科学通报
第41卷 第8期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1996年4月

具有双幂型临界点的单峰映射的光滑共轭分类*

章梅荣
(清华大学应用数学系，北京 100084)

关键词 光滑共轭 不变量 双幂型临界点 单峰映射

对不具有临界点的离散动力系统研究光滑共轭问题的历史已经比较久长，见文献[1～4]. Sullivan[5]在研究 Feigenbum 现象时提出的核心问题之一是要对单峰映射族给出光滑共轭分类，Jiang[6,7]在这方面取得了较大的进展．本文拟在文献[7]的基础上，采用奇异的坐标变换，对一类具有双幂型临界点的单峰映射给出光滑共轭分类．值得指出的是：文献[7]中对特殊系统引进的反称量(asymmetry)是局部共轭不变量，而本文中对一般系统引进的双反称量(bi-asymmetry)却是整体共轭不变量．

设 f 是一维映射，f 的临界点 c(即 $f'(c)$ 不存在或者 $f'(c)=0$) 称为双幂型的，若有实数 γ_-, $\gamma_+\geqslant 1$ 使得

$$\lim_{x\to c-} -\frac{f'(x)}{|x-c|^{\gamma_- -1}}=B_- \text{ 与 } \lim_{x\to c+} +\frac{f'(x)}{|x-c|^{\gamma_+ -1}}=B_+$$

均有非零极限，而 $\gamma=(\gamma_-, \gamma_+)$ 称为该点的双指数．经简单的局部计算可知，双指数是 C^1 局部共轭的不变量；对幂型临界点 (即 $\gamma_-=\gamma_+$)，其反称量 $A=B_-/B_+$ 也是局部不变量．结合周期点处的特征，值这些平凡的不变量，Jing[2] 对一类具幂型临界点的单峰映射给出了 $C^{1+\varepsilon}$ 共轭分类．

记区间 $I=[-1, 1]$, $I_-=[-1, 0]$ 及 $I_+=[0, 1]$. 对 $\gamma=(\gamma_-, \gamma_+)$, $\gamma_\pm\geqslant 1$, 令

$$\rho_\gamma(x)=b_\pm(1-x^2)^{1/\gamma_\pm -1},\ x\in I_\pm,$$

并由下式定义出 I 上的一个奇异坐标变换 $y=h_\gamma(x)$:

$$h_\gamma(x)=-1+\int_{-1}^{x}\rho_\gamma(x)\mathrm{d}x,\ x\in I,$$

其中常数 $b_\pm$ 由下述关系式唯一决定:

$$h_\gamma(0)=0,\ h_\gamma(1)=1.$$

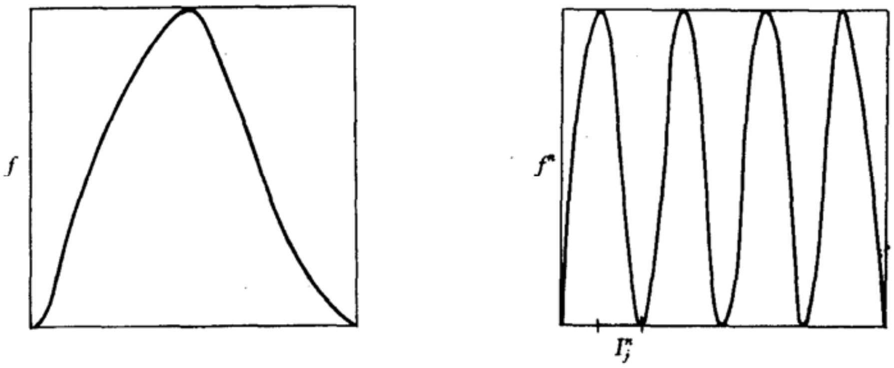
引理 1(基本性质) (1)h_γ 是 I 的自同胚; (2)h_γ 在$(-1, 0)\cup(0, 1)$上是微分同胚，(3) h_γ, h_γ^{-1} 在 $I_\pm$ 上分别是 $1/\gamma_\pm-$, 1-Hölder(连续的).

现设映射 f: $I\to I$ 满足下述条件:

(T1) $f(\pm 1)=-1$, $f(0)=1$;

1995-02-27 收稿，1995-09-01 收修改稿
* 国家自然科学基金与清华大学基础科学研究基金资助项目

(T2) f 连续, $f|I_\pm$ 是 C^1 的, f 在 I 上有唯一的临界点 0 且是双幂型的 (见图 1(a)).



(a) (b)

图 1

条件 (T1), (T2) 是指 f 是单峰映射, 并且峰点与左右端点分别在最高与最低处. 至于峰点的水平位置居中在共轭的意义下并非是本质的.

引理 2(“磨尖”性质) 设 f 满足 (T1), (T2), 记 $\gamma=(\gamma_-, \gamma_+)$ 是 f 在 0 点的双指数, 则 f 在奇异变换 $y=h_\gamma(x)$ 下的表示 $\widetilde{f}=h_\gamma\circ f\circ h_\gamma^{-1}$ 仍满足 (T1), (T2), 并且 $\widetilde{f}$ 的双指数是 $\widetilde{\gamma}=(1, 1)$. 又若 $R_\pm(x)=f'(x)/|x|^{\gamma_\pm-1}$ 在 $I_\pm$ 上是 ε-Hölder, 则 $\widetilde{f}'$ 在 $I_\pm$ 上也是 ε-Hölder.

证 显然 $\widetilde{f}$ 在 $(-1, 0)\cup(0, 1)$ 上是 C^1 的且有非零导数. 设 $y\notin\{\pm1, 0\}$, 则 $x=h_\gamma^{-1}(y)\notin\{\pm1, 0\}$, 并且

$$\widetilde{f}'(y)=f'(x)\left(\frac{1-f(x)^2}{1-x^2}\right)^{1/\gamma_\pm-1},\ y\in\operatorname{int}(I_\pm). \tag{1}$$

设 $0<y\ll1$, 则 $0<x\ll1$ 并且 $f(x)\approx1$. 因 $f'(x)\approx B_+x^{\gamma_+-1}$, 固知

$$f(x)-f(0)=f(x)-1\approx\frac{B_+}{\gamma_+}\ x^{\gamma_+}.$$

于是从 (1) 式即得出

$$\begin{aligned}\widetilde{f}'(y)=f'(x)\left(\frac{1+f(x)}{1-x^2}\right)^{1/\gamma_+-1}(1-f(x))^{1/\gamma_+-1}\approx\\ (B_+x^{\gamma_+-1})2^{1/\gamma_+-1}\left(\frac{-B_+}{\gamma_+}\ x^{\gamma_+}\right)^{1/\gamma_+-1}=\\ -\varphi(\gamma_+)(-B_+)^{1/\gamma_+},\end{aligned}$$

其中函数 φ 为

$$\varphi(t)=\left(\frac{t}{2}\right)^{1-1/t}.$$

因此

$$\widetilde{f}'(0+)=\lim_{y\to0+}\widetilde{f}'(y)=-\varphi(\gamma_+)(-B_+)^{1/\gamma_+}$$

存在并且非零. 同理可知 $\widetilde{f}'(0-)=\varphi(\gamma_-)(B_-)^{1/\gamma_-}\neq0$.

现考虑 $\widetilde{f}'(1-)$. 设 $y\to 1$, 则 $x\to 1$ 且 $f(x)\to -1$. 因此从(1)式知

$$\widetilde{f}'(y)=f'(x)\left(\frac{1-f(x)}{1+x}\right)^{1/\gamma_+-1}\left(-\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)^{1/\gamma_+-1}\to$$
$$f'(1)\cdot 1\cdot(-f'(1))^{1/\gamma_+-1}=-|f'(1)|^{1/\gamma_+},$$

故 $\widetilde{f}'(1)=-|f'(1)|^{1/\gamma_+}\neq 0$ 存在. 同理 $\widetilde{f}'(-1)=(f'(-1))^{1/\gamma_-}\neq 0$. 对 $\widetilde{f}'$ 的 Hölder 连续性,参见引理 3 的证明.

引理 3(“保微分同胚”性质)　设 h 是满足 $h(0)=0$ 的 I 的 C^1 (保向)微分同胚,则 $\widetilde{h}=h_\gamma\circ h\circ h_\gamma^{-1}$ 也是 I 的 C^1 微分同胚. 又若 h' 是 ε-Hölder, 则 $\widetilde{h}'$ 亦然.

证　第一部分可仿引理 2 加以证明,为证 Hölder 连续性,将(1)式改写成为

$$\widetilde{h}'(y)=h'(x)\left(\frac{1+h(x)}{1+x}\right)^{1/\gamma_\pm-1}\left(\frac{1-h(x)}{1-x}\right)^{1/\gamma_\pm-1},\ y\in\mathrm{int}(I_\pm).\tag{2}$$

由假设知(2)式右边的第一、二个因子在 I_+ 上对 x 分别是 ε-, 1-Hölder. 又利用等式

$$\frac{1-h(x)}{1-x}\equiv\int_0^1 h'(1+s(x-1))\mathrm{d}s$$

知第三个因子在 I_+上也是 ε-Hölder, 从而(2)式右边对 $x\in I_+$ 是 ε-Hölder. 由于 $x=h_\gamma^{-1}(y)$ 对 $y\in I_+$ 是 1-Hölder(引理 1(3)), 因此 $\widetilde{h}'(y)$ 对 $y\in I_+$ 仍是 ε-Hölder. 在 I_- 上可类似讨论.

注　引理 2, 3 中关于 Hölder 连续性的逆命题也成立. 事实上,若 $\widetilde{f}'$, $\widetilde{h}'$ 在 $I_\pm$ 上是 ε-Hölder, 则 $R_\pm(x)=f'(x)/|x|^{\gamma_\pm-1}$, h' 在 $I_\pm$ 上分别是 $(\varepsilon/\gamma_\pm)$-Hölder.

设 f 满足(T1), (T2),定义 0 点的双反称量为

$$\tau=\tau_f=\frac{(-B_+)^{1/\gamma_+}}{(B_-)^{1/\gamma_-}}\ .$$

定理 1　对满足(T1), (T2)的映射,双反称量是 C^1 共轭不变量.

证　设 f 与 g 满足(T1), (T2),且有 C^1 微分同胚 h 满足 $h\circ f=g\circ h$. 由于双指数是 C^1 不变量,因此 $\gamma_f=\gamma_g=:\gamma$. 令 $\widetilde{f}=h_\gamma\circ f\circ h_\gamma^{-1}$, $\widetilde{g}=h_\gamma\circ g\circ h_\gamma^{-1}$ 及 $\widetilde{h}=h_\gamma\circ h\circ h_\gamma^{-1}$, 则有 $\widetilde{h}\circ\widetilde{f}=\widetilde{g}\circ\widetilde{h}$. 由(T1)可推出 $h(0)=0$, 因此引理 3 说明 $\widetilde{h}$ 仍为 C^1 微分同胚. 由引理 2 和 $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ 均以 0 为幂型临界点,因此有相同的反称量,即

$$\frac{\widetilde{f}'(0-)}{\widetilde{f}'(0+)}=\frac{\widetilde{g}'(0-)}{\widetilde{g}'(0+)}\ .$$

利用引理 2 中得到的公式知上式即为 $\tau_f=\tau_g$.

我们称 $f: I\to I$ 是双幂型 Ulam-von Neumann 变换,若 f 满足(T1), (T2)以及下述条件:

(T3) $R_\pm(x)=f'(x)/|x|^{\gamma_\pm-1}$ 在 $I_\pm$上是 α-Hölder(对某个 $0<\alpha\leqslant 1$);

(T4) 扩张性: 由迭代 f^n 根据 $f^n|I_j^n: I_j^n\to I$ 是同胚所产生的 I 的 2^n 个子区间 $I_j^n(j=1, 2, \cdots, 2^n)$(见图 1(b))具有下述性质: 存在常数 $C>0$ 及 $0<\mu<1$ 使得

$$\max\{\mathrm{length}(I_j^n): j=1, 2, \cdots, 2^n\}\leqslant C\mu^n,\ \forall n\geqslant 0.$$

Ulam-von Neumann 变换的一个典型例子是二次映射 $q(x)=1-2x^2$, 其它例子可见文献[7]

定理 2　设 f 与 g 是双幂型 Ulam-von Neumann 变换,则有

(1) f 与 g 是拓扑共轭的,即有 I 的保向同胚 h 使得 $h\circ f=g\circ h$.

(2) h 对某个 $0<\varepsilon\leqslant 1$ 是 $C^{1+\varepsilon}$ 微分同胚(即要求 h' 与 $(h^{-1})'$ 均是 ε-Hölder) 的充要条件是: $\gamma_f=\gamma_g$, $\tau_f=\tau_g$ 及 $(f^n)'(p)=(g^n)'(h(p))$, 对任意 $p\in I$ 满足 $f^n(p)=p$.

注 对幂型 Ulam-von Neumann 变换,定理 2 的证明可见文献[7].

证 (1)可用 Kneading 不变量证之,见文献[8]. (2)中的必要性已证,下证其充分性. 记 $\gamma=\gamma_f=\gamma_g$ 并令 $\widetilde{f}=h_\gamma\circ f\circ h_\gamma^{-1}$, $\widetilde{g}=h_\gamma\circ g\circ h_\gamma^{-1}$ 及 $\widetilde{h}=h_\gamma\circ h\circ h_\gamma^{-1}$, 则有 $\widetilde{h}\circ\widetilde{f}=\widetilde{g}\circ\widetilde{h}$. 由引理 3 知只需证 $\widetilde{h}$ 是 $C^{1+\varepsilon'}$ 同胚. 由于 $\widetilde{f}$ 与 $\widetilde{g}$ 均是幂型 Ulam-von Neumann 变换(这可从定义及引理 1, 2推出), 并且 $\gamma_{\widetilde{f}}=\gamma_{\widetilde{g}}=(1, 1)$, $\tau_{\widetilde{f}}=\tau_{\widetilde{g}}$, 因此据文献[7]中的结论仅需验证下述特征值条件成立:

$$(\widetilde{f}^n)'(q)=(\widetilde{g}^n)'(\widetilde{h}(q)),\quad 对任意\ q\in I\ 满足\ \widetilde{f}^n(q)=q. \tag{3}$$

下设 $q\in I$ 满足 $\widetilde{f}^n(q)=q$, 则 $p=h_\gamma^{-1}(q)$, $u=h(p)$, $v=h_\gamma(u)=\widetilde{h}(q)$ 分别是 f, g, $\widetilde{g}$ 的周期点.

若 $q=-1$(此时为不动点), 从引理 2 中的公式及假设可知

$$\widetilde{f}'(q)=f'(-1)^{1/\gamma_-}=g'(-1)^{1/\gamma_-}=\widetilde{g}'(q),$$

因此此时(3)式成立.

若 $q\neq -1$, 则 $g\neq 0, 1$. 因 $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ 在 $(-1, 0)\cup(0, 1)$ 上分别 C^1 共轭于 f, g(引理 1), 因此

$$(\widetilde{f}^n)'(q)=(f^n)'(p),\ (g^n)'(u)=(\widetilde{g}^n)'(\widetilde{h}(q)).$$

结合假设 $(f^n)'(p)=(g^n)'(h(p))=(g^n)'(u)$, 因此, 此时(3)式也成立. 故定理得证.

参 考 文 献

1 Hermann M R. On differentiable conjugation of diffeomorphisms of the circle and of rotations. Publ Math IHES, 1979, 49: 5~233

2 de la Leave R. Invariants for smooth conjugacy of hyperbolic dynamical systems II. Commun Math Phys, 1987, 109: 369~378

3 de la Llave R, Morjyón R. Invariants for smooth conjugacy of hyperbolic dynamical systems IV. Commun Math Phys, 1988, 116: 185~192

4 Palis J, Yoccoz J C. Differentiable conjugacies of Morss-Smale diffeomorphisms. Bol Soc Bras Mat (Nova Série), 1990, 20(2): 25~47

5 Sullivan D. Bounds, quadratic differentials, and renormalization conjectures. In: AMS Centennial Publications, Vol 2, Mathematics into the Twenty-first Century. Providence: Amer Math Soc, 1991

6 Jiang Y. Geometry of geometrically finite one-dimensional maps. Commun Math Phys, 1993, 156: 639~647

7 Jiang Y. On Ulam-von Neumann transformations. Commun Math Phys, 1995, 172: 449~459

8 de Melo W. Lectures on One-dimensional Dynamics. Rio de Janeiro: IMPA, 1991