldots, b_n) = \mu$.

对于任意 $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$, $(z_1,\ldots,z_n) \in [-\eta,\eta]^n$. 由于 μ 是 f 在 $[-\eta,\eta]^n$ 上的最小值, 从而 $f(z_1,\ldots,z_n) \geqslant \mu$. 上面讨论表明, μ 是 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的最小值. 证毕. □

为叙述的方便, 在给出计算全局下确界和全局最小值的算法之前, 我们需要引进一些由已知多项式所衍生的新多项式. 在下文中, 对于 $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, 记 $\langle 1,\ldots,n\rangle^k$ 为如下集合:

$$\{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle \mid j_1,\ldots,j_k \in \{1,\ldots,n\},\ 且\ j_1 < \cdots < j_k\}.$$

于是, 集合 $\langle 1,\ldots,n\rangle^k$ 中元素恰为 $\{1,\ldots,n\}$ 中 k 个相异数从小到大的自然排列. 注意: $\langle 1,\ldots,n\rangle^0 = \{\langle\rangle\}$.

设 $f \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ 是一个非零多项式. 对于 $\langle j_1,\ldots,j_k\rangle \in \langle 1,\ldots,n\rangle^k$ 以及由 $(e_1,\ldots,e_k) \in \{1,-1\}^k$, 其中 $0 \leqslant k < n$, 规定 $f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}$ 是 $\mathbb{R}(\eta)[y_1,\ldots,y_{n-k}]$ 中一个多项式，它是由多项式 f 通过下面的代换而获得的:

- 在多项式 f 中分别用 $e_1\eta, \ldots, e_k\eta$ 替代变量 $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$;
- 按下标从小到大的顺序, 其他 $n-k$ 个变量依次被新变量 $y_1, \ldots, y_{n-k}$ 替代.

此外, 为证明后面的算法的正确性, 我们还需要下面的引理, 该引理取自于文献 [14] 中命题 1 的推论.

引理 5 设 F 是一个特征为零的域, $g \in F[y_1,\ldots,y_m]$, 且 J 是 $F[y,y_1,\ldots,y_m]$ 中由 $y-g$ 以及 $\partial g/\partial y_i$, $i=1,\ldots,m$, 生成的理想, 则 $J \cap F[y] \neq \{0\}$.

现在, 我们可建立下面的

算法 4.3 (捕获与下确界和最小值相关的疑似点)

结构: $\mathbb{R}$ 的一个可计算序子域 F.

输入: 一个非零多项式 $f \in F[x_1,\ldots,x_n]$.

输出: 一个集合族

$$\left\{\Xi^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle} \mid 0 \leqslant k < n,\ \langle j_1,\ldots,j_k\rangle \in \langle 1,\ldots,n\rangle^k\ 且 (e_1,\ldots,e_k) \in \{1,-1\}^k\right\},$$

使得满足下面条件:

- 对于任意 $k \in \{0,\ldots,n-1\}$, $\langle j_1,\ldots,j_k\rangle \in \langle 1,\ldots,n\rangle^k$ 和 $(e_1,\ldots,e_k) \in \{1,-1\}^k$, $\Xi^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}$ 是一个由 $F(\eta)[t] \times F(\eta)(t)^{n-k}$ 中有限个 RUR 组成的集合.
- $\inf f(\mathbb{R}^n)$ 恰好是并集 $\Pi_0 \cup \Pi$ 中最小元素, 这里 $\Pi_0 := \{\pi(f(e_1\eta,\ldots,e_n\eta)) \mid e_i = \pm 1, i = 1, \ldots, n\}$, 且 $\Pi := \{\pi(\min(f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle} : \xi)) \mid 0 \leqslant k < n, \langle j_1,\ldots,j_k\rangle \in \langle 1,\ldots,n\rangle^k, (e_1,\ldots,e_k) \in \{1,-1\}^k,\ 且 \xi \in \Xi^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}\}$.
- 下确界 $\inf f(\mathbb{R}^n)$ 可达到, 当且仅当 (1) $f(0,\ldots,0)$ 是 $\Pi_0 \cup \Pi$ 中最小元素; 或者 (2) 对于某个 $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ 以及某对 $\langle j_1,\ldots,j_k\rangle \in \langle 1,\ldots,n\rangle^k$ 和 $(e_1,\ldots,e_k) \in \{1,-1\}^k$, 存在一个 $\xi \in \Xi^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}$, 使得 $\pi(\min(f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle} : \xi))$ 是 $\Pi_0 \cup \Pi$ 中最小元素且 $\pi(\min(f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle} : \xi)) \in (f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle} : \xi)$.

计算过程: 对于每个 $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ 以及每对 $\langle j_1,\ldots,j_k\rangle \in \langle 1,\ldots,n\rangle^k$ 和 $(e_1,\ldots,e_k) \in \{1,-1\}^k$, 执行下面计算:

步骤 1 计算多项式 $f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}$ 的所有的一阶偏导数, 由此获得如下多项式集合:

$$P^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle} := \{\mathrm{diff}(f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}, y_i) \mid i = 1, \ldots, n-k\}.$$

步骤 2 对于 $P^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}$, 按算法 3.1 计算由完全升链组成的集合 $\mathcal{C}^{\langle e_1,\ldots,e_k\rangle}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}$, 使得

- 对于 $\mathcal{R}^{n-k}$ 中每个基本的半代数开子集 S, $\mathrm{Zero}_{\mathcal{R}}(P^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}) \cap S$ 中每个严格临界点都属于

$$\bigcup_{C\in\mathcal{C}^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}} \mathrm{Zero}_{\mathcal{R}}(C/I_C),$$

其中 I_C 为集合 $\mathcal{C}^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}$ 中升列 C 的初式集.

步骤 3 对于每个 $C\in\mathcal{C}^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}$, 由文献 [12] 中算法 3.4 和 Sturm 定理, 计算完全升链 C 在 $\mathcal{R}$ 中的一个 RUR 族 Ξ_C, 这里 $\Xi_C\subseteq F(\eta)[t]\times(F(\eta)(t))^{n-k}$.

步骤 4 合并所获得的全部 RUR 族 Ξ_C, 其中 C 取遍 $\mathcal{C}^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}$, 由此可得

$$\Xi^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}:=\bigcup\nolimits_{C\in\mathcal{C}^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}}\Xi_C.$$

证明 根据命题 4.1, f 在 $[-\eta,\eta]^n$ 上有最小值 μ. 记 μ^* 为 $\Omega_0\cup\Omega$ 中最小元素, 其中 $\Omega_0:=\{f(e_1\eta,\ldots,e_n\eta)\mid e_i=\pm1,\ i=1,\ldots,n\}$, 且 $\Omega:=\{\min(f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}:\xi)\mid 0\leqslant k<n,\ \langle j_1,\ldots,j_k\rangle\in\langle 1,\ldots,n\rangle^k,\ (e_1,\ldots,e_k)\in\{1,-1\}^k$, 且 $\xi\in\Xi^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}\}$. 根据命题 2.1, $\pi(\mu^*)$ 是 $\Pi_0\cup\Pi$ 中最小元素.

为证明算法 4.3 的正确性, 我们首先证明: $\mu^*\leqslant\mu$.

由于 f 在 $[-\eta,\eta]^n$ 上有最小值 μ, 从而 f 在 $[-\eta,\eta]^n$ 上有这样一个最小值点 $\bar\alpha:=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, 使得 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 中有最多的分量为 η 或 $-\eta$. 令 $\Lambda:=\{j\mid 1\leqslant j\leqslant n,\ \alpha_j=\eta$, 或 $\alpha_j=-\eta\}$, 且记 k 为 Λ 中元素个数, 则 $0\leqslant k\leqslant n$, 且 f 在 $[-\eta,\eta]^n$ 上的每个最小值点最多有 k 个分量取自于 $\{\eta,-\eta\}$.

若 $k=n$, 则 $\bar\alpha=(e_1\eta,\ldots,e_n\eta)$, 其中 $e_i=\pm1$, $i=1,\ldots,n$. 由 μ^* 和 μ_0 的规定, 我们有 $\mu^*\leqslant\mu_0\leqslant f(e_1\eta,\ldots,e_n\eta)=\mu$.

注意到, $f(e_1\eta,\ldots,e_n\eta)\in\Omega_0$. 从而 $\mu^*\leqslant f(e_1\eta,\ldots,e_n\eta)=\mu$, 因为 μ^* 为 $\Omega_0\cup\Omega$ 中最小元素.

现设 $0\leqslant k<n$, 且 $j_1<\cdots<j_k$ 是 Λ 中全部数字. 此时, $\langle j_1,\ldots,j_k\rangle\in\langle 1,\ldots,n\rangle^k$, 且 $\alpha_{j_i}=e_i\eta$, 其中 $e_i\in\{1,-1\}$, $i=1,\ldots,k$. 由多项式 $f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}$ 的规定易知, 多项式 $f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}$ 在 $]-\eta,\eta[^{n-k}$ 内有最小值 μ, 且 $(\alpha_{j_{k+1}},\ldots,\alpha_{j_n})$ 是它在 $]-\eta,\eta[^{n-k}$ 内的一个最小值点, 其中 $(j_{k+1},\ldots,j_n)=\{1,\ldots,n\}\setminus\{j_1,\ldots,j_k\}$, 且 $j_{k+1}<\cdots<j_n$. 由微积分中熟知事实 (以及适合实闭域的转移原理) 知, $(a_{j_{k+1}},\ldots,a_{j_n})$ 是多项式组 $P^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}$ 的一个零点, 其中 $P^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}=\{\mathrm{diff}(f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle},y_i)\mid i=1,\ldots,n-k\}$.

设 J 是 $F(\eta)[y,y_1,\ldots,y_{n-k}]$ 中由子集 $P^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}\cup\{y-f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}\}$ 生成的理想. 由引理 5 知, $J\cap F(\eta)[y]$ 中有一个非零多项式 $h(y)$. 于是有如下等式:

$$(\star)\qquad h(y)=w_1\mathrm{diff}(f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle},y_1)+\cdots+w_{n-k}\mathrm{diff}(f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle},y_{n-k})+w(y-f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}),$$

其中 $w,w_1,\ldots,w_{n-k}\in F(\eta)[y,y_1,\ldots,y_{n-k}]$.

将 $y=\mu$ 以及 $y_i=\alpha_{j_{k+i}}$ $(i=1,\ldots,n-k)$ 代入上面等式 $(\star)$, 我们有 $h(\mu)=0$. 从而有 $\mathcal{R}$ 中一个正元素 δ, 使得 μ 是 $h(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中开区间 $]\mu-\delta,\mu+\delta[_{\mathcal{R}}$ 内的惟一根, $h(\mu-\delta)\neq0$, 且 $h(\mu+\delta)\neq0$.

现构造 $\mathcal{R}^{n-k}$ 中如下基本的开半代数子集:

$$S_0:=\{(z_1,\ldots,z_{n-k})\in]-\eta,\eta[^{n-k}\mid\mu-\delta<f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}(z_1,\ldots,z_{n-k})<\mu+\delta\}.$$

显然, $(a_{j_{k+1}},\ldots,a_{j_n})\in\mathrm{Zero}_{\mathcal{R}}(P^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle})\cap S_0$. 因而, $\mathrm{Zero}_{\mathcal{R}}(P^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle})\cap S_0\neq\emptyset$. 现进一步证明下面的两个断言.

断言 1 对于每个 $(\beta_1,\ldots,\beta_{n-k})\in\mathrm{Zero}_{\mathcal{R}}(P^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle})\cap S_0$, $f^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-k})=\mu$.

事实上, 由于 $(\beta_1,\ldots,\beta_{n-k})\in\mathrm{Zero}_{\mathcal{R}}(P^{(e_1,\ldots,e_k)}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle})\cap S_0$, 从而下面的关系式组成立:

$$\begin{cases} \operatorname{diff}(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}, y_i)(\beta_1,\dots,\beta_{n-k}) = 0, \quad i=1,\dots,n-k, \\ \mu-\delta < f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}(\beta_1,\dots,\beta_{n-k}) < \mu+\delta, \\ -\eta < \beta_j < \eta, \quad j=1,\dots,n-k. \end{cases}$$

令 $\mu_1 := f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}(\beta_1,\dots,\beta_{n-k})$, 则 $\mu_1 \in \mathcal{R}$, 且 $\mu-\delta \leqslant \mu_1 \leqslant \mu+\delta$. 将 $y=\mu_1$ 以及 $y_i=\beta_i$ $(i=1,\dots,n-k)$ 代入上面等式 $(\star)$, 我们有 $h(\mu_1)=0$. 注意到, μ 是 $h(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中开区间 $]\mu-\delta,\mu+\delta[_{\mathcal{R}}$ 内的惟一根. 从而必有 $\mu_1=\mu$. 断言 1 获证.

断言 2 $\operatorname{Zero}_{\mathcal{R}}(P^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}) \cap S_0$ 中至少有一个严格临界点.

令 $S := \operatorname{Zero}_{\mathcal{R}}(P^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}) \cap S_0$, 则 S 是 $\mathcal{R}^{n-k}$ 中一个非空的半代数子集. 此时, $S_{()} \neq \emptyset$ 且 $S_{()} \subseteq]-\eta,\eta[_{\mathcal{R}}$. 因而, 半代数子集 $S_{()}$ 有一个有限端点 b_1. 现假定 b_1 是 $S_{()}$ 的一个开端点. 不失一般性, 可设 b_1 是 $S_{()}$ 的一个左侧有限开端点. 显然, $b_1 \notin S_{()}$, 并且有一个 $c \in R$, 使得 $b_1 < c$ 且$]b,c[_{\mathcal{R}} \subseteq S_{()}$. 从而, 下面语句在 $\mathcal{R}$ 中成立:

$$\forall y_1 \Big(b_1 < y_1 < c \Longrightarrow \exists (y_2,\dots,y_{n-k}) (\mu-\delta < f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle} < \mu+\delta \\ \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-k} \operatorname{diff}(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}, y_i) = 0 \wedge \bigwedge_{j=2}^{n-k} -\eta < y_j < \eta \Big).$$

设 η_1 是实闭域 $\mathcal{R}$ 上一个未定元. 与第 2 节中讨论一样, 实闭域 $\mathcal{R}$ 的序 $\leqslant$ 可惟一地拓展为有理函数域 $\mathcal{R}(\eta_1)$ 的一个序, 仍记作 $\leqslant$, 使得对于非零元 $\frac{g}{h} \in \mathcal{R}(\eta_1)$, 其中 $g, h \in \mathcal{R}[\eta_1] \setminus \{0\}$, $\frac{g}{h} < 0$, 当且仅当 $\mathcal{R}$ 上含 η_1 的单元多项式 gh 的首项系数为负. 显然, $\alpha - \eta_1 < 0$, 其中 $\alpha \in \mathcal{R}$. 由此知, 对于任意正元素 $\delta \in \mathcal{R}$, $0 < \eta_1^{-1} < \delta$.

记 $\mathcal{R}_1$ 为序域 $(\mathcal{R}(\eta_1), \leqslant)$ 的实闭包. 同样, 可构造 $\mathcal{R}_1$ 的如下两个子集:

$$A_1 := \{z \in \mathcal{R}_1 \mid \text{对于某个正元素 } d \in \mathcal{R},\ -d \leqslant z \leqslant d\},$$

$$M_1 := \{z \in \mathcal{R}_1 \mid \text{对于每个正元素 } d \in \mathcal{R},\ -d \leqslant z \leqslant d\}.$$

显然, $\mathcal{R} \subseteq A_1$, $\eta_1 \notin A_1$, 但 $\eta_1^{-1} \in M_1$.

由实赋值的熟知结果 (见 [9] 中 §5 的有关定理或 [15] 中命题 1.3) 知, A_1 是域 $\mathcal{R}_1$ 的一个实赋值环, 其极大理想为 M_1. 此外, A_1 和 M_1 在 $\mathcal{R}_1$ 中关于序 $\leqslant$ 都是凸的.

设 π_1 是与实赋值环 A_1 相对应的实位, 则 π_1 是 $\mathcal{R}_1$ 到 $\mathcal{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ 的一个映射, 使得下面条件都成立:

(1) 限制映射 $\pi_1 |_{A_1}$ 是环 A_1 到环 $\mathcal{R}$ 的一个同态, 使得 M_1 恰为 $\pi_1 |_{A_1}$ 的核, 且 $\pi_1(r) = r$, 若 $r \in \mathcal{R}$.

(2) 对于 $\alpha \in \mathcal{R}_1 \setminus A_1$, $\pi_1(\alpha) = \infty$ 若 $\alpha > 0$; 否则, $\pi_1(\alpha) = -\infty$.

(3) 对于 $\alpha, \beta \in \mathcal{R}_1$, 由 $\alpha \leqslant \beta$ 可推出 $\pi_1(\alpha) \leqslant \pi_1(\beta)$, 这里约定: 对于任意 $r \in \mathcal{R}$, $-\infty < r < \infty$.

注意到 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_1$. 由适合实闭域的转移原理, 上面语句在 $\mathcal{R}_1$ 中也成立. 令 $\alpha_1^* = b_1 + \eta_1^{-1}$, 则 $\alpha_1^* \in \mathcal{R}_1$, 且 $b_1 < \alpha_1^* < c$. 根据上面语句, 有 $\alpha_2^*, \dots, \alpha_{n-k}^* \in \mathcal{R}_1$, 使得

$$\begin{cases} \mu-\delta < f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}(\alpha_1^*,\dots,\alpha_{n-k}^*) < \mu+\delta, \\ \operatorname{diff}(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}, y_i)(\alpha_1^*,\dots,\alpha_{n-k}^*) = 0, \quad i=1,\dots,n-k, \\ -\eta < \alpha_j^* < \eta, \quad j=2,\dots,n-k. \end{cases}$$

由上式可知, $-\eta < b_1 < \alpha_1^* < c < \eta$, 且 $-\eta < \alpha_i^* < \eta$, $i = 1, \ldots, n-k$. 由 A_1 和 M_1 的构造知, $\eta_1^{-1} \in M_1$, 且 $\alpha_i^* \in A_1$, $i = 1, \ldots, n-k$. 从而 $\pi_1(\eta_1^{-1}) = 0$, 且 $\pi_1(\alpha_i^*) \in \mathcal{R}$, $i = 1, \ldots, n-k$. 由上面的条件 (3) 有

$$\begin{cases} \pi_1(\mu-\delta) \leqslant \pi_1(f_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}^{(e_1,\ldots,e_k)}(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_{n-k}^*)) \leqslant \pi_1(\mu+\delta), \\ \pi_1(\mathrm{diff}(f_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}^{(e_1,\ldots,e_k)}, y_i)(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_{n-k}^*)) = 0, i = 1, \ldots, n-k, \\ \pi_1(-\eta) \leqslant \pi_1(\alpha_j^*) \leqslant \pi_1(\eta), \ j = 2, \ldots, n-k. \end{cases}$$

由上面的条件 (1) 有 $\pi_1(\alpha_1^*) = b_1 + \pi_1(\eta_1^{-1}) = b_1$. 从而, 上面的关系式组为

$$\begin{cases} \mu-\delta \leqslant f_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}^{(e_1,\ldots,e_k)}(b_1, \pi_1(\alpha_2^*),\ldots,\pi_1(\alpha_{n-k}^*)) \leqslant \mu+\delta, \\ \mathrm{diff}(f_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}^{(e_1,\ldots,e_k)}, y_i)(b_1, \pi_1(\alpha_2^*),\ldots,\pi_1(\alpha_{n-k}^*)) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-k, \\ -\eta \leqslant \pi_1(\alpha_j^*) \leqslant \eta, \quad j = 2, \ldots, n-k. \end{cases}$$

令 $\mu_2 := f_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}^{(e_1,\ldots,e_k)}(b_1, \pi_1(\alpha_2^*),\ldots,\pi_1(\alpha_{n-k}^*))$, 则 $\mu_2 \in \mathcal{R}$, 且 $\mu-\delta \leqslant \mu_2 \leqslant \mu+\delta$. 将 $y = \mu_2$, $y_1 = b_1$ 以及 $y_i = \pi_1(\alpha_i^*)$ $(i = 2, \ldots, n-k)$ 代入上面等式 $(\star)$，我们有 $h(\mu_2) = 0$. 注意到, μ 是 $h(y)$ 在 $\mathcal{R}$ 中开区间 $]\mu-\delta, \mu+\delta[_{\mathcal{R}}$ 内的惟一根, $h(\mu-\delta) \neq 0$, 且 $h(\mu-\delta) \neq 0$. 从而必有 $\mu_2 = \mu$.

设 $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathcal{R}^n$ 是这样一个点, 使得 $\beta_{j_i} = e_i\eta$, $i = 1, \ldots, k$, $\beta_{j_{k+1}} = b_1$, 且 $\beta_{j_{k+i}} = \pi_1(\alpha_i^*)$, $i = 2, \ldots, n-k$. 此时有

$$f(\beta_1,\ldots,\beta_n) = f_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}^{(e_1,\ldots,e_k)}(b_1, \pi_1(\alpha_2^*),\ldots,\pi_1(\alpha_{n-k}^*)) = \mu.$$

这表明, $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ 是 f 在 $[-\eta,\eta]^n$ 上的一个最小值点. 由于 f 在 $[-\eta,\eta]^n$ 上的每个最小值点最多有 k 个分量取自于 $\{\eta, -\eta\}$, 从而 $-\eta < \pi_1(\alpha_i^*) < \eta$, $i = 2, \ldots, n-k$. 于是 $(b_1, \pi_1(\alpha_2^*),\ldots,\pi_1(\alpha_{n-k}^*)) \in S$, 即有 $b_1 \in S_{()}$, 矛盾! 因此, b_1 是 $S_{()}$ 的一个闭端点.

类似地可证明, $S_{(b_1)}$ 有一个闭端点 b_2. 如此讨论下去, 我们将获得 S 中一个严格临界点 $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-k})$. 因此, 断言 2 成立.

根据断言 2, 可设 $\bar{b} := (b_1,\ldots,b_{n-k})$ 是 $\mathrm{Zero}_{\mathcal{R}}(P_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}^{(e_1,\ldots,e_k)}) \cap S_0$ 中一个严格临界点. 由断言 1 知, $f_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}^{(e_1,\ldots,e_k)}(\bar{b}) = \mu$. 由上面计算过程中步骤 2 知, 有某个完全升列 $C \in \mathcal{C}_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}^{(e_1,\ldots,e_k)}$, 使得 $\bar{b} \in \mathrm{Zero}_{\mathcal{R}}(C/I_C)$. 根据步骤 3, Ξ_C 是完全升链 C 的一个有理单元表示族. 从而有 $\xi_1 := (u(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_{n-k}(t)) \in \Xi_C$, 使得 $\bar{b} = (\psi_1(\alpha), \ldots, \psi_{n-k}(\alpha))$, 其中 α 是 $u(t)$ 在 $\mathcal{R}$ 中一个根.

注意到, $\xi_1 \in \Xi_C \subseteq \Xi_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}^{(e_1,\ldots,e_k)}$, 且 $\min(f_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}^{(e_1,\ldots,e_k)} : \xi_1) \in \Omega$. 由于 μ^* 是 $\Omega_0 \cup \Omega$ 中最小元素, 从而有

$$\mu^* \leqslant \min(f_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}^{(e_1,\ldots,e_k)} : \xi_1) \leqslant f_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}^{(e_1,\ldots,e_k)}(\psi_1(\alpha),\ldots,\psi_{n-k}(\alpha)) = f_{\langle j_1,\ldots,j_k\rangle}^{(e_1,\ldots,e_k)}(\bar{b}) = \mu.$$

于是总有 $\mu^* \leqslant \mu$.

显然, 条目 “输出” 中的第一个条件被满足. 为验证条目 “输出” 中的第二个条件, 我们考虑下面可能情形:

情形 1 $\inf f(\mathbb{R}^n) = -\infty$. 此时, 由命题 2.1 和 4.2 有, $\pi(\mu^*) \leqslant \pi(\mu) = \inf f(\mathbb{R}^n) = -\infty$. 从而必有 $\pi(\mu^*) = -\infty$, 即 $\pi(\mu^*) = \inf f(\mathbb{R}^n)$.

情形 2 $\inf f(\mathbb{R}^n) \in \mathbb{R}$. 令 $a := \inf f(\mathbb{R}^n)$, 则 $a \in \mathbb{R}$. 由命题 4.2, 有 $\pi(\mu) = a$. 根据下确界的定义, 下面语句对于 $\mathbb{R}$ 成立:

$$\forall(x_1,\ldots,x_n)(f(x_1,\ldots,x_n) \geqslant a).$$

由适合实闭域的转移原理, 上面语句对于 $\mathcal{R}$ 也成立. 从而 $\mu^* \geqslant a$. 由命题 2.1, 我们有 $\pi(\mu^*) \geqslant \pi(a) = a$. 另一方面, 由命题 2.1 有 $\pi(\mu^*) \leqslant \pi(\mu) = a$. 因而 $\pi(\mu^*) = \inf f(\mathbb{R}^n)$. 于是, 条目 "输出" 中的第二个条件被证实.

现设 f 具有全局最小值 a. 由上面的讨论, 我们有 $\mu^* \geqslant a$. 另一方面, 由命题 4.2 有 $\mu^* \leqslant \mu = a$. 从而 $a = \mu^* \in \Omega_0 \cup \Omega$. 若 $a \in \Omega_0$, 则对于某个 $(e_1, \dots, e_n) \in \{1, -1\}^n$, $a = f(e_1\eta, \dots, e_n\eta)$. 由此有 $a = f(0, \dots, 0)$, 因为 η 是 $\mathbb{R}$ 上一个未定元. 从而 $f(0, \dots, 0) = \pi(\mu^*)$ 是 $\Pi_0 \cup \Pi$ 中最小元素. 若 $a \in \Omega$, 则对于某对 $\langle j_1, \dots, j_k\rangle \in \langle 1, \dots, n\rangle^k$ 和 $(e_1, \dots, e_k) \in \{1, -1\}^k$, 其中 $0 \leqslant k < n$, 存在一个 $\xi \in \Xi^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}$ 使得 $a = \min(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle} : \xi)$. 由此有 $\pi(\min(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle} : \xi)) = \pi(a) = \pi(\mu^*)$. 这表明, $\pi(\min(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle} : \xi))$ 是 $\Pi_0 \cup \Pi$ 中最小元素. 此外, 我们有

$$\pi(\min(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle} : \xi)) = \min(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle} : \xi) \in (f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle} : \xi).$$

反过来, 设 $f(0, \dots, 0)$ 是 $\Pi_0 \cup \Pi$ 中最小元素. 由条目 "输出" 中的第二个条件有, $\inf f(\mathbb{R}^n) = f(0, \dots, 0)$, 从而 $\inf f(\mathbb{R}^n)$ 可达到. 再设对于某对 $\langle j_1', \dots, j_k'\rangle \in \langle 1, \dots, n\rangle^k$ 和 $(e_1', \dots, e_k') \in \{1, -1\}^k$, 其中 $0 \leqslant k < n$, 存在一个 $\xi' \in \Xi^{(e_1',\dots,e_k')}_{\langle j_1',\dots,j_k'\rangle}$ 使得 $\pi(\min(f^{(e_1',\dots,e_k')}_{\langle j_1',\dots,j_k'\rangle} : \xi'))$ 是 $\Pi_0 \cup \Pi$ 中最小元素, 且 $\pi(\min(f^{(e_1',\dots,e_k')}_{\langle j_1',\dots,j_k'\rangle} : \xi)) \in (f^{(e_1',\dots,e_k')}_{\langle j_1',\dots,j_k'\rangle} : \xi')$. 由于 $\pi(\mu^*)$ 也是 $\Pi_0 \cup \Pi$ 中最小元素, 从而有

$$\inf f(\mathbb{R}^n) = \pi(\mu^*) = \pi(\min(f^{(e_1',\dots,e_k')}_{\langle j_1',\dots,j_k'\rangle} : \xi')) \in (f^{(e_1',\dots,e_k')}_{\langle j_1',\dots,j_k'\rangle} : \xi').$$

这表明, $\inf f(\mathbb{R}^n) \neq -\infty$. 令 $a := \inf f(\mathbb{R}^n)$, 则 $a \in \mathbb{R}$, 且 $a \in (f^{(e_1',\dots,e_k')}_{\langle j_1',\dots,j_k'\rangle} : \xi') \subset f(\mathcal{R}^n)$. 从而, 下面的语句对于 $\mathcal{R}$ 成立:

$$\exists(x_1, \dots, x_n)(f(x_1, \dots, x_n) = a).$$

由适合实闭域的转移原理, 上面语句对于 $\mathbb{R}$ 也成立. 换言之, $\inf f(\mathbb{R}^n)$ 可达到.

于是, 条目 "输出" 中的第三个条件也被证实. 至此, 算法 4.3 的正确性获证. □

注 实际上, 由算法 4.3 所计算出的 $\Xi^{()}_{\langle\rangle}$ 是由 $F[t] \times F(t)^n$ 中有限个 RUR 组成的. 当然, $F[t] \times F(t)^n$ 中一个 RUR 也是 $F(\eta)[t] \times F(\eta)(t)^n$ 中一个 RUR.

现在, 我们可以建立如下算法, 可用于计算多项式的全局下确界和判定全局最小值的存在.

算法 4.4 (计算全局下确界和判定其可达性)

结构: $\mathbb{R}$ 的一个可计算的序子域, 它容许单元多项式的一个实根隔离算法.

输入: 一个非零多项式 $f \in F[x_1, \dots, x_n]$.

输出: $\inf f(\mathbb{R}^n)$, 并在 $\inf f(\mathbb{R}^n)$ 可达到时, 输出 f 的全局最小值 $f_{\min}$.

计算过程:

步骤 1 考察含未定元 η 的单元多项式集合 $\Omega_0 := \{f(e_1\eta, \dots, e_n\eta) \mid e_i = \pm 1, i = 1, \dots, n\}$. 若 Ω_0 含有首项系数为负但次数大于零的多项式, 则停止计算, 且输出

$$(\inf f(\mathbb{R}^n) = -\infty).$$

否则, 做下一步.

步骤 2 对于每个 $k \in \{0, \dots, n\}$ 以及每对 $\langle j_1, \dots, j_k\rangle \in \langle 1, \dots, n\rangle^k$ 和 $(e_1, \dots, e_k) \in \{1, -1\}^k$, 执行如下计算:

步骤 2.1 由算法 4.3, 计算出 $F(\eta)[t] \times F(\eta)(t)^n$ 的一个有限子集 $\Xi^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}$, 使得算法 4.3 的条目 "输出" 中的三个条件被满足.

步骤 2.2　对于每个 $\xi\in\Xi^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}$, 由算法 2.5 计算 $\pi(\min(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}:\xi))$. 若对于某个 $\xi_0\in\Xi^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}$, $\pi(\min(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}:\xi_0))=-\infty$, 则输出

$$(\inf f(\mathbb{R}^n)=-\infty).$$

否则, 做下一步.

步骤 2.3　通过算法 2.2, 求出集 $\{\pi(\min(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}:\xi))\mid\xi\in\Xi^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}\}$ 中最小数 $L^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}$.

步骤 3　通过算法 2.2, 求出集 $\{L^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}\mid 0\leqslant k<n,\langle j_1,\dots,j_k\rangle\in\langle 1,\dots,n\rangle^k$, 且$(e_1,\dots,e_k)\in\{1,-1\}^k\}$ 中最小数 L, 且比较 L 和 $f(0,\dots,0)$ 之间的大小, 只要 $f(0,\dots,0)\in\Omega_0$. 若 $f(0,\dots,0)\in\Omega_0$ 且 $f(0,\dots,0)\leqslant L$, 则输出

$$(f_{\min}=f(0,\dots,0)).$$

否则, 做下一步.

步骤 4　对于每个 $\Xi^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}$ 中所有使得 $\pi(\min(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}:\xi))=L$ 的 RUR ξ, 由算法 2.6 逐个判定是否 $L\in(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}:\xi)$. 若某个 $\Xi^{(e'_1,\dots,e'_k)}_{\langle j'_1,\dots,j'_k\rangle}$ 中有一个 RUR ξ', 使得 $\pi(\min(f^{(e'_1,\dots,e'_k)}_{\langle j'_1,\dots,j'_k\rangle}:\xi'))=L$ 且 $L\in(f^{(e'_1,\dots,e'_k)}_{\langle j'_1,\dots,j'_k\rangle}:\xi')$, 则输出

$$(f_{\min}=L).$$

否则, 输出

$$(\inf f(\mathbb{R}^n)=L).$$

证明　相同于算法 4.3 的证明, 记 μ^* 为并集 $\Omega_0\cup\Omega$ 中最小元素, 其中 $\Omega_0:=\{f(e_1\eta,\dots,e_n\eta)\mid e_i=\pm1,\ i=1,\ \dots,\ n\}$, 且 $\Omega:=\{\min(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}:\xi)\mid 0\leqslant k<n,\ \langle j_1,\dots,j_k\rangle\in\langle 1,\dots,n\rangle^k,\ (e_1,\dots,e_k)\in\{1,-1\}^k$, 且$\xi\in\Xi^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}\}$. 此外, 采用算法 4.3 的条目 "输出" 中使用的符号 Π_0 和 Π. 由算法 4.3 的证明, 我们有 $\inf f(\mathbb{R}^n)=\pi(\mu^*)$.

若计算过程终止于步骤 1, 则 Ω_0 含有一个首项系数为负但次数大于零的多项式 $g(\eta)$. 由于 μ^* 为并集 $\Omega_0\cup\Omega$ 中最小元素, 从而 $\mu^*\leqslant g(\eta)$. 由 $\mathcal{R}$ 的序 $\leqslant$ 的定义知, 对于任意正数 $d\in\mathbb{R}$, 总有 $g(\eta)<-d$, 因为 $g(\eta)+d$ 的首项系数为负. 因而, $\pi(g(\eta))=-\infty$. 由命题 2.1 有, $\pi(\mu^*)\leqslant\pi(g(\eta))=-\infty$, 即有 $\pi(\mu^*)=-\infty$. 从而 $\inf f(\mathbb{R}^n)=-\infty$, 此正是算法 4.4 所输出的结果.

若计算过程终止于步骤 2.2, 则对于某个 $\xi_0\in\Xi^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}$, $\pi(\min(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}:\xi_0))=-\infty$. 由于 $\min(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}:\xi_0)\in\Omega$ 且 μ^* 为并集 $\Omega_0\cup\Omega$ 中最小元素, 从而 $\mu^*\leqslant\min(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}:\xi_0)$. 于是 $\inf f(\mathbb{R}^n)=\pi(\mu^*)\leqslant\pi(\min(f^{(e_1,\dots,e_k)}_{\langle j_1,\dots,j_k\rangle}:\xi_0))=-\infty$. 由此有 $\inf f(\mathbb{R}^n)=-\infty$, 此正是算法 4.4 所输出的结果.

若计算过程终止于步骤 3, 则 $f(0,\dots,0)\in\Omega_0$, 且 $f(0,\dots,0)\leqslant L$. 此时易见, $\Omega_0\setminus\{f(0,\dots,0)\}$ 中所有元素都是首项系数为负且次数大于零的多项式. 由 $\mathcal{R}$ 的序 $\leqslant$ 的定义知, $f(0,\dots,0)$ 为 Ω_0 中最小元素, 进而 $f(0,\dots,0)=\pi(f(0,\dots,0))$ 在 Π_0 中是最小的. 由于 $f(0,\dots,0)\leqslant L$, 从而 $f(0,\dots,0)$ 实际上在 $\Pi_0\cup\Pi$ 中是最小的. 根据算法 4.3 的条目 "输出" 中第二个条件, $\inf f(\mathbb{R}^n)=f(0,\dots,0)$. 因而, $f(0,\dots,0)$ 为 f 的全局最小值, 此也正是算法 4.4 所输出的结果.

现设计算过程终止于步骤 4. 此时易见, L 在 $\Pi_0\cup\Pi$ 中是最小的. 根据算法 4.3 的条目 "输出" 中第二个条件, $\inf f(\mathbb{R}^n)=L$. 若对于某个 $\xi'\in\Xi^{(e'_1,\dots,e'_k)}_{\langle j'_1,\dots,j'_k\rangle}$, $\pi(\min(f^{(e'_1,\dots,e'_k)}_{\langle j'_1,\dots,j'_k\rangle}:\xi'))=L$ 且 $L\in(f^{(e'_1,\dots,e'_k)}_{\langle j'_1,\dots,j'_k\rangle}:\xi')$, 则 $\pi(\min(f^{(e'_1,\dots,e'_k)}_{\langle j'_1,\dots,j'_k\rangle}:\xi')$ 在 $\Pi_0\cup\Pi$ 中是最小的, 且 $\pi(\min(f^{(e'_1,\dots,e'_k)}_{\langle j'_1,\dots,j'_k\rangle}:\xi')\in(f^{(e'_1,\dots,e'_k)}_{\langle j'_1,\dots,j'_k\rangle}:\xi')$. 根据算法 4.3 的条目 "输出" 中第三个条件, $\inf f(\mathbb{R}^n)$ 可达到, 且 L 为 f 的全局最小值. 至此, 算法 4.4 的正确性得证. □

注 (1) 与文献 [1–6] 中的方法相比较, 算法 4.4 的特点是可精确地表示出多项式的全局下确界, 并在对所考虑的多项式不附加任何假设条件的情况下, 可判断全局下确界的可达性.

(2) 算法 4.4 的效率紧紧地依赖于吴方法. 对于吴方法, 一个关键的过程是计算一个给定的有限多项式集合的特征集 (列). 根据文献 [16] 中定理 4.14, 计算有限多项式集合的特征集的复杂度是单指数的. 在本文中, 我们不能给出算法 4.4 的复杂度, 该工作留待今后完成.

5 有关实例

在这最后一节中, 我们将借助于计算机代数系统 **Maple** 和吴方法软件 **wsolve**, 应用算法 4.3 和 4.4 处理几个实例. 有关 **Maple** 的详情, 可见于文献 [17]. 根据 [12] 中算法 3.4 和本文中上述算法, 我们编制成一个名为 **RRUR** 的通用程序, 该程序包含具有如下功能的函数:

- **rurc**: 计算一个完全升链在 $\mathcal{R}$ 中的一个 RUR 族.
- **compare**: 在一个由区间表示的实数所组成的有限集中找出最小者.
- **minrur**: 计算一个多项式关于一个 RUR 的标准化最小值.
- **att**: 判定一个多项式的全局下确界的可达性.

通用程序 **RRUR** 可在 [18] 中找到. 本节的例子都是在一台内存为 128MB 的 PentiumIV 计算机上实施的.

作为第一个例子, 我们考虑 Motzkin 多项式.

例 5.1 设 $f = x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4 + x_3^6 - 3x_1^2x_2^2x_3^2$. 计算 $\inf f(\mathbb{R}^3)$, 且判定 $\inf f(\mathbb{R}^3)$ 是否可达到.

根据算法 4.3 和 4.4, 我们执行如下运算:

(1) 作为第一步, 我们得到 $\{f(e_1\eta, e_2\eta, e_3\eta) \mid e_i = \pm1, i = 1, 2, 3\} = \{f(0,0,0)\} = \{0\}$.

(2.1) 对于多项式 $f_{\langle\rangle}^{()} = y_1^4y_2^2 + y_1^2y_2^4 + y_3^6 - 3y_1^2y_2^2y_3^2$, 计算 $f_{\langle\rangle}^{()}$ 的所有偏导数如下:

$$P_{\langle\rangle}^{()} := \{4y_1^3y_2^2 + 2y_1y_2^4 - 6y_1y_2^2y_3^2,\ 2y_1^4y_2 + 4y_1^2y_2^3 - 6y_1^2y_2y_3^2,\ 6y_3^5 - 6y_1^2y_2^2y_3\}.$$

关于字典序 $y_1 \prec y_2 \prec y_3$, 通过吴方法获得由 $P_{\langle\rangle}^{()}$ 所得的如下一组升链:

$$\{[y_1, y_2, y_3], [y_1, y_3], [y_2, y_3], [y_1 - y_3, y_2 - y_3], [y_1 + y_3, y_2 + y_3], [y_1 + y_3, y_2 - y_3], [y_1 - y_3, y_2 + y_3]\},$$

其中升链 $C_1 := [y_1, y_2, y_3]$ 是完全的, 但其他升链是不可约的.

注意到, $\xi_1 := (t, 0, 0, 0)$ 是 C_1 的一个 RUR. 从而 $\min(f : \xi_1) = f(0, 0, 0) = 0$.

(2.2) 对于多项式 $f_{\langle1\rangle}^{(\pm1)} = f_{\langle2\rangle}^{(\pm1)} = \eta^4y_1^2 + \eta^2y_1^4 + y_2^6 - 3\eta^2y_1^2y_2^2$, 计算 $f_{(1)}^{\langle1\rangle}$ 的所有偏导数如下:

$$P_{\langle1\rangle}^{(1)} := \{2\eta^4y_1 + 4\eta^2y_1^3 - 6\eta^2y_1y_2^2,\ 6y_2^5 - 6\eta^2y_1^2y_2\}.$$

关于字典序 $y_1 \prec y_2$, 通过吴方法获得由 $P_{\langle1\rangle}^{(1)}$ 所得的如下一组升链:

$$\{C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9\},$$

其中 $C_2 := [-2y_1 + \eta, -2y_2^2 + \eta^2]$, $C_3 := [y_1, y_2]$, $C_4 := [\eta^2 + 2y_1^2, y_2]$, $C_5 := [-y_1 + \eta, y_2 + \eta]$, $C_6 := [-y_1 + \eta, -y_2 + \eta]$, $C_7 := [y_1 + \eta, y_2 + \eta]$, $C_8 := [y_1 + \eta, -y_2 + \eta]$ 和 $C_9 := [2y_1 + \eta, -2y_2^2 + \eta^2]$ 都是完全的.

对于 $i = 2, \ldots, 9$, 通过输入指令 **rurc** $(C_i, [y_1, y_2])$, 我们获得各自在 $\mathcal{R}$ 中的如下 RUR:

$$\xi_2 := \left(2t^2 - \eta^2, \frac{1}{2}\eta, t\right), \quad \xi_3 := (t, 0, 0), \quad \{\ \}, \quad \xi_5 := (t, \eta, -\eta),$$

$$\xi_6 := (t, \eta, \eta), \quad \xi_7 := (t, -\eta, -\eta), \quad \xi_8 := (t, -\eta, \eta), \quad \xi_9 := \left(2t^2 - \eta^2, -\frac{1}{2}\eta, t\right).$$

对于 $i \in \{2,3,5,6,7,8,9\}$, 输入指令 **minrur** $(f_{\langle 1 \rangle}^{\langle 1 \rangle}, \xi_i, [y_1, y_2], t)$, 我们分别获得 $f_{\langle 1 \rangle}^{(1)}$ 关于这些 RUR 的如下标准化最小值:

$$\pi(\min(f_{\langle 1 \rangle}^{(1)} : \xi_i)) = \infty,\ i = 2,\ 9, \quad \text{但}\ \pi(\min(f_{\langle 1 \rangle}^{(1)} : \xi_j)) = [z, -1, 1]\,(= 0),\ j = 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8.$$

(2.3) 对于多项式 $f_{\langle 3 \rangle}^{(\pm 1)} = y_1^4 y_2^2 + y_1^2 y_2^4 + \eta^6 - 3y_1^2 y_2^2 \eta^2$, 计算 $f_{\langle 3 \rangle}^{(1)}$ 的所有偏导数如下:

$$P_{\langle 3 \rangle}^{(1)} := \{4y_2^3 y_1^2 + 2y_1^4 y_2 - 6\eta^2 y_1^2 y_2, 2y_2^4 y_1 + 4y_1^3 y_2^2 - 6\eta^2 y_1 y_2^2\}.$$

关于字典序 $y_1 \prec y_2$, 通过吴方法获得由 $P_{\langle 1 \rangle}^{(3)}$ 所得的如下一组升链:

$$\{C_{10} := [\eta + y_1, \eta + y_2], C_{11} := [\eta + y_1, \eta - y_2], C_{12} := [\eta - y_1, \eta + y_2], C_{13} := [\eta - y_1, \eta - y_2], [y_1], [y_2]\},$$

其中升链 C_{10}, C_{11}, C_{12} 和 C_{13} 是完全的, 但 $[y_1]$ 和 $[y_2]$ 是不可约的.

对于 $i \in \{10,11,12,13\}$, 通过输入指令 **rurc** $(C_i, [y_1, y_2])$, 我们获得各自在 $\mathcal{R}$ 中的如下 RUR:

$$\xi_{10} := (t + \eta, -\eta, -\eta),\ \ \xi_{11} := (t - \eta, -\eta, \eta), \quad \xi_{12} := (t + \eta, \eta, -\eta),\ \ \xi_{13} := (t - \eta, \eta, \eta).$$

对于 $i \in \{10,11,12,13\}$, 输入指令 **minrur** $(f_{\langle 3 \rangle}^{(1)}, \xi_i, [y_1, y_2], t)$, 分别获得 $f_{\langle 3 \rangle}^{(1)}$ 关于这些 RUR 的如下标准化最小值:

$$\pi(\min(f_{\langle 3 \rangle}^{(1)} : \xi_i)) = [z, -1, 1](= 0),\ i = 10,\ 11,\ 12,\ 13.$$

(2.4) 对于多项式 $f_{\langle 1,2 \rangle}^{(\pm 1, \pm 1)} = 2\eta^6 + y_1^6 - 3\eta^4 y_1^2$, 计算 $f_{\langle 1,2 \rangle}^{(1,1)}$ 的所有偏导数如下:

$$P_{\langle 1,2 \rangle}^{(1,1)} := \{6y_1^5 - 6\eta^4 y_1\}.$$

注意到, 升链 $C_{14} := [6y_1^5 - 6\eta^4 y_1]$ 是完全的. 输入指令 **rurc** $(C_{14}, [y_1])$, 获得 C_{14} 在 $\mathcal{R}$ 中的如下 RUR:

$$\xi_{14} := (t^5 - \eta^4 t, t).$$

输入指令 **minrur** $(f_{\langle 1,2 \rangle}^{(1,1)}, \xi_{14}, [y_1], t)$, 我们获得 $f_{\langle 1,2 \rangle}^{(1,1)}$ 关于 ξ_{14} 的如下标准化最小值:

$$\pi(\min(f_{\langle 1,2 \rangle}^{(1,1)} : \xi_{14})) = [z^2, -1, 1](= 0).$$

(2.5) 对于多项式 $f_{\langle 1,3 \rangle}^{(\pm 1, \pm 1)} = \eta^4 y_1^2 + \eta^2 y_1^4 + \eta^6 - 3y_1^2 \eta^4$, 计算 $f_{\langle 1,3 \rangle}^{(1,1)}$ 的所有偏导数如下:

$$P_{\langle 1,3 \rangle}^{(1,1)} := \{2\eta^4 y_1 + 4\eta^2 y_1^3 - 6\eta^4 y_1\}.$$

注意到, 升链 $C_{15} := [2\eta^4 y_1 + 4\eta^2 y_1^3 - 6\eta^4 y_1]$ 是完全的. 输入指令 **rurc** $(C_{15}, [y_1])$, 获得 C_{15} 在 $\mathcal{R}$ 中的如下 RUR:

$$\xi_{15} := (2\eta^4 t + 4\eta^2 t^3 - 6\eta^4 t, t).$$

输入指令 **minrur** $(f_{\langle 1,3 \rangle}^{(1,1)}, \xi_{15}, [y_1], t)$, 我们获得 $f_{\langle 1,3 \rangle}^{(1,1)}$ 关于 ξ_{15} 的如下标准化最小值:

$$\pi(\min(f_{\langle 1,3 \rangle}^{(1,1)} : \xi_{15})) = [z^2, -1, 1](= 0).$$

(2.6) 对于多项式 $f_{\langle 2,3 \rangle}^{(\pm 1, \pm 1)} = y_1^4 \eta^2 + y_1^2 \eta^4 + \eta^6 - 3y_1^2 \eta^4$, 计算 $f_{\langle 2,3 \rangle}^{(1,1)}$ 的所有偏导数如下:

$$P^{(1,1)}_{\langle 2,3\rangle} := \{4y_1^3\eta^2 + 2y_1\eta^4 - 6y_1\eta^4\}.$$

注意到, 升链 $C_{16} := [4y_1^3\eta^2 + 2y_1\eta^4 - 6y_1\eta^4]$ 是完全的. 输入指令 **rurc** $(C_{16}, [y_1])$, 获得 C_{16} 在 $\mathcal{R}$ 中的如下 RUR:

$$\xi_{16} := (4t^3\eta^2 + 2t\eta^4 - 6t\eta^4, t).$$

输入指令 **minrur** $(f^{(1,1)}_{\langle 2,3\rangle}, \xi_{16}, [y_1], t)$, 我们获得 $f^{(1,1)}_{\langle 2,3\rangle}$ 关于 ξ_{16} 的如下标准化最小值:

$$\pi(\min(f^{(1,1)}_{\langle 2,3\rangle} : \xi_{16})) = [z^2, -1, 1](= 0).$$

(3) 输入指令 **compare** (Π, z), 其中 Π 是如上所获的全部标准化最小值构成的集合, 我们求出 Π 中如下最小数:

$$[z^2, -1, 1](= 0).$$

比较 $[z^2, -1, 1]$ 和 $f(0, \dots, 0)$ 之间的大小, 我们有 $[z^2, -1, 1] = f(0, \dots, 0)$.

根据算法 4.4, $f(0, \dots, 0)(= 0)$ 正是 f 的全局最小值.

现在, 我们考察下面实例, 该例取材于 [6] 中例 5.3. 对于该例中多项式, 通过 [6] 中方法所得的全局下确界为近似值 -0.625000000000073993.

例 5.2 设 $f = 2y^4(x+y)^4 + y^2(x+y)^2 + 2y(x+y) + y^2$. 计算 $\inf f(\mathbb{R}^2)$, 且判定 $\inf f(\mathbb{R}^2)$ 是否可达到.

根据算法 4.3 和 4.4, 我们执行如下运算:

(1) 作为第一步, 我们得到 $\{f(e_1\eta, e_2\eta) \mid e_i = \pm 1,\ i = 1, 2\} = \{32\eta^8 + 4\eta^4 + 5\eta^2, \eta^2\}$, 其中每个元素的标准化为 ∞.

(2.1) 对于多项式 $f^{()}_{\langle\rangle} = 2y^4(x+y)^4 + y^2(x+y)^2 + 2y(x+y) + y^2$, 计算 $f^{()}_{\langle\rangle}$ 的所有偏导数如下:

$$\begin{aligned} P^{()}_{\langle\rangle} :=& \{8y^4(x+y)^3 + 2y^2(x+y) + 2y, 8y^3(x+y)^4 + 8y^4(x+y)^3 \\ &+ 2y(x+y)^2 + 2y^2(x+y) + 2x + 6y\}. \end{aligned}$$

关于字典序 $x \prec y$, 通过吴方法获得由 $P^{()}_{\langle\rangle}$ 所得的如下一组升链:

$$\{[x, y]\},$$

其中升链 $C_1 := [x, y]$ 是完全的.

注意到, $\xi_1 := \{(t, 0, 0)\}$ 是 C_1 的一个 RUR. 从而 $\min(f^{()}_{\langle\rangle} : \xi_1) = f(0, 0) = 0 = [z, 1, -1]$.

(2.2) 对于多项式 $f^{(1)}_{\langle 1\rangle} = 2y^4(\eta+y)^4 + y^2(\eta+y)^2 + 2y(\eta+y) + y^2$, 计算 $f^{(1)}_{\langle 1\rangle}$ 的所有偏导数如下:

$$P^{(1)}_{\langle 1\rangle} := \{8y^3(\eta+y)^4 + 8y^4(\eta+y)^3 + 2y(\eta+y)^2 + 2y^2(\eta+y) + 2\eta + 6y\}.$$

注意到, 升链 $C_2 := [8y^3(\eta+y)^4 + 8y^4(\eta+y)^3 + 2y(\eta+y)^2 + 2y^2(\eta+y) + 2\eta + 6y]$ 是完全的. 输入指令 **rurc** $(C_2, [y])$, 获得 C_2 在 $\mathcal{R}$ 中的如下 RUR:

$$\xi_2 := (8t^3(\eta+t)^4 + 8t^4(\eta+t)^3 + 2t(\eta+t)^2 + 2t^2(\eta+t) + 2\eta + 6t, t).$$

输入指令 **minrur** $(f^{(1)}_{\langle 1\rangle}, \xi_2, [y], t)$, 我们获得 $f^{(1)}_{\langle 1\rangle}$ 关于 ξ_2 的如下标准化最小值:

$$\pi(\min(f^{(1)}_{\langle 1\rangle} : \xi_2)) = [55 + 73z + 16z^2 + 64z^3, -2, 1/2].$$

(2.3) 对于多项式 $f_{\langle 1\rangle}^{(-1)} = 2y^4(-\eta+y)^4 + y^2(-\eta+y)^2 + 2y(-\eta+y) + y^2$, 计算 $f_{\langle 1\rangle}^{(-1)}$ 的所有偏导数如下:

$$P_{\langle 1\rangle}^{(-1)} := \{8y^3(-\eta+y)^4 + 8y^4(-\eta+y)^3 + 2y(-\eta+y)^2 + 2y^2(-\eta+y) - 2\eta + 6y\}.$$

注意到, $C_3 := [8y^3(-\eta+y)^4 + 8y^4(-\eta+y)^3 + 2y(-\eta+y)^2 + 2y^2(-\eta+y) - 2\eta + 6y]$ 是完全的. 输入指令 **rurc** $(C_3, [y])$, 获得 C_3 在 $\mathcal{R}$ 中的如下 RUR:

$$\xi_3 := (8t^3(-\eta+t)^4 + 8t^4(-\eta+t)^3 + 2t(-\eta+t)^2 + 2t^2(-\eta+t) - 2\eta + 6t, t).$$

输入指令 **minrur** $(f_{\langle 1\rangle}^{(-1)}, \xi_3, [y], t)$, 我们获得 $f_{\langle 1\rangle}^{(-1)}$ 关于 ξ_3 的如下标准化最小值:

$$\pi(\min(f_{\langle 1\rangle}^{(-1)} : \xi_3)) = [55 + 73z + 16z^2 + 64z^3, -2, 1/2].$$

(2.4) 对于多项式 $f_{\langle 2\rangle}^{(1)} = 2\eta^4(x+\eta)^4 + \eta^2(x+\eta)^2 + 2\eta(x+\eta) + \eta^2$, 计算 $f_{\langle 2\rangle}^{(1)}$ 的所有偏导数如下:

$$P_{\langle 2\rangle}^{(1)} := \{8\eta^4(x+\eta)^3 + 2\eta^2(x+\eta) + 2\eta\}.$$

注意到, 升链 $C_4 := [8\eta^4(x+\eta)^3 + 2\eta^2(x+\eta) + 2\eta]$ 是完全的. 输入指令 **rurc** $(C_4, [x])$, 获得 C_4 在 $\mathcal{R}$ 中的如下 RUR:

$$\xi_4 := (8\eta^4(t+\eta)^3 + 2\eta^2(t+\eta) + 2\eta, t).$$

输入指令 **minrur** $(f_{\langle 2\rangle}^{(1)}, \xi_4, [x], t)$, 我们获得 $f_{\langle 2\rangle}^{(1)}$ 关于 ξ_4 的如下标准化最小值:

$$\pi(\min(f_{\langle 2\rangle}^{(1)} : \xi_4)) = \infty.$$

(2.5) 对于多项式 $f_{\langle 2\rangle}^{(-1)} = 2\eta^4(x-\eta)^4 + \eta^2(x-\eta)^2 - 2\eta(x-\eta) + \eta^2$, 计算 $f_{\langle 2\rangle}^{(-1)}$ 的所有偏导数如下:

$$P_{\langle 2\rangle}^{(-1)} := \{8\eta^4(x-\eta)^3 + 2\eta^2(x-\eta) - 2\eta\}.$$

注意到, 升链 $C_5 := [8\eta^4(x-\eta)^3 + 2\eta^2(x-\eta) - 2\eta]$ 是完全的. 输入指令 **rurc** $(C_5, [x])$, 获得 C_5 在 $\mathcal{R}$ 中的如下 RUR:

$$\xi_5 := (8\eta^4(t-\eta)^3 + 2\eta^2(t-\eta) - 2\eta, t).$$

输入指令 **minrur** $(f_{\langle 2\rangle}^{(-1)}, \xi_5, [x], t)$, 我们获得 $f_{\langle 2\rangle}^{(-1)}$ 关于 ξ_5 的如下标准化最小值:

$$\pi(\min(f_{\langle 2\rangle}^{(-1)} : \xi_5)) = \infty.$$

(3) 输入指令 **compare** $([[z, 1, -1], [55 + 73z + 16z^2 + 64z^3, -2, 1/2]], z)$, 我们求出 $\{[z, 1, -1], [55 + 73z + 16z^2 + 64z^3, -2, 1/2]\}$ 中如下最小数 $[55 + 73z + 16z^2 + 64z^3, -2, 1/2]$.

由算法 4.4, 我们有 $\inf f(\mathbb{R}^2) = [55 + 73z + 16z^2 + 64z^3, -2, 1/2]$.

(4) 注意到, $\pi(\min((f_{\langle 1\rangle}^{(1)} : \xi_2)) = \pi(\min((f_{\langle 1\rangle}^{(-1)} : \xi_3)) = [55 + 73z + 16z^2 + 64z^3, -2, 1/2]$. 通过输入指令 **att** $(f_{\langle 1\rangle}^{(1)}, \xi_2, [y], t, [55 + 73z + 16z^2 + 64z^3, -2, 1/2])$ 和 **att** $(f_{\langle 1\rangle}^{(-1)}, \xi_3, [y], t, [55 + 73z + 16z^2 + 64z^3, -2, 1/2])$, 如下相同的结果在计算机屏幕上显示:

"it is not attained".

这表明, $\inf f(\mathbb{R}^2)$ 不能达到. 由于 $55+73z+16z^2+64z^3=(8z+5)(8z^2-3z+11)$ 且 $(8z+5)$ 在开区间 $]-2,1/2[$ 内有实根 $-5/8$, 从而进一步有

$$\inf f(\mathbb{R}^2)=[55+73z+16z^2+64z^3,-2,1/2]=-5/8.$$

例 5.3 设 $f=x^6+12x^4y^2+3x^4z^2+48x^2y^4+24x^2y^2z^2+3x^2z^4+64y^6+48y^4z^2+12y^2z^4+z^6-2x^2-8y^2-2z^2$. 计算 $\inf f(\mathbb{R}^3)$, 且判定 $\inf f(\mathbb{R}^3)$ 是否可达到.

根据算法 4.3 和 4.4, 我们执行如下运算:

(1) 作为第一步, 我们得到 $\{f(e_1\eta,e_2\eta,e_3\eta)\mid e_i=\pm1,\ i=1,2,3\}=\{216\eta^6-12\eta^2\}$. 显然, $216\eta^6-12\eta^2$ 的标准化为 ∞.

(2.1) 对于多项式 $f_{\langle\rangle}^{()}=x^6+12x^4y^2+3x^4z^2+48x^2y^4+24x^2y^2z^2+3x^2z^4+64y^6+48y^4z^2+12y^2z^4+z^6-2x^2-8y^2-2z^2$, 计算 $f_{\langle\rangle}^{()}$ 的所有偏导数如下:

$$\begin{aligned}P_{\langle\rangle}^{()}:=&\{6x^5+48x^3y^2+12x^3z^2+96xy^4+48xy^2z^2+6xz^4-4x,\ 24x^4y+192x^2y^3+48x^2yz^2\\&+384y^5+192y^3z^2+24yz^4-16y,\ 6x^4z+48x^2y^2z+12x^2z^3+96y^4z+48y^2z^3+6z^5-4z\}.\end{aligned}$$

关于字典序 $x\prec y\prec z$, 通过吴方法获得由 $P_{\langle\rangle}^{()}$ 所得的如下一组升链:

$$\{[x,y,z],[3x^4+24y^2x^2+6x^2z^2+48y^4+24y^2z^2+3z^4-2]\},$$

其中升链 $C_1:=[x,y,z]$ 是完全的, 但另一个是可约的.

注意到, $\xi_1:=(t,0,0,0)$ 是 C_1 的一个 RUR. 从而 $\min(f_{\langle\rangle}^{()}:\xi_1)=f(0,0,0)=0=[z,-1,1]$.

令 $g_1:=3x^4+24y^2x^2+6x^2z^2+48y^4+24y^2z^2+3z^4-2$. 通过吴方法, 获得由 $\{(g_1,\mathrm{diff}(g_1,y),\mathrm{diff}(g_1,z)\}$ 所得的如下一组完全的升链:

$$C_2:=[3x^4-2,y,z].$$

输入指令 **rurc** $(C_2,[x,y,z])$, 获得 C_2 在 $\mathbb{R}$ 中的如下 RUR:

$$\xi_2:=(3t^4-2,t,0,0).$$

输入指令 **minrur** $(f_{\langle\rangle}^{()},\xi_2,[x,y,z],t)$, 我们获得 $f_{\langle\rangle}^{()}$ 关于 ξ_2 的如下最小值:

$$\min(f_{\langle\rangle}^{()}:\xi_2)=[27z^2-32,-5/2,0].$$

(2.2) 对于多项式 $f_{\langle1\rangle}^{(\pm1)}=\eta^6+12\eta^4y^2+3\eta^4z^2+48\eta^2y^4+24\eta^2y^2z^2+3\eta^2z^4+64y^6+48y^4z^2+12y^2z^4+z^6-2\eta^2-8y^2-2z^2$, 计算 $f_{\langle1\rangle}^{(1)}$ 的所有偏导数如下:

$$\begin{aligned}P_{\langle1\rangle}^{(1)}:=&\{24\eta^4y+192\eta^2y^3+48\eta^2yz^2+384y^5+192y^3z^2+24yz^4-16y,\\&6\eta^4z+48\eta^2y^2z+12\eta^2z^3+96y^4z+48y^2z^3+6z^5-4z\}.\end{aligned}$$

通过吴方法, 获得由 $P_{\langle1\rangle}^{(1)}$ 所得的如下一组升链:

$$\{[y,z],[3\eta^4+24y^2\eta^2+6\eta^2z^2+48y^4+24y^2z^2+3z^4-2]\}.$$

其中升链 $C_3:=[y,z]$ 是完全的, 但另一个是可约的.

注意到, $\xi_3:=(t,0,0)$ 是 C_3 的一个 RUR. 从而

$$\pi(\min(f_{\langle 1\rangle}^{(1)}:\xi_3))=\pi(f_{\langle 1\rangle}^{(1)}(0,0))=\pi(\eta^6-2\eta^2)=\infty.$$

令 $g_2:=3\eta^4+24y^2\eta^2+6\eta^2z^2+48y^4+24y^2z^2+3z^4-2$. 通过吴方法, 获得由 $\{g_2,\mathrm{diff}(g_2,z)\}$ 所得的如下完全的升链:

$$[3\eta^4+24y^2\eta^2-2+48y^4,z].$$

通过输入指令 **rurc**, 空集 $\{\}$ 作为该升链在 $\mathcal{R}$ 中的惟一 RUR 族被获得.

(2.3) 对于多项式 $f_{\langle 2\rangle}^{(\pm1)}=x^6+12x^4\eta^2+3x^4z^2+48x^2\eta^4+24x^2\eta^2z^2+3x^2z^4+64\eta^6+48\eta^4z^2+12\eta^2z^4+z^6-2x^2-8\eta^2-2z^2$, 计算 $f_{\langle 2\rangle}^{(1)}$ 的所有偏导数如下:

$$\begin{aligned}P_{\langle 2\rangle}^{(1)}:=&\{6x^5+48x^3\eta^2+12x^3z^2+96x\eta^4+48x\eta^2z^2+6xz^4-4x,\\&6x^4z+48x^2\eta^2z+12x^2z^3+96\eta^4z+48\eta^2z^3+6z^5-4z\}.\end{aligned}$$

通过吴方法, 获得由 $P_{\langle 2\rangle}^{(1)}$ 所得的如下一组升链:

$$\{[x,z],[3x^4+24x^2\eta^2+6x^2z^2+48\eta^4+24\eta^2z^2+3z^4-2]\},$$

其中升链 $C_4:=[x,y]$ 是完全的, 但另一个是可约的.

注意到, $\xi_4:=(t,0,0)$ 是 C_4 在 $\mathcal{R}$ 中的一个 RUR. 从而

$$\pi(\min(f_{\langle 2\rangle}^{(1)}:\xi_4))=\pi(f_{\langle 2\rangle}^{(1)}(0,0))=\pi(64\eta^6-8\eta^2)=\infty.$$

令 $g_3:=3x^4+24x^2\eta^2+6x^2z^2+48\eta^4+24\eta^2z^2+3z^4-2$. 通过吴方法, 获得由 $\{g_3,\mathrm{diff}(g_3,z)\}$ 所得的如下完全的升链:

$$[3x^4+24x^2\eta^2-2+48\eta^4,z].$$

通过输入指令 **rurc**, 空集 $\{\}$ 作为该升链在 $\mathcal{R}$ 中的惟一 RUR 族被获得.

(2.4) 对于多项式 $f_{\langle 3\rangle}^{(\pm1)}=x^6+12x^4y^2+3x^4\eta^2+48x^2y^4+24x^2y^2\eta^2+3x^2\eta^4+64y^6+48y^4\eta^2+12y^2\eta^4+\eta^6-2x^2-8y^2-2\eta^2$, 同样可获得一个 RUR $\xi_5:=(t,0,0)$. 从而

$$\pi(\min(f_{\langle 3\rangle}^{(1)}:\xi_5))=\pi(f_{\langle 3\rangle}^{(1)}(0,0))=\pi(\eta^6-2\eta^2)=\infty.$$

(2.5) 对于多项式 $f_{\langle 1,2\rangle}^{(\pm1,\pm1)}=125\eta^6+75\eta^4z^2+15\eta^2z^4+z^6-10\eta^2-2z^2$, 计算 $f_{\langle 1,2\rangle}^{(1,1)}$ 的所有偏导数如下:

$$P_{\langle 1,2\rangle}^{(1,1)}:=\{150\eta^4z+60\eta^2z^3+6z^5-4z\}.$$

注意到, $C_6:=[150\eta^4z+60\eta^2z^3+6z^5-4z]$ 是完全的. 输入指令 **rurc** $(C_6,[z])$, 我们获得 C_6 在 $\mathcal{R}$ 中如下 RUR:

$$\xi_6:=(150\eta^4t+60\eta^2t^3+6t^5-4t,t).$$

输入指令 **minrur** $(f_{\langle 1,2\rangle}^{(1,1)},\xi_6,[z],t)$, 我们获得 $f_{\langle 1,2\rangle}^{(1,1)}$ 关于 ξ_6 的如下标准化最小值:

$$\pi(\min(f_{\langle 1,2\rangle}^{(1,1)}:\xi_6))=\infty.$$

(2.6) 对于多项式 $f_{\langle 1,3\rangle}^{(\pm1,\pm1)}=8\eta^6+48\eta^4y^2+96\eta^2y^4+64y^6-4\eta^2-8y^2$, 计算 $f_{\langle 1,3\rangle}^{(1,1)}$ 的所有偏导数如下:

$$P_{\langle 1,3\rangle}^{(1,1)} := \{96\eta^4 y + 384\eta^2 y^3 + 384y^5 - 16y\}.$$

注意到, $C_7 := [96\eta^4 y + 384\eta^2 y^3 + 384y^5 - 16y]$ 是完全的. 输入指令 **rurc** $(C_7, [y])$, 我们获得 C_7 在 $\mathcal{R}$ 中如下 RUR:

$$\xi_7 := (96\eta^4 t + 384\eta^2 t^3 + 384t^5 - 16t, t).$$

输入指令 **minrur** $(f_{\langle 1,3\rangle}^{(1,1)}, \xi_7, [y], t)$, 我们获得 $f_{\langle 1,3\rangle}^{(1,1)}$ 关于 ξ_7 的如下标准化最小值:

$$\pi(\min(f_{\langle 1,3\rangle}^{(1,1)} : \xi_7)) = \infty.$$

(2.7) 对于多项式 $f_{\langle 2,3\rangle}^{(\pm 1,\pm 1)} = x^6 + 15x^4\eta^2 + 75x^2\eta^4 + 125\eta^6 - 2x^2 - 10\eta^2$, 我们相应地获得一个 RUR $\xi_8 := (6t^5 + 60t^3\eta^2 + 150t\eta^4 - 4t, t)$. 输入指令 **minrur** $(f_{\langle 2,3\rangle}^{(1,1)}, \xi_8, [x], t)$, 我们获得 $f_{\langle 2,3\rangle}^{(1,1)}$ 关于 ξ_8 的如下标准化最小值:

$$\pi(\min(f_{\langle 2,3\rangle}^{(1,1)} : \xi_8)) = \infty.$$

(3) 输入指令 **compare** $([[z,-1,1],[27z^2-32,-5/2,0]], z)$, 我们求出 $\{[z,-1,1],[27z^2-32,-5/2,0]\}$ 中最小数 $[27z^2-32,-5/2,0]$.

由算法 4.4, 我们有 $\inf f(\mathbb{R}^3) = [27z^2-32,-5/2,0] = -4\sqrt{6}/9$.

(4) 注意到, $[27z^2-32,-5/2,0]$ 是 $f_{\langle\rangle}^{()}$ 关于 ξ_2 的最小值. 因而, $\inf f(\mathbb{R}^3)$ 可达到.

通过解 $\xi_2 := (3t^4-2, t, 0, 0)$, 我们可获得如下两个最小值点:

$$(\sqrt[4]{54}/3, 0, 0), \quad (-\sqrt[4]{54}/3, 0, 0).$$

下面例子表明, 当所考虑的多项式没有有限的全局下确界时, 本文中算法是如何产生结果的.

例 5.4 设 $f = x^6 - 2x^4y^2 + y^6 - x^2y^2 - yz^2 + 2z^4$. 计算 $\inf f(\mathbb{R}^3)$.

根据算法 4.3 和 4.4, 我们执行如下运算:

(1) 作为第一步, 我们得到 $\{f(e_1\eta, e_2\eta, e_3\eta) \mid e_i = \pm 1, i = 1, 2, 3\} = \{\eta^4 - \eta^3, \eta^4 + \eta^3\}$. 显然, $\eta^4 - \eta^3$ 和 $\eta^4 + \eta^3$ 的标准化都为 ∞.

(2.1) 对于多项式 $f_{\langle\rangle}^{()} = x^6 - 2x^4y^2 + y^6 - x^2y^2 - yz^2 + 2z^4$, 计算 $f_{\langle\rangle}^{()}$ 的所有偏导数如下:

$$P_{\langle\rangle}^{()} := \{6x^5 - 8x^3y^2 - 2xy^2,\ -4x^4y + 6y^5 - 2x^2y - z^2,\ -2yz + 8z^3\}.$$

关于字典序 $x \prec y \prec z$, 通过吴方法获得由 $P_{\langle\rangle}^{()}$ 所得的如下一组完全的升链:

$$\{C_1, C_2, C_3, C_4\},$$

其中 $C_1 := [x, y, z]$, $C_2 := [x, 24y^4 - 1, -4z^2 + y]$, $C_3 := [5x^6 + 32x^4 + 10x^2 + 1, 3x^4 - 4x^2y^2 - y^2, z]$, 且 $C_4 := [40x^8 + 256x^6 + 96x^4 + 16x^2 + 1, 3x^4 - 4x^2y^2 - y^2, -4z^2 + y]$.

空集 $\{\}$ 既是 C_3 又是 C_4 的惟一 RUR 族, 因为 $5x^6+32x^4+10x^2+1$ 和 $40x^8+256x^6+96x^4+16x^2+1$ 在 $\mathbb{R}$ 中都没有根. 注意到, $\xi_1 := (t, 0, 0, 0)$ 是 C_1 的一个 RUR. 从而 $\min(f_{\langle\rangle}^{()} : \xi_1) = f(0,0,0) = 0$.

输入指令 **rurc** $(C_2, [x, y, z])$, 我们获得 C_2 在 $\mathcal{R}$ 中如下 RUR:

$$\xi_2 := \Bigg(-1536t^4 - 3072t^3 - 960t^2 - 96t + 29 + 18432t^8, 0, \frac{4(144t^4 + 48t^3 + 3t^2 + 2)}{3(256t^3 + 160t^2 + 24t + 1)}, \frac{192t^4 - 8 + 288t^3 + 60t^2 + 3t}{3(256t^3 + 160t^2 + 24t + 1)} \Bigg).$$

输入指令 **minrur** $(f_{\langle\rangle}^{()}, \xi_2, [x, y, z], t)$, 我们获得 $f_{\langle\rangle}^{()}$ 关于 ξ_2 的如下最小值:

$$\min(f_{\langle\rangle}^{()} : \xi_2) = [3456z^2 - 1, -33/32, 0].$$

(2.2) 对于多项式 $f_{\langle 1\rangle}^{(\pm 1)} = \eta^6 - 2\eta^4 y^2 + y^6 - \eta^2 y^2 - yz^2 + 2z^4$, 计算 $f_{\langle 1\rangle}^{(1)}$ 的所有偏导数如下:

$$P_{\langle 1\rangle}^{(1)} := \{-4\eta^4 y + 6y^5 - 2\eta^2 y - z^2,\ -2yz + 8z^3\}.$$

关于字典序 $y \prec z$, 通过吴方法获得由 $P_{\langle 1\rangle}^{(1)}$ 所得的一组完全的升链: $\{C_5, C_6, C_7\}$, 其中 $C_5 := [y, z]$, $C_6 := [-2\eta^4 + 3y^4 - \eta^2, z]$, 且 $C_7 := [-16\eta^4 + 24y^4 - 8\eta^2 - 1, -4z^2 + y]$.

注意到, $\xi_5 := (t, 0, 0)$ 是 C_5 在 $\mathcal{R}$ 中的一个 RUR. 从而

$$\pi(\min(f_{\langle 1\rangle}^{(1)} : \xi_5)) = \pi(f_{\langle 1\rangle}^{(1)}(0, 0)) = \pi(\eta^6) = \infty.$$

输入指令 **rurc** $(C_6, [y, z])$, 我们获得 C_6 在 $\mathcal{R}$ 中如下 RUR:

$$\xi_6 := (3t^4 - 2\eta^4 - \eta^2, t, 0).$$

输入指令 **minrur** $(f_{\langle 1\rangle}^{(1)}, \xi_6, [y, z], t)$, 我们获得 $f_{\langle 1\rangle}^{(1)}$ 关于 ξ_6 的如下标准化最小值:

$$\pi(\min(f_{\langle 1\rangle}^{(1)} : \xi_6)) = -\infty.$$

根据算法 4.4, 我们有 $\inf f(\mathbb{R}^3) = -\infty$.

事实上, 通过解 $\xi_6 := (3t^4 - 2\eta^4 - \eta^2, t, 0)$, 我们有

$$f\left(\eta, \pm\sqrt[4]{\frac{2\eta^4 + \eta^2}{3}}, 0\right) = f_{\langle 1\rangle}^{(1)}\left(\pm\sqrt[4]{\frac{2\eta^4 + \eta^2}{3}}, 0\right) = \eta^6 - \frac{4\eta^5 + 2\eta^2}{9}\sqrt{6\eta^2 + 3}.$$

由此易见 $\lim_{\eta\to+\infty} f(\eta, \pm\sqrt[4]{\frac{2\eta^4+\eta^2}{3}}, 0) = -\infty$.

致谢 作者对审稿人的辛勤付出和有益建议深表谢意.

参考文献

1 Hägglöf K, Lindberg P O, Stevenson L. Computing global minima to polynomial optimization problems using Gröbner bases. J Global Optimization, 1995, 7: 115–125

2 Uteshev A Y, Cherkasov T M. The search for the maximum of a polynomial. J Symbolic Comput, 1998, 25: 587–618

3 Parrilo P A, Sturmfels B. Minimizing polynomial functions. In: Algorithmic and quantitative real algebraic geometry, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 60. Providence, RI: Amer Math Soc, 2003, 83–100

4 Hanzon B, Jibetean D. Global minimization of a multivariate polynomial using matrix methods. J Global Optimization, 2003, 27: 1–23

5 Nie J, Demmel J, Sturmfels B. Minimizing polynomials via sums of squares over the gradient ideal. Math Program Ser A, 2006, 106: 587–606

6 Guo F, Safey E I, Din M, et al. Global Optimization of Polynomials Using Generalized Critical Values and Sums of Squares. ISSAC, Munich, 2010

7 Wu W T. Mathematics Mechanization: Mechanical Geometry Theorem-Proving, Mechanical Geometry Problem-Solving and Polynomial Equations-Solving. Beijing/ Dordrecht-Boston-London: Science Press/Kluwer Academic Publishers, 2000

8 Prestel A. Lectures on Formally Real Fields. In: Lecture Notes in Math, vol. 1093. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1984

9 Lam T Y. The Theory of Ordered Fields. In: Lecture Notes in Pure and Appl Math, vol. 55. New York: M. Dekker, 1980

10 Mishra B. Algorithmic Algebra, Texts and Monographs in Computer Science. New York-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1993
11 Bochnak J, Coste M, Roy M F. Real Algebraic Geometry. New York-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1998
12 曾广兴, 肖水晶. 由吴方法计算零维系统的有理单元表示. 中国科学: 数学, 2010, 40: 999–1016
13 Basu S, Pollack R, Roy M F. Algorithms in Real Algebraic Geometry, Algorithms and Computation in Math 10. Berlin: Springer-Verlag, 2003
14 Zeng G X, Zeng X N. An effective decision method for semidefinite polynomials. J Symbolic Comput, 2004, 37: 83–99
15 Knebusch M. On the extension of real places. Comment Math Helv, 1973, 48: 354–369
16 Gallo G, Mishra B. Effective algorithms and bounds for Wu-Ritt characteristic sets. In: Mora T and Traverso C, eds. Effective Methods in Algebraic Geometry. Boston: Birkhäuser, 1991, 119–142
17 Heck A. Introduction to Maple. New York-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1993
18 Zeng G X. The software **RRUR**. In: shengaozhuanjia@163.com. password: shengao2010

Algorithms for computing the global infimum and minimum of a polynomial function

XIAO ShuiJing & ZENG GuangXing

Abstract By catching the so-called strictly critical points, this paper presents an effective algorithm for computing the global infimum of a polynomial function. For a multivariate real polynomial f, the algorithm in this paper is able to decide whether or not the global infimum of f is finite. In the case of f having a finite infimum, the global infimum of f can be accurately coded as $(h; a, b)$, where h is a real polynomial in one variable, a and b is two rational numbers with $a < b$, and $(h; a, b)$ stands for the only real root of h in the open interval $]a, b[$. Another usage of our algorithm is to decide whether or not the infimum of f is attained when the global infimum of f is finite. In the design of our algorithm, the well-known Wu's method plays an important role.

Keywords: polynomial optimization, global infimum, global minimum, strictly critical point, transfer principle, Wu's method, rational univariate representation
MSC(2000): 68W30, 12F10
doi: 10.1360/012010-977