

斜压大气中连续谱动力学理论及运用*

—— I. 连续谱动力学理论

曾庆存 任舒展

(LASG, 中国科学院大气物理研究所, 北京 100080)

摘要 讨论球面准地转分层模型中连续谱动力学的理论框架, 包括: 从数学上严格地指出了支配方程中存在连续谱和离散谱两类性质不同的解; 给出了连续谱和离散谱的分布范围; 得到关于离散谱的“广义正交性原理”. 并利用支配方程中存在的位涡拟能及准动量守恒性, 给出了连续谱能量增长上限的估计式. 对连续谱空间结构的演化作了定性的讨论, 并给出扰动槽脊演化的几何图象.

关键词 连续谱 离散谱 斜压大气

30 多年前, Case^[1] 首次明确指出, 无粘正压流体存在一类与传统使用的离散谱性质完全不同的解——连续谱解. 遗憾的是, 由于连续谱具有随时间趋于无穷大时趋于零的性质, 致使它在传统流体力学理论中长期受到忽视. 尽管在地球流体力学领域, Burger^[2], Pedlosky^[3] 等先后研究过 Charney 和 Eady 模型中扰动的完备性问题, 但连续谱在地球流体力学中的地位仍未受到应有的重视.

最近的研究逐渐揭示出连续谱的另一重要性质, 即在合适的初条件下, 连续谱的振幅和能量的增长都比不稳定的离散谱的增长远为显著, 这一性质使人们的兴趣又逐渐转移到连续谱的研究上来.

曾庆存^[4~6] 在一系列工作的基础上指出, 在实际大气环流中, 连续谱对应的扰动能量以及扰动的涌动量传输占了主导地位. 正是连续谱扰动维持了基本西风环流. 这就是曾庆存关于“连续谱扰动滋养西风”的思想. 在曾庆存的指导下, 张明华^[1] 从理论和数值计算方面更细致地对正压准地转模型中的连续谱进行了研究, 指出了曾庆存的思想在该模型中的正确性.

由于实际大气环流具有明显的斜压性, 因而要进一步证实曾庆存关于“连续谱扰动滋养西风”的思想, 就必须研究斜压大气中的谱问题. 鉴于斜压准地转模型在数学上远较正压模型复杂, 我们选择斜压准地转两层模型作为研究对象. 该模型的优点在于能较真实地反映出大气环流的正压和斜压特性, 而且在数学上易于处理. 为了便于后面数值格式的设计, 所有支

1994-06-06 收稿, 1995-01-24 收修改稿

* 国家自然科学基金重大资助项目

1) 张明华. 大气动力学中的连续谱及其在大气环流中的重要地位. 中国科学院大气物理研究所博士论文, 1987

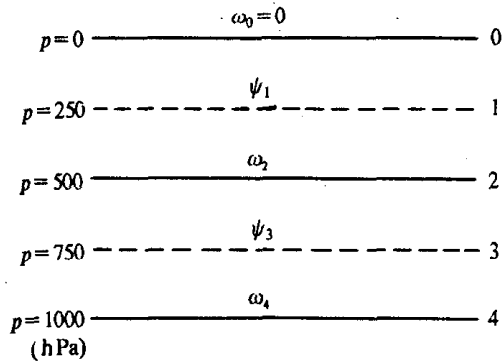


图 1 Phillips 模型示意图

配方程均在球坐标下写成. 由于讨论的问题较多, 本文分两部分. 第一部分是有关理论问题的研究, 第二部分是有关的数值计算.

在第一部分中, 我们首先讨论二层准地转大气模型中解的性质, 从数学上指出该模型中存在的连续谱和离散谱的分布范围, 然后讨论稳定性问题以及“广义正交性原理”, 并利用该原理得到有关解的展开定理. 最后利用方程的一些守恒性质讨论连续谱能量增长上限以及连续谱扰动的空间结构的演化形式.

1 模型和支配方程

为反映出大气环流的斜压性质, 模型在垂直方向上至少需要两层数据. 如图 1 所示, 我们将大气在垂直方向上分成 4 层, 第 0 层和第 4 层为上、下边层, 将涡度方程写在第 1 层和第 3 层上. 大气的斜压性可近似地由第 1 层和第 3 层的流函数差表示出来. 在球坐标系下, 该模型的支配方程可以写成如下形式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\partial_t + \bar{u}_1(\theta) \frac{\partial}{a \sin \theta \partial \varphi} \right) \left[\frac{1}{a^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \psi_1}{a^2 \sin^2 \theta \partial \varphi^2} - F(\psi_1 - \psi_2) \right] - \\ \frac{\partial \psi_1}{a \sin \theta \partial \varphi} \frac{\partial}{a \partial \theta} \bar{e}_1 = 0, \\ \left(\partial_t + \bar{u}_2(\theta) \frac{\partial}{a \sin \theta \partial \varphi} \right) \left[\frac{1}{a^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \psi_2}{a^2 \sin^2 \theta \partial \varphi^2} - F(\psi_2 - \psi_1) \right] - \\ \frac{\partial \psi_2}{a \sin \theta \partial \varphi} \frac{\partial}{a \partial \theta} \bar{e}_2 = 0, \\ \partial \varphi \psi_i(\theta, \varphi)|_{\theta=0} = \partial \varphi \psi_i(\theta, \varphi)|_{\theta=\pi=0} \quad (i=1, 2), \end{array} \right. \quad (1.1)$$

此处, $\bar{e}_i = 2\Omega a \cos \theta - F(-1)^{i+1}(\psi_1 - \psi_2) + \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \bar{u}_i(\theta))$ 为基本位涡, Ω 为地球自转角速度, a 为地球半径, $\bar{u}_i$ 为第 i 层上纬向平均流.

令 $y = \cos \theta$, 方程组 (1.1) 可写成如下形式:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t + \bar{\lambda}_1 \partial \varphi) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) + \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \varphi^2} - F(\psi_1 - \psi_2) \right] + \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} \bar{e}_1 = 0, \\ (\partial_t + \bar{\lambda}_2 \partial \varphi) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \varphi^2} - F(\psi_2 - \psi_1) \right] + \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} \bar{e}_2 = 0, \\ \psi_{i\varphi}(1, \varphi) = \psi_{i\varphi}(-1, \varphi) = 0, \end{array} \right. \quad (1.2)$$

此时, $\bar{e}_i = 2\Omega ay - (-1)^{i+1} F(\psi_1 - \psi_2) + \frac{\partial}{\partial y} (\eta \bar{\lambda}_i)$, $\bar{\lambda}_i = \bar{u}_i(\theta)/a \sin \theta$, $\eta = 1 - y^2$.

方程 (1.2) 中的 F 不同于 (1.1) 式中的 F , 但我们仍沿用 (1.1) 中的符号. 在两极处 ($y = \pm 1$), $\sin \theta \rightarrow 0$, 为了避免发散情况, 我们假设 $\lim_{\theta \rightarrow 0, \pi} \bar{\lambda}_i \rightarrow \text{常数}$.

假设方程组 (1.2) 中 Normal Mode 具有如下形式:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \exp [im(\varphi - ct)].$$

此处 m 为纬向波数, 则方程组 (1.2) 又可写成:

$$\begin{cases} (\bar{\lambda}_i - c) \left[\partial_y (\eta \partial_y \varphi_i) - \frac{m^2}{\eta} \varphi_i - (-1)^{i+1} F(\varphi_1 - \varphi_2) \right] + \varphi_i \bar{e}_{iy} = 0, \\ \varphi_i(1) = \varphi_i(-1) = 0 \quad (i=1, 2). \end{cases} \quad (1.3)$$

方程组 (1.2) 和 (1.3) 是我们以下讨论的出发方程.

2 半圆定理

传统流体力学中由于不存在中性 Normal Mode, 半圆定理常被用于估计不稳定 Normal Mode 的分布范围. 在地球流体力学中, 由于引入了科氏因子, 使中性 Normal Mode (即传统的 Rossby-Hauwitz 波) 的存在成为可能. 在以下的研究中, 我们着重研究中性 Normal Mode 的存在范围.

首先假设 $\varphi_i = N_i/(\bar{\lambda}_i - c)$, 并将之代入到方程组 (1.3), 经过一系列的运算后又可得到:

$$\begin{cases} (\eta \bar{w}_1^2 N_1')' - \frac{m^2}{\eta} \bar{w}_1^2 N_1 - F(\bar{w}_1^2 N_1 - \bar{w}_1 \bar{w}_2 N_2) + F(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) \bar{w}_1 N_1 + \\ \quad (\beta - \eta' \bar{\lambda}_1' - \eta'' \bar{\lambda}_1'') \bar{w}_1 N_1 = 0, \\ (\eta \bar{w}_2^2 N_2')' - \frac{m^2}{\eta} \bar{w}_2^2 N_2 - F(\bar{w}_2^2 N_2 - \bar{w}_1 \bar{w}_2 N_1) + F(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1) \bar{w}_2 N_2 + \\ \quad (\beta - \eta' \bar{\lambda}_2' - \eta'' \bar{\lambda}_2'') \bar{w}_2 N_2 = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

这里 $\bar{w}_i = \bar{\lambda}_i - c$, “'”表示对 y 进行微分. 对方程组 (2.1) 进行积分运算并使用边条件后即可得到如下积分关系:

$$\sum_{i=1}^2 \int dy \int \eta \bar{w}_i^2 |N_i'|^2 + \eta^{-1} m^2 |N_i|^2 \bar{w}_i^2 + F \bar{w}_1 \bar{w}_2 |N_1 - N_2|^2 = \sum_{i=1}^2 \int dy \bar{w}_i (\beta + 2y \bar{\lambda}_i' + 2\bar{\lambda}_i) |N_i|^2. \quad (2.2)$$

先讨论中性 Normal Mode 的分布范围. 此时 c 的虚部 $c_i = 0$, 并且注意到 $\bar{\lambda}_i \neq c$, 由 (2.2) 式有

$$\sum_{i=1}^2 \left[\int dy (\bar{\lambda}_i - c)^2 p_i \right] + \int dy F(\bar{\lambda}_1 - c)(\bar{\lambda}_2 - c) |N_1 - N_2|^2 = \sum_{i=1}^2 \int dy (\bar{\lambda}_i - c) \bar{\beta}_i |N_i|^2, \quad (2.3)$$

这里, $p_i = \eta |N_i'|^2 + \frac{m^2}{\eta} |N_i|^2$, $\bar{\beta}_i = \beta + 2y\bar{\lambda}_i' + 2\bar{\lambda}_i$. 从 β_i 的量级可以分析出 $\bar{\beta}_i > 0$, 并且在实际大气中 $\bar{\lambda}_1(y) > \bar{\lambda}_2(y)$, c 可能只有两种分布: $c > \bar{\lambda}_{1\max}$ 或 $c < \bar{\lambda}_{2\min}$. 对第一种情况而言, 由于 $F(\bar{\lambda}_1 - c) \cdot (\bar{\lambda}_2 - c) > 0$, 但 $\bar{\lambda}_1 - c < 0$, 因此, (2.3) 式不能成立. c 的可能分布范围为 $c < \bar{\lambda}_{2\min}$.

在以上的分析中, $\bar{\lambda}_i \neq c$ 这一条件曾被反复使用.

$$\text{从 } \sum_{i=0}^2 \int dy (\bar{\lambda}_i - c) [(\bar{\lambda}_i - c) - \bar{\beta}_i |N_i|^2 / p_i] p_i \leq 0 \text{ 可知, 必须有: } c > \bar{\lambda}_{2\min - \max} < \bar{\beta}_{1\max}, \bar{\beta}_{2\max} / (m^2 + x^2), \quad (2.4)$$

此处 x^2 为 Legendre 方程对应的最小正特征值. 最后我们得到

$$\bar{\lambda}_{2\min} > c > \bar{\lambda}_{2\min} - \frac{\max(\bar{\beta}_{1\max}, \bar{\beta}_{2\max})}{m^2 + x^2}, \quad (2.5)$$

(2.5) 式就是中性 Normal Mode 的分布范围. 从 (2.5) 式还可看出, 地球表面的弯曲效应也影响了中性 Normal Mode 的分布范围. 当 m 增大时, 中性 Normal Mode 分布范围迅速减小.

当方程组 (1.3) 存在有不稳定的 Normal Mode 时, 使用常规方法可以得到如下关于 c 的分布的半圆定理:

$$\left[c_r - \frac{1}{2} (\bar{\lambda}_{1\max} + \bar{\lambda}_{2\min}) \right]^2 + c_i^2 \leq \left(\frac{\bar{\lambda}_{1\max} - \bar{\lambda}_{2\min}}{2} \right)^2 + \frac{(\bar{\lambda}_{1\max} - \bar{\lambda}_{2\min}) \max(\bar{\beta}_{1\max}, \bar{\beta}_{2\max})}{2(m^2 + x^2)}. \quad (2.6)$$

同时, 我们也可顺便给出关于最不稳定的 Normal Mode 增长率的估计值为^[7]

$$mc_i \leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\bar{\lambda}_i}{dy} \right)_{\max} + \frac{mF|\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2|_{\max}}{m^2 + x^2} \right].$$

3 模型中的谱问题

将方程组 (1.2) 中的扰动流函数 ψ_1 和 ψ_2 , 用扰动位涡 q_1 和 q_2 表示出来后, 我们就可以得到两个关系 q_1, q_2 的方程. 利用泛函分析中的知识我们就可以知道关于方程组谱的分类情况. 从 (1.2) 式有

$$q_i = \nabla^2 \psi_i - (-1)^{i+1} F(\psi_1 - \psi_2) \quad (i=1, 2), \quad (3.1)$$

这里 ∇^2 为球面 Laplace 算子, $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial y} \eta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}$. 通过引入变量 $q_m = q_1 + q_2$, $q_T = q_1 - q_2$, $\psi_m = \psi_1 + \psi_2$, $\psi_T = \psi_1 - \psi_2$ 后, (3.1) 式可写成

$$q_m = \nabla^2 \psi_m, \quad q_T = (\nabla^2 - 2F) \psi_T. \quad (3.2)$$

通过反解 (3.2) 式, 我们可以得到关于 φ_m 和 φ_T 的表达式如下:

$$\begin{aligned} \psi_m &= \int dy' G_m(y, y') q_m(Y') = \hat{k}_m q_m, \\ \psi_T &= \int dy' G_T(Y, Y') q_T(Y') = \hat{k}_T q_T, \end{aligned}$$

$\hat{k}_m, \hat{k}_T$ 为积分算子. 最后我们得到关于 ψ_1 和 ψ_2 的表达式:

$$\psi_1 = \hat{k}_1 q_1 + \hat{k}_2 q_2, \quad \psi_2 = \hat{k}_2 q_1 + \hat{k}_1 q_2, \quad (3.3)$$

式中, $\hat{k}_1 = \hat{k}_m + \hat{k}_T, \hat{k}_2 = \hat{k}_m - \hat{k}_T$. 将 (3.3) 式代回到 (1.2) 式后有:

$$\begin{cases} -cq_1 + \bar{\lambda}_1 q_1 + \bar{e}_{1y} \hat{k}_1 q_1 = -\bar{e}_{1y} \hat{k}_2 q_2, \\ -cq_2 + \bar{\lambda}_2 q_2 + \bar{e}_{2y} \hat{k}_1 q_2 = -\bar{e}_{2y} \hat{k}_2 q_1. \end{cases} \quad (3.4)$$

由泛函分析中有关定理^[9]可知, 由于 (3.4) 式中 $\bar{e}_{1y}, \bar{e}_{2y}$ 为厄密算子, $\hat{k}_1$ 和 $\hat{k}_2$ 为全连续算子, 故 q_1 和 q_2 存在连续谱和 Normal Mode¹⁾

$$C_c = \{C_c | C_c \in (\bar{\lambda}_{2\min}, \bar{\lambda}_{1\max})\}, \quad (\text{连续谱})$$

$$C_d = \{C_d | C_d \in \Omega_1 + \Omega_2\}, \quad (\text{离散谱})$$

其中 $\Omega_1 \in \left(\bar{\lambda}_{2\min}, \bar{\lambda}_{2\min} - \frac{\max(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)}{m^2 + x^2} \right)$, 当 $\bar{e}_{1y}$ 和 $\bar{e}_{2y}$ 恒号时, $\Omega_2 \in \emptyset$ (空集); 当 $\bar{e}_{1y}$ 和 $\bar{e}_{2y}$ 在流域内不恒号时, Ω_2 可能为一复平面, 该复平面由 (2.8) 式确定.

4 稳定性问题及广义正文性原理

对于两个具有不同波数 m, m' 的扰动而言, 方程组 (1.3) 中的第一个方程分别为

$$\begin{cases} (\bar{\lambda}_1 - C_m) q_{1m} + \bar{e}_{1y} \psi_{1m} = 0, \\ (\bar{\lambda}_1 - C_{m'}) q_{1m'} + \bar{e}_{1y} \psi_{1m'} = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

对上述方程进行一些数学运算后有

$$(C_{m'} - C_m) \int dy q_{1m} q_{1m'} / \bar{e}_{1y} + \int dy (q_{1m} \phi_{1m'} - q_{1m'} \phi_{1m}) = 0, \quad (4.2)$$

同样, 对于 (1.3) 式中第二个方程亦有

$$(C_{m'} - C_m) \int dy q_{2m} q_{2m'} / \bar{e}_{2y} + \int dy (q_{2m} \phi_{2m'} - q_{2m'} \phi_{2m}) = 0, \quad (4.3)$$

将以上两方程相加后有

$$(C_{m'} - C_m) \int dy \sum_{i=1}^2 q_{im} q_{im'} / \bar{e}_{iy} = 0. \quad (4.4)$$

当 $C_m \neq C_{m'}$ 时

$$\int dy \sum_{i=1}^2 q_{im} q_{im'} / \bar{e}_{iy} = 0.$$

1) 实际上, q_1 和 q_2 还可能是另一类称之为残谱的解. 这里我们将它归于 C_c 内.

$$\partial_t \int dy \sum_{i=1}^2 \overline{q_i^2} / \overline{e_{iy}} + \int dy \sum_{i=1}^2 \overline{q_i \partial \varphi \psi_i} = 0. \quad (5.2)$$

由 q_i 的定义及边条件不难知道, (5.2) 式中左边第二项为零, 这样, 我们就证明了位涡拟能守恒.

5.2 准动量守恒

准动量守恒的表达式为

$$\partial_t \int dy \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\overline{\eta(\partial_y \psi_i)^2 + \frac{1}{\eta} (\partial \varphi \psi_i)^2} + F(\psi_1 - \psi_2)^2 \right] - \sum_{i=1}^2 \frac{\overline{\lambda_i}}{\overline{e_{iy}}} \overline{q_i^2} \right\} = 0. \quad (5.3)$$

证明如下:

分别用 ψ_1 和 ψ_2 乘方程组 (1.2) 中的两个方程积分所得之方程, 并利用边条件后再将该两方程相加可得

$$\partial_t \int dy \sum_{i=1}^2 \left[\overline{\eta(\partial_y \psi_i)^2 + \frac{1}{\eta} (\partial \varphi \psi_i)^2} + F(\psi_1 - \psi_2)^2 \right] = - \sum_{i=1}^2 \int dy \overline{\lambda_i \partial_y (\eta \psi_{i\varphi} \psi_{iy})}. \quad (5.4)$$

由 q_i 的表达式不难证明

$$\sum_{i=1}^2 \overline{\lambda_i q_i \psi_{i\varphi}} = \sum_{i=1}^2 \overline{\lambda_i \eta^{-1} \partial \varphi [\psi_i \partial \varphi \psi_i] + \lambda_i \partial_y (\partial \varphi \psi_i \partial_y \psi_i)},$$

所以

$$\int dy \sum_{i=1}^2 \overline{\lambda_i q_i \partial \varphi \psi_i} = \int dy \sum_{i=1}^2 \overline{\lambda_i \partial_y (\partial \varphi \psi_i \partial_y \psi_i)},$$

而由 (1.2) 式

$$\int dy \sum_{i=1}^2 \overline{\lambda_i q_i \partial \varphi \psi_i} = \partial_t \int dy \sum_{i=1}^2 \frac{\overline{\lambda_i}}{\overline{e_{iy}}} \overline{q_i^2}, \quad (5.5)$$

结合 (5.3) 和 (5.4) 式即可证明准动量守恒.

为了估计连续谱能量增长的上限, 还须证明一个以下不等式:

$$\int dy \sum_{i=1}^2 \overline{\eta(\nabla \psi_i)^2 + F(\psi_1 - \psi_2)^2} \leq \frac{1}{k_0^2} \int dy \sum_{i=1}^2 \overline{q_i^2},$$

证明如下:

$$\text{令 } \lambda = \int dy \sum_{i=1}^2 \overline{q_i^2} / \int dy \sum_{i=1}^2 \overline{\eta(\nabla \psi_i)^2 + F(\psi_1 - \psi_2)^2},$$

对上式使用变分法后可得

$$\nabla^2 \overline{\psi_1} - F(\overline{\psi_1} - \overline{\psi_2}) = \lambda \overline{\psi_1}, \quad \nabla^2 \overline{\psi_2} - F(\overline{\psi_2} - \overline{\psi_1}) = \lambda \overline{\psi_2}.$$

将以上两式分别相加和相减后可得到如下两个变形方程:

$$\nabla^2 \overline{\varphi}_m^\varphi = \lambda \overline{\varphi}_m^\varphi, \quad (\nabla^2 - 2F) \overline{\psi}_T^\varphi = \lambda \overline{\psi}_T^\varphi,$$

这里, $\overline{\psi}_m^\varphi = (\overline{\psi}_1 + \overline{\psi}_2)^\varphi / 2$, $\overline{\psi}_T^\varphi = (\overline{\psi}_1 - \overline{\psi}_2)^\varphi$.

在满足 Quervain 边条件下, 上述两方程皆存在最小正特征值. 假设两个最小正特征值中较大者为 $k_0^2 (= m^2 + x^2)$ 则上述不等式得证. 有了位涡拟能守恒和上述不等式, 我们就可以估计出纯粹连续谱能量增长上限.

如果模型中基流稳定, 则 $\overline{e}_{iy}$ 在流域内恒号, 线性化模型中仅存在连续谱和中性的 Normal Mode, 因此模型中的能量增长肯定对应于连续谱的能量增长.

由位涡拟能守恒有

$$\int dy \sum_{i=1}^2 \overline{q_i^2(\varphi, y, t)}^\varphi / \overline{e}_{iy} = \int dy \sum_{i=1}^2 \overline{q_i^2(\varphi, y, 0)}^\varphi / \overline{e}_{iy},$$

所以有

$$\frac{1}{\max(|\overline{e}_{1y}|, |\overline{e}_{2y}|)} \int dy \sum_{i=1}^2 \overline{q_i^2(\varphi, y, t)}^\varphi \leq \int dy \sum_{i=1}^2 \overline{q_i^2(\varphi, y, 0)}^\varphi \overline{e}_{iy} \leq \frac{1}{\min(|\overline{e}_{1y}|, |\overline{e}_{2y}|)} \int dy \sum_{i=1}^2 \overline{q_i^2(\varphi, y, 0)}^\varphi,$$

由此 $\int dy \sum_{i=1}^2 \overline{q_i^2(\varphi, y, t)}^\varphi \leq \frac{\max(\overline{e}_{1y}, \overline{e}_{2y})}{\min(\overline{e}_{1y}, \overline{e}_{2y})} \int dy \sum_{i=1}^2 \overline{q_i^2(\varphi, y, 0)}^\varphi$. 利用上面得到的不等式, 我们最后得到关于纯粹连续谱能量的增长上限为

$$\frac{1}{2} \int dy \sum_{i=1}^2 (\nabla \psi_i)^2 + F(\psi_1 - \psi_2)^2 \leq \frac{1}{2k_0^2} \frac{\max(\overline{e}_{1y}, \overline{e}_{2y})}{\min(\overline{e}_{1y}, \overline{e}_{2y})} \int dy \sum_{i=1}^2 \overline{q_i^2}^\varphi(\varphi, y, 0),$$

由此可见, 连续谱能量增长上限不仅依赖于基本场的分布, 同时还依赖于初始扰动的结构. 假设上、下层的初始扰动分别为 $\psi_i = A_i \sin l \pi y \cos m \pi \varphi$, 则连续谱能量增长上限正比于

$$\frac{[l^2 \pi^2 + m^2 \pi^2]^2}{x^2 + m^2 \pi^2} \xrightarrow{l \text{ 较大时}} \left(\frac{l}{m} \right)^2,$$

x^2 的定义同前. 这和正压准地转模式的结论相同^[11].

5.4 连续谱空间结构的演化

由于数学上的困难, 我们很难求得两层准地转模式中连续谱的解析表达式, 通常采用的方法是数值计算, 有时也采用波包的概念对连续谱的演化进行描述. 这里, 我们利用准动量守恒对连续谱的空间结构的演化进行描述.

不失一般性, 对于稳定的基流, 假设 $\overline{\lambda}_i / \overline{e}_{iy}$ 恒负, 则准动量守恒的表达式可写成为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dy \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\eta (\partial y \psi_i)^2 + \frac{1}{\eta} (\partial \varphi \psi_i)^2 + F(\psi_1 - \psi_2)^2 \right] + \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\overline{\lambda}_i}{\overline{e}_{iy}} \right| \overline{q_i^2}^\varphi \right\} = 0,$$

近似地, $\partial\phi\psi_i \sim m\hat{\psi}_i$, $\partial y\psi_i \sim n(t)\hat{\psi}_i$. 假设在初始时候, 连续谱能量增加, 则 $\hat{\psi}_i$ 随时间增加, 为了满足上述守恒性, $n(t)$ 必须随时间减少. 当连续谱能量增加到最大值后, $\hat{\psi}_i$ 开始随时间减小, 此时 $n(t)$ 必须随时间增加以使上述守恒式成立. 同样, 对于 $\bar{\lambda}_i/\bar{e}_{iy}$ 恒负的情况, 当 $\hat{\psi}_i$ 随时间增加时, 如果 $n(t)$ 亦随时间增加, 由于 $\bar{q}_i^2$ 中 $n(t)$ 是以 4 次幂形式增加的, 因此上述守恒关系不能成立, 故 $n(t)$ 必须随时间减少. 当 $\hat{\psi}_i$ 达到最大值后, 根据同样的原因, $n(t)$ 必须随时间增加以维持上述守恒关系. 大量的数值计算也证实了上述结论¹⁾.

6 结论

在以上各节中, 我们指出了两层准地转模型中存在连续谱和离散谱两类形式, 并从理论上指出了它们的分布范围. 得到的“广义正交性原理”给出了分解连续谱和 Normal Mode 的具体方法, 这对后面的数值计算具有指导意义. 在第二部分的数值计算中, 由于将支配方程离散化, 所有的连续谱均被歪曲成离散谱, 从直观上, 我们不太容易区分出连续谱和中性 Normal Mode, 然而我们可以通过利用半圆定理将这二者区分出来后, 再利用“广义正交性原理”直接计算谱展开系数, 这样可以大大节约计算时间.

有了关于纯粹连续谱能量增长上限的估计后, 我们可以从初始扰动的形式判断出连续谱的增长程度. 由于在实际大气环流中, 连续谱扰动占支配地位, 因此上述方法也具有实际的气象意义: 即通过分析天气系统的槽脊分布来判断它的发展趋势. 有趣的是, 即使模型中存在不稳定的 Normal Mode, 上述结论仍然有效.

值得指出的是, 连续谱的概念不仅存在于准地转模型中, 也存在于其它线性化大气运动方程中 (正压原始方程^[11], Taylor-Goldstein 方程等). 此外, 在统计物理中, 上述概念在 Boltzman 输运方程中也大量地被运用^[12].

参 考 文 献

- 1 Case K M. Stability of inviscid plane Couette flow. *Phy. Fluids*, 1960, (3): 143 ~ 146
- 2 Burger A P. Instability associated with the Continuous spectrum in a baroclinic flow. *J Atmos Sci*, 1966, 23: 272 ~ 277
- 3 Pedlosky J. An initial Value problem in the theory of baroclinic stability. *Tellus*, 16, 12-A, 1964
- 4 卢佩生, 卢理, 曾庆存. 正压准地转模式的谱和扰动的演变. *中国科学, B 辑*, 1986, (11): 1 225 ~ 1 233
- 5 Ztny C C, Lu P S, Li R F *et al.* Evolution of large scale disturbances and their interactions with meanflow in a rotating atmosphere advance. *Atmos Sci, Part (I)*, 1986, 13(1): 39 ~ 58; *Part(II)*, 1986, 13(2): 171 ~ 188
- 6 Zeng Q C. The evolution of Rossby wave packets in a three-dimensional baroclinic atmosphere. *J Atmos Sci*, 1983, 40: 73 ~ 84
- 7 Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics*. New York: Springer-Verlag, 1989
- 8 Zhang M H. A computation and analysis of atmospheric spectral by using linearized barotropic Uorticity equation. *Proceddings of the Interational Conference on Fluid Mechanics*, July 1—4, Beijing, China, Supplement 1—5, 1987
- 9 Richrmyer R D. *Principle of Advaced Mathematical Physics*, Vol 1. New York: Springer-Verlag, 1978
- 10 曾庆存. 数值天气预报中的数学物理基础. 北京: 科学出版社, 1979
- 11 曾庆存, 李荣凤, 张 钻. 旋转二维可压缩流动的谱和特征函数 —— (II) 谱和谱函数结构的分析. *大气科学*, 1991, 15(1)
- 12 霍裕平, 郑久仁. 非平衡态统计理论. 北京: 科学出版社, 1987. 393

1) 任舒展. 连续谱动力学理论及其在大气环流中的重要应用. 中国科学院大气物理研究所博士论文, 1993