基于不规则曲线匹配的小天体着陆器视觉导航算法

邵巍^{1*}, 王博宁¹, 窦凌飞¹, 赵韩雪¹, 谢金城¹, 姚文龙^{1*}, 黄翔宇²

1. 青岛科技大学自动化与电子工程学院, 青岛 266100;

2. 北京控制工程研究所, 北京 100094

*联系人, 邵巍, E-mail: greatshao@126.com; 姚文龙, E-mail: yaowenlong@qust.edu.cn

收稿日期: 2020-10-21; 接受日期: 2021-02-22; 网络出版日期: 2021-06-28

国家重点研发计划(编号: 2019YFA0706500)和国家自然科学基金(编号: 61773227, 61673057)资助项目

摘要 针对小天体着陆器着陆过程的视觉导航问题, 本文提出了一种利用不规则曲线上的点-切线来估计着陆器位姿的算法. 首先, 通过构建不规则曲线描述符完成着陆图像中的不规则曲线匹配; 其次, 建立位姿与点-切线之间的约束关系; 然后, 通过曲线参数化的方法求解高阶方程组, 并利用约束条件求得位姿参数唯一解及多条匹配曲线的最小二乘解; 最后, 通过仿真验证了噪声强度、正确匹配曲线个数对导航精度的影响, 证明了算法的可行性.

关键词 小天体着陆, 视觉导航, 不规则曲线匹配, 曲线积分

PACS: 96.35.-j, 96.35.Gt, 42.30.Tz, 96.30.Ys

1 引言

随着小天体探测技术的不断发展, 现阶段的主要目标从近距离飞越与绕飞探测逐渐转变为实现小天体的附着与采样返回. 由于通信延迟和小天体环境的复杂性, 着陆器需要使用机载传感器进行自主着陆导航^[1,2]. 迄今为止, 利用惯性测量单元的导航系统在星际着陆任务中发挥了重要作用^[3]. 然而, 初始误差和累积误差的存在使得基于IMU的状态估计难以满足精确着陆的任务要求. 近年来, 视觉导航方法由于其自主性、廉价性和易于操作等优点, 已在深空探测任务中

得到了不同程度的验证和应用^[4-6]. 深入研究着陆器自主视觉导航算法, 进一步提高自主性、导航精度、增强稳定性、减少计算量, 是我国未来深空探测任务的关键技术方向^[7].

在小天体探测着陆任务中, 星尘号在与彗星的交会段利用彗星图像结合Kalman滤波估计探测器的位姿, 以确保彗星在图像的中心^[4,8]. 隼鸟号任务首次采用了一种投放人工光标方法, 着陆器不利用小天体表面的自然地形特征, 而是利用人工投放的光标球作为陆标^[5,9]. 这种方法简单有效, 但增加了着陆器自身的重量, 并且小天体地形复杂、引力较小, 光标球部署困

引用格式: 邵巍, 王博宁, 窦凌飞, 等. 基于不规则曲线匹配的小天体着陆器视觉导航算法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2022, 52: 214510
Shao W, Wang B N, Dou L F, et al. Visual navigation algorithm for asteroid lander based on irregular curve matching (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2022, 52: 214510, doi: [10.1360/SSPMA-2020-0388](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2020-0388)

难易丢失. 美国NASA发射的冥王号利用携带的Poly-Cam相机拍摄出小天体全球影像图, 分辨率高达5 cm/pixel, 并在着陆采样阶段采用了一种基于自然特征跟踪(Natural Feature Tracking, NFT)技术的视觉导航方法^[6].

国内外学者从不同角度对自主视觉导航算法进行了深入的研究. 导航陆标的选择与匹配是利用光学相机拍摄的图像进行自主视觉导航的基础. 目前导航陆标主要可以分为图像提取出的特征点和自然陆标(陨石坑、山脊或巨石). Yu等人^[10]在SURF算法的基础上, 提出了一种利用惯性测量信息辅助Hessian特征算子检测模型, 对下降图像中的仿射失真具有不变性. Wei等人^[11]提出了一种利用多角度SIFT算子的方法提取更多的区域特征, 消去异常值的影响, 提高了下降图像序列之间的特征匹配精度. 但利用局部特征作为导航陆标的方法存在如下缺点: (1) 特征提取的数量多, 增加了导航算法的计算量和需求的存储空间, 星载计算机很难满足这一要求. (2) 特征点描述符仅利用了周围邻域像素信息进行描述, 当图像大尺度缩放或拍摄视角变换时, 容易出现误匹配或无法匹配的情况. (3) 一般情况下, 特征点的地理位置坐标难以得到, 更适合相对运动估计.

天体表面的陨石坑地理坐标可通过已有信息获取, 因此陨石坑等自然陆标是另一种适用于着陆导航的地形特征. Tian和Yu^[12]提出了一种基于陨石坑的相对导航方法用于小行星精确着陆任务. 其实现了下降图像中陨石坑与三维陨石坑模型之间的匹配, 并利用匹配结果对激光雷达测距进行补偿, 对地形起伏变化的鲁棒性明显提高. Lu等人^[13]通过将陨石坑环形边缘拟合为椭圆, 利用投影变换分解和基于范数的优化方法来计算着陆器的绝对姿态. Yu等人^[14]建立了一种2D-3D陨石坑重投影模型, 并以惯性状态估计作为参考, 仅需要一个陨石坑即可实现着陆器位姿估计. Xu等人^[15]提出了一种基于序列图像的自主导航方案, 利用惯性测量单元与单目相机可在无先验环境信息或额外传感器的情况下估计着陆器状态. Cui等人^[16,17]对未知形貌环境下光学/惯性组合导航方法进行了研究, 利用帧间图像中的陨石坑边缘曲线, 通过将其拟合为以椭圆为主的二次曲线确定着陆器的相对姿态和位置, 实现了着陆器状态实时估计. 质量较小的小天体可能不存在明显的陨石坑, 另外陨石坑可能存在重叠、风

化等情况, 而且小天体自旋会形成阴影区域, 这些都对陨石坑的精确提取带来较大困难.

小天体表面沟壑、岩石等不规则地形普遍存在, 蕴含的信息也远多于离散分布的特征点. 与特征点算法相比, 以不规则曲线边缘特征信息在提取和匹配时, 边缘条数少于特征点个数, 可明显减少特征提取时间和存储空间, 算法运行速度更快, 并且具备全局坐标. 与陨石坑拟合算法相比, 不规则曲线特征在小天体表面普遍存在, 适用范围更广. 因此, 本文针对特征点及陨石坑等特征作为导航陆标的不足, 提出了一种利用至少两条不规则曲线匹配的视觉导航方法, 估计着陆器的位置和姿态.

2 不规则曲线的提取与匹配

为了保证提取到的不规则曲线特征具有尺度不变性, 首先对灰度化后的输入图像通过高斯模糊和降采样构建图像金字塔. 其中, 高斯模糊可用于消除图像中过亮或过暗的像素点; 降采样能够保证图像尺度不变性. 然后, 利用Edge Drawing算法^[18]完成不规则曲线特征的提取工作. 该算法提取出的不规则曲线特征具备单像素宽度, 与传统的Canny边缘检测算法相比, 运行速度提高了10%^[19].

在图像金字塔中完成对每层图像的不规则曲线特征提取之后, 将每条不规则曲线划分为 n 条线段, 利用直线支撑区域的直线描述符思想^[20], 构建具有旋转、缩放、光照不变性的不规则曲线描述符. 经过多次仿真实验表明, 矩形带个数为9, 矩形带宽度为7时具有较好的匹配效果. 此时曲线描述符是36维向量, 少于传统的SIFT 128维特征点描述符维数. 再根据最近邻距离比率原则进行不规则曲线匹配. 如图1所示, 利用着陆过程拍摄的Rosetta小天体和Eros小天体图像可以实现良好的匹配效果.

本文采用的不规则曲线描述符提取的不规则曲线数目远少于相同条件下传统的SIFT等算法提取数目. 因此, 不规则曲线提取与匹配将比传统的特征点提取匹配方法需要更少的计算花费. 利用Rosetta小天体和Eros小天体图像对本文提取匹配算法与传统的特征点提取匹配算法进行验证, 平均运行时间和平均匹配个数对比结果如表1所示.

图 1 (网络版彩图)小天体图像不规则曲线提取与匹配效果图. (a) Rosetta 小天体表面曲线匹配结果; (b) Eros 小天体表面曲线匹配结果

Figure 1 (Color online) Asteroid image irregular curve extraction and matching results. (a) Rosetta asteroid surface curve matching results; (b) Eros asteroid surface curve matching results.

表 1 特征点匹配和曲线匹配算法对比结果

Table 1 Comparison results of feature point matching and curve matching algorithms

	提取 个数	平均匹 配个数	提取描述 耗时 (s)	匹配耗 时 (s)	总运行 时间 (s)
SIFT	1328	330	1.430	0.581	2.011
不规则曲线	678	58	0.562	0.084	0.646

3 基于不规则曲线的着陆器视觉导航算法

3.1 着陆器位姿与点-切线关系模型

选取着陆点坐标系作为世界坐标系 $O_W-X_WY_WZ_W$, 用 $P_W(x_W, y_W, z_W)$ 表示物体点在三维空间中的位置. 如图2所示, 以导航相机光心 O_C 为原点, 光轴为 Z_C 轴建立导航相机坐标系 $O_C-X_CY_CZ_C$. 用 $P_C(x_C, y_C, z_C)$ 表示物体点在导航相机坐标系中的位置. 则:

$$P_C = RP_W + T, \quad (1)$$

其中, R 为旋转矩阵, T 为平移向量.

假设导航相机内参已知, 事先已对小天体进行了三维建模并生成了全景地图, 通过提取与匹配算法获得了正确匹配不规则曲线的三维信息. 利用3次B样条

图 2 (网络版彩图)坐标系示意图

Figure 2 (Color online) Coordinate system diagram.

曲线拟合算法将正确匹配的不规则曲线上的点拟合为光滑曲线, 选取其中一点为关键点, 求出其二维切线表达式, 然后利用曲线微分几何的算法^[21,22], 可以求得其在三维空间中的对应点-切线, 则可得到两个世界坐标系中不规则曲线上的三维点 (P_{W1}, P_{W2}) 、经过它们的切线 (T_{W1}, T_{W2}) 以及三维点的透视投影 (p_1, p_2) 、切线的透视投影 (t_1, t_2) .

成像平面坐标系下的点 p 与导航相机坐标系下的点 P_C 的关系可得

$$P_C = p \times \frac{z_C}{f} = \varepsilon \times p, \quad (2)$$

其中, p 为成像平面坐标系下的点 (x, y, f) , $\varepsilon = \frac{z_C}{f}$, f 为导航相机焦距.

联立式(1)和(2)可得

$$\begin{cases} \varepsilon_1 p_1 = RP_{W1} + T, \\ \varepsilon_2 p_2 = RP_{W2} + T. \end{cases} \quad (3)$$

利用三维场景与投影图像之间存在的点-切线对应关系, 通过对图像点 p_1 和 p_2 求微分, 可以得到旋转矩阵 R 和平移向量 T 与点-切线关系:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 g_1 t_1 + \varepsilon_1' p_1 = RG_1 T_{W1}, \\ \varepsilon_2 g_2 t_2 + \varepsilon_2' p_2 = RG_2 T_{W2}, \end{cases} \quad (4)$$

其中, $g_i = \left\| \frac{ds_i}{ds_i} \right\|$, $G_i = \left\| \frac{d\tilde{s}_i}{d\tilde{s}_i} \right\|$, $\tilde{s}_i, s_i$ 分别为三维、二维弧长参数, S_i, s_i 为曲线上的任意一点. 将式(3)中等式做

差可得

$$\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 = \mathbf{R} \mathbf{P}_{W1} - \mathbf{R} \mathbf{P}_{W2}. \quad (5)$$

联立式(4)和(5)可得

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \frac{\mathbf{g}_1}{G_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\varepsilon'_1}{G_1} \mathbf{p}_1 = \mathbf{R} \mathbf{T}_{W1}, \\ \varepsilon_2 \frac{\mathbf{g}_2}{G_2} \mathbf{t}_2 + \frac{\varepsilon'_2}{G_2} \mathbf{p}_2 = \mathbf{R} \mathbf{T}_{W2}, \\ \varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 = \mathbf{R} \mathbf{P}_{W1} - \mathbf{R} \mathbf{P}_{W2}. \end{cases} \quad (6)$$

将式(6)转化为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 & \varepsilon_1 \frac{\mathbf{g}_1}{G_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\varepsilon'_1}{G_1} \mathbf{p}_1 & \varepsilon_2 \frac{\mathbf{g}_2}{G_2} \mathbf{t}_2 + \frac{\varepsilon'_2}{G_2} \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R} [\mathbf{P}_{W1} - \mathbf{P}_{W2} \quad \mathbf{T}_{W1} \quad \mathbf{T}_{W2}]. \quad (7)$$

由于旋转矩阵与旋转矩阵的逆矩阵相等, 将式(7)两边各自左乘转置矩阵, 可得

$$(\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{p}_2)^T (\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{p}_2) = (\mathbf{P}_{W1} - \mathbf{P}_{W2})^T (\mathbf{P}_{W1} - \mathbf{P}_{W2}), \quad (8)$$

$$(\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{p}_2)^T \left(\varepsilon_1 \frac{\mathbf{g}_1}{G_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\varepsilon'_1}{G_1} \mathbf{p}_1 \right) = (\mathbf{P}_{W1} - \mathbf{P}_{W2})^T \mathbf{T}_{W1}, \quad (9)$$

$$(\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{p}_2)^T \left(\varepsilon_2 \frac{\mathbf{g}_2}{G_2} \mathbf{t}_2 + \frac{\varepsilon'_2}{G_2} \mathbf{p}_2 \right) = (\mathbf{P}_{W1} - \mathbf{P}_{W2})^T \mathbf{T}_{W2}, \quad (10)$$

$$\left(\varepsilon_1 \frac{\mathbf{g}_1}{G_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\varepsilon'_1}{G_1} \mathbf{p}_1 \right)^T \left(\varepsilon_1 \frac{\mathbf{g}_1}{G_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\varepsilon'_1}{G_1} \mathbf{p}_1 \right) = 1, \quad (11)$$

$$\left(\varepsilon_1 \frac{\mathbf{g}_1}{G_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\varepsilon'_1}{G_1} \mathbf{p}_1 \right)^T \left(\varepsilon_2 \frac{\mathbf{g}_2}{G_2} \mathbf{t}_2 + \frac{\varepsilon'_2}{G_2} \mathbf{p}_2 \right) = (\mathbf{T}_{W1})^T \mathbf{T}_{W2}, \quad (12)$$

$$\left(\varepsilon_2 \frac{\mathbf{g}_2}{G_2} \mathbf{t}_2 + \frac{\varepsilon'_2}{G_2} \mathbf{p}_2 \right)^T \left(\varepsilon_2 \frac{\mathbf{g}_2}{G_2} \mathbf{t}_2 + \frac{\varepsilon'_2}{G_2} \mathbf{p}_2 \right) = 1. \quad (13)$$

将式(9)和(10)展开并化简可得

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon'_1}{G_1} = \frac{(\mathbf{P}_{W1} - \mathbf{P}_{W2})^T \mathbf{T}_{W1}}{(\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{p}_2)^T \mathbf{p}_1} - \left[\frac{(\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{p}_2)^T \mathbf{t}_1}{(\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{p}_2)^T \mathbf{p}_1} \right] \varepsilon_1 \frac{\mathbf{g}_1}{G_1} \\ \quad = A_1 - B_1 \varepsilon_1 \frac{\mathbf{g}_1}{G_1}, \\ \frac{\varepsilon'_2}{G_2} = \frac{(\mathbf{P}_{W1} - \mathbf{P}_{W2})^T \mathbf{T}_{W2}}{(\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{p}_2)^T \mathbf{p}_2} - \left[\frac{(\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{p}_2)^T \mathbf{t}_2}{(\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{p}_2)^T \mathbf{p}_2} \right] \varepsilon_2 \frac{\mathbf{g}_2}{G_2} \\ \quad = A_2 - B_2 \varepsilon_2 \frac{\mathbf{g}_2}{G_2}. \end{cases} \quad (14)$$

将式(11)–(13)展开后, 可得

$$\begin{cases} \left(\varepsilon_1 \frac{\mathbf{g}_1}{G_1} \right)^2 + 2(\mathbf{p}_1^T \mathbf{t}_1) \left(\varepsilon_1 \frac{\mathbf{g}_1}{G_1} \right) \left(\frac{\varepsilon'_1}{G_1} \right) + (\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1) \left(\frac{\varepsilon'_1}{G_1} \right)^2 = 1, \\ \left(\varepsilon_2 \frac{\mathbf{g}_2}{G_2} \right)^2 + 2(\mathbf{p}_2^T \mathbf{t}_2) \left(\varepsilon_2 \frac{\mathbf{g}_2}{G_2} \right) \left(\frac{\varepsilon'_2}{G_2} \right) + (\mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_2) \left(\frac{\varepsilon'_2}{G_2} \right)^2 = 1, \\ (\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2) \left(\varepsilon_1 \frac{\mathbf{g}_1}{G_1} \right) \left(\varepsilon_2 \frac{\mathbf{g}_2}{G_2} \right) + (\mathbf{p}_2^T \mathbf{t}_1) \left(\varepsilon_1 \frac{\mathbf{g}_1}{G_1} \right) \left(\frac{\varepsilon'_2}{G_2} \right) \\ + (\mathbf{p}_1^T \mathbf{t}_2) \left(\varepsilon_2 \frac{\mathbf{g}_2}{G_2} \right) \left(\frac{\varepsilon'_1}{G_1} \right) + (\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2) \left(\frac{\varepsilon'_1}{G_1} \right) \left(\frac{\varepsilon'_2}{G_2} \right) = (\mathbf{T}_{W1})^T \mathbf{T}_{W2}. \end{cases} \quad (15)$$

令 $x_1 = \varepsilon_1 \frac{\mathbf{g}_1}{G_1}$, $x_2 = \varepsilon_2 \frac{\mathbf{g}_2}{G_2}$, 联立式(14)和(15)可得

$$\begin{cases} Ax_1^2 + Bx_1 + C = 0, \\ Ex_2^2 + Fx_2 + G = 0, \\ H + Jx_1 + Kx_2 + Lx_1x_2 = 0. \end{cases} \quad (16)$$

其中参数 A – L 分别表示:

$$\begin{cases} A = 1 - 2\mathbf{p}_1^T \mathbf{t}_1 B_1 + \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 B_1^2, \\ B = [2(\mathbf{p}_1^T \mathbf{t}_1) - 2\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 B_1] A_1, \\ C = (\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1) A_1^2 - 1, \\ E = 1 - 2\mathbf{p}_2^T \mathbf{t}_2 B_2 + \mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_2 B_2^2, \\ F = [2(\mathbf{p}_2^T \mathbf{t}_2) - 2\mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_2 B_2] A_2, \\ G = (\mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_2) A_2^2 - 1, \\ H = \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2 A_1 A_2 - (\mathbf{T}_{W1})^T \mathbf{T}_{W2}, \\ J = [\mathbf{p}_2^T \mathbf{t}_1 - \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2 B_1] A_2, \\ K = [\mathbf{p}_1^T \mathbf{t}_2 - \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2 B_2] A_1, \\ L = \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2 - \mathbf{p}_2^T \mathbf{t}_1 B_2 - \mathbf{p}_1^T \mathbf{t}_2 B_1 + \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2 B_1 B_2. \end{cases} \quad (17)$$

可以看出, 参数 A – L 中只有两个未知数 ε_1 和 ε_2 . 因此, 求解出 x_1 和 x_2 后, 联立式(8)和(16)即可解出 ε_1 和 ε_2 的值.

求解方程组(16)可得

$$\begin{cases} x_1 = \\ \quad - \frac{A(EH^2 - FHK + GK^2) - C(EJ^2 - FJL + GL^2)}{A(2EHJ - FHL - FJK + 2GKL) - B(EJ^2 - FJL + GL^2)}, \\ x_2 = -\frac{H + Jx_1}{K + Lx_1}. \end{cases} \quad (18)$$

将参数 A – L 分别代入式(18), 并与式(8)联立可得只含两个未知数 ε_1 , ε_2 的方程组, 即为着陆器位姿与点-

切线关系模型.

3.2 着陆器位姿求解

式(8)可看作关于 ε_1 和 ε_2 的椭圆方程, 假设存在一个半轴长度分别为 $\alpha(\alpha > 0)$, $\beta(\beta > 0)$ 且平行于坐标轴的椭圆, 满足:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = 1. \quad (19)$$

令:

$$\begin{cases} \frac{x}{\alpha} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \frac{y}{\beta} = \frac{(1-t^2)}{1+t^2}, \end{cases} \quad (20)$$

其中, $t \in (-\infty, +\infty)$. 如图3所示, 对于以原点为中心的椭圆, 将坐标乘以角度为 θ 的旋转矩阵, 并令 $x = \varepsilon_1$, $y = \varepsilon_2$ 可得

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{2\alpha t \cos \theta + \beta(1-t^2) \sin \theta}{1+t^2}, \\ \varepsilon_2 = \frac{-2\alpha t \sin \theta + \beta(1-t^2) \cos \theta}{1+t^2}, \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (21)$$

其中,

$$\tan(2\theta) = \frac{2(1+\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2)}{\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_2}, \quad 0 \leq 2\theta \leq \pi. \quad (22)$$

将参数化后的 ε_1 , ε_2 代入式(8), 并根据三角关系化简可得

图 3 (网络版彩图)通过参数 t 对椭圆进行参数化示意图

Figure 3 (Color online) Schematic diagram of parameterizing the ellipse by parameter t .

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1)4\alpha^2 t^2 - (\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2)4\alpha\beta t(1-t^2) + (\mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_2)\beta^2(1-t^2)^2] \\ & \times (1 + \cos(2\theta)) + [(\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1)\beta^2(1-t^2)^2 + (\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2)4\alpha\beta t(1-t^2) \\ & + (\mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_2)4\alpha^2 t^2](1 - \cos(2\theta)) + [(\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1)4\alpha\beta t(1-t^2) \\ & + (\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2)8\alpha^2 t^2 - (\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2)2\beta^2(1-t^2)^2 \\ & - (\mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_2)4\alpha\beta t(1-t^2)]\sin(2\theta) \\ & = 2(1+t^2)^2 \|\mathbf{P}_{W1} - \mathbf{P}_{W2}\|^2. \end{aligned} \quad (23)$$

当 $t = 0$ 时, 可得

$$\beta^2 = \frac{2\|\mathbf{P}_{W1} - \mathbf{P}_{W2}\|^2}{(\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_2) - (\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_2)\cos(2\theta) - 2\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2 \sin(2\theta)}. \quad (24)$$

当 $t = 1$ 时, 可得

$$\alpha^2 = \frac{2\|\mathbf{P}_{W1} - \mathbf{P}_{W2}\|^2}{(\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_2) + (\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_2)\cos(2\theta) + 2\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2 \sin(2\theta)}. \quad (25)$$

则将式(21)代入式(18)可得一个仅含未知数 t 的16次方程, 其形式如下:

$$\tilde{N}(t) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots + q_{16} t^{16}, \quad (26)$$

其中, $q_i = -q_{16-i}$, i 为奇数, 求解可得着陆器的位置与姿态 $\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$.

3.3 唯一解确定

通过求解式(26), 可以得到16组解, 其解可看作是两个方程在 ε_1 - ε_2 平面上的交点. 但实际只有一组正确的平移向量 $\mathbf{T}$ 与旋转矩阵 $\mathbf{R}$. 因此, 需要利用约束条件求得唯一解.

约束条件1: 由于 $\varepsilon = \frac{z_C}{f}$, 则在 ε_1 - ε_2 平面中, 方程组的解应位于第一象限. 同时, 根据相机成像原理可知 $z_C > f$, 则:

$$\varepsilon_1 > 1, \varepsilon_2 > 1. \quad (27)$$

约束条件2: 旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 的行列式应大于0, 因此

$$\det \mathbf{R} = \frac{\det \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 & \varepsilon_1 \frac{\mathbf{g}_1}{G_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\varepsilon_1}{G_1} \mathbf{p}_1 & \varepsilon_2 \frac{\mathbf{g}_2}{G_2} \mathbf{t}_2 + \frac{\varepsilon_2}{G_2} \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}}{\det[(\mathbf{P}_{W1} - \mathbf{P}_{W2}) \mathbf{T}_{W1} \mathbf{T}_{W2}]} > 0. \quad (28)$$

约束条件3: 根据着陆器的最大速度及当前时刻估计的姿态矩阵, 即可估计出下一时刻的位置最大变化范围, 在此范围内对候选解进行筛选.

同时满足3个约束条件的解即为着陆器位姿参数的唯一解.

3.4 基于超定方程的着陆器位姿估计

实际图像中正确匹配的曲线可能不止2条, 当给定 n ($n \geq 3$) 个世界坐标系中不规则曲线上的三维点 ($\mathbf{P}_{W1}, \mathbf{P}_{W2}, \dots, \mathbf{P}_{Wn}$) 以及经过它们的切线 ($\mathbf{T}_{W1}, \mathbf{T}_{W2}, \dots, \mathbf{T}_{Wn}$) 时, 式(3)变为

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \mathbf{p}_1 = \mathbf{R} \mathbf{P}_{W1} + \mathbf{T}, \\ \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 = \mathbf{R} \mathbf{P}_{W2} + \mathbf{T}, \\ \vdots \\ \varepsilon_n \mathbf{p}_n = \mathbf{R} \mathbf{P}_{Wn} + \mathbf{T}. \end{cases} \quad (29)$$

同样地, 类比式(6), 根据一阶曲线微分方程对 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ 求微分后做差, 可得

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 = \mathbf{R} \mathbf{P}_{W1} - \mathbf{R} \mathbf{P}_{W2}, \\ \varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_3 \mathbf{p}_3 = \mathbf{R} \mathbf{P}_{W1} - \mathbf{R} \mathbf{P}_{W3}, \\ \vdots \\ \varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_n \mathbf{p}_n = \mathbf{R} \mathbf{P}_{W1} - \mathbf{R} \mathbf{P}_{Wn}, \\ \varepsilon_1 \frac{g_1}{G_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\varepsilon'_1}{G_1} \mathbf{p}_1 = \mathbf{R} \mathbf{T}_{W1}, \\ \varepsilon_2 \frac{g_2}{G_2} \mathbf{t}_2 + \frac{\varepsilon'_2}{G_2} \mathbf{p}_2 = \mathbf{R} \mathbf{T}_{W2}, \\ \vdots \\ \varepsilon_n \frac{g_n}{G_n} \mathbf{t}_n + \frac{\varepsilon'_n}{G_n} \mathbf{p}_n = \mathbf{R} \mathbf{T}_{Wn}, \end{cases} \quad (30)$$

$$\text{其中, } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}.$$

假设

$$\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 - \varepsilon_n \mathbf{p}_n = [\mu_{n1} \ \mu_{n2} \ \mu_{n3}]^T,$$

$$\varepsilon_n \frac{g_n}{G_n} \mathbf{t}_n + \frac{\varepsilon'_n}{G_n} \mathbf{p}_n = [\sigma_{n1} \ \sigma_{n2} \ \sigma_{n3}]^T,$$

则式(30)可变形为

$$\begin{cases} [\mu_{n1} \ \mu_{n2} \ \mu_{n3}]^T = \mathbf{R} [\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_1 \ \mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_1 \ \mathbf{Z}_n - \mathbf{Z}_1]^T, \\ [\sigma_{n1} \ \sigma_{n2} \ \sigma_{n3}]^T = \mathbf{R} [\mathbf{T}_{xn} \ \mathbf{T}_{yn} \ \mathbf{T}_{zn}]^T. \end{cases} \quad (31)$$

将式(31)展开可得

$$\begin{cases} (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_1) \cdot r_{11} + (\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_1) \cdot r_{12} + (\mathbf{Z}_n - \mathbf{Z}_1) \cdot r_{13} = \mu_{n1}, \\ (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_1) \cdot r_{21} + (\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_1) \cdot r_{22} + (\mathbf{Z}_n - \mathbf{Z}_1) \cdot r_{23} = \mu_{n2}, \\ (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_1) \cdot r_{31} + (\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_1) \cdot r_{32} + (\mathbf{Z}_n - \mathbf{Z}_1) \cdot r_{33} = \mu_{n3}. \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{xn} \cdot r_{11} + \mathbf{T}_{zn} \cdot r_{12} + \mathbf{T}_{zn} \cdot r_{13} = \sigma_{n1}, \\ \mathbf{T}_{xn} \cdot r_{21} + \mathbf{T}_{zn} \cdot r_{22} + \mathbf{T}_{zn} \cdot r_{23} = \sigma_{n2}, \\ \mathbf{T}_{xn} \cdot r_{31} + \mathbf{T}_{zn} \cdot r_{32} + \mathbf{T}_{zn} \cdot r_{33} = \sigma_{n3}. \end{cases} \quad (33)$$

以求解 r_{11}, r_{12}, r_{13} 为例, 联立式(32-1)和(33-1)可构成超定方程组 $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 形式, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1 & \mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_1 & \mathbf{Y}_3 - \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{X}_n - \mathbf{X}_1 & \mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Z}_n - \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{T}_{x1} & \mathbf{T}_{y1} & \mathbf{T}_{z1} \\ \mathbf{T}_{x2} & \mathbf{T}_{y2} & \mathbf{T}_{z2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{T}_{xn} & \mathbf{T}_{yn} & \mathbf{T}_{zn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \vdots \\ \mu_{n1} \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \vdots \\ \sigma_{n1} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

其中, $\mathbf{b}$ 中参数由式(18)求得, 则方程组(34)只包含未知数 r_{11}, r_{12}, r_{13} , 超定方程组可以求得其最小二乘解. 同理, 可以得到旋转矩阵 $\mathbf{R}$, 并将旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 代入式(29)可以求解出平移向量 $\mathbf{T}$.

4 实验仿真及结果分析

模拟小天体探测器的着陆过程, 对基于不规则曲线匹配的导航算法从图像提取白噪声、匹配曲线个数、高度变化三个方面与着陆器位姿估计误差的关系进行仿真分析.

4.1 利用两对匹配曲线位姿估计误差分析

针对着陆器着陆时所遇到的不同情况, 对导航图像中不规则曲线的提取结果添加高斯白噪声, 以此验证算法的鲁棒性和准确性. 在图像处理的过程中, 在已知量中的二维点 $p(x, y)$ 及其切线方向 $t = (x_0 - x, y_0 - y)$ 中加入高斯白噪声 $(\Delta x, \Delta y)$, 施加的噪声模型如图4所示.

$$\begin{cases} \hat{p} = (x + \Delta x, y + \Delta y), \\ \hat{t} = (x_0 - x + \Delta x, y_0 - y + \Delta y). \end{cases} \quad (35)$$

假设着陆器高度分别为500, 1000 m, 高斯白噪声强度为1–10 pixels, 具体仿真参数如表2所示.

图 4 噪声模型
Figure 4 Noise model.

表 2 仿真参数
Table 2 Simulation parameters

参数名称	参数值
着陆器初始高度 (m)	500, 1000
导航相机视场角 (°)	12
图像分辨率 (pixels)	1024×1024
导航相机焦距 (mm)	10
噪声强度 (pixel)	1–10

从图5和6的仿真结果可以看出, 着陆器的位置和姿态误差都随着噪声强度的增大而增大. 同时, 噪声强度小于10个像素时, 当着陆器高度为500 m时, 位置估计误差小于15 m, 角度估计误差小于0.5°; 当着陆器高度为1000 m时, 位置估计误差小于30 m, 角度估计误差小于1°. 基于着陆器的高度变化, 利用表3中的仿真参数对算法进行验证.

图7和8分别表示着陆器在着陆阶段的位置、姿态估计误差及相应的3σ不确定度.

从图7和8的仿真结果可以看出, 着陆器的位置和姿态估计误差随高度的下降而减小. 这是因为随着着陆器的降落, 导航图像中单位像素代表的实际距离减小, 固定噪声水平的影响也会逐渐减小.

4.2 利用多对匹配曲线位姿估计误差分析

当实际图像中正确的匹配曲线多于两条时, 可利用多对匹配曲线进行着陆器的位姿估计. 相机参数如表2所示, 假设着陆器位于500 m、噪声强度为1 pixel

图 5 (网络版彩图)不同噪声强度下着陆器位置估计误差. (a) x轴位置估计误差; (b) y轴位置估计误差; (c) z轴位置估计误差

Figure 5 (Color online) Position estimation error of lander under different noise intensities. (a) x-axis position estimation error; (b) y-axis position estimation error; (c) z-axis position estimation error.

图 6 (网络版彩图)不同噪声强度下着陆器姿态估计误差. (a) x轴角度估计误差; (b) y轴角度估计误差; (c) z轴角度估计误差

Figure 6 (Color online) Attitude estimation error of lander under different noise intensities. (a) x-axis angle estimation error; (b) y-axis angle estimation error; (c) z-axis angle estimation error.

表 3 仿真参数

Table 3 Simulation parameters

参数名称	参数值
着陆器初始高度 (m)	4000
着陆器最终高度 (m)	0
导航相机视场角 (°)	12
图像分辨率 (pixels)	1024×1024
导航相机焦距 (mm)	10
噪声强度 (pixel)	1

图 7 (网络版彩图)着陆阶段着陆器位置估计误差. (a) x 轴位置估计误差; (b) y 轴位置估计误差; (c) z 轴位置估计误差

Figure 7 (Color online) Lander position estimation error during landing. (a) x -axis position estimation error; (b) y -axis position estimation error; (c) z -axis position estimation error.

时, 验证点-切线个数对着陆器位姿估计误差的影响.

从图9和10的仿真结果可以看出, 着陆器的位姿估计误差随着点-切线个数的增加而降低并逐渐趋于平缓. 当点-切线个数多于6个时, 着陆器位置估计误差小于1 m, 角度估计误差小于 0.04° .

为了验证利用多对匹配曲线进行位姿估计时高斯白噪声强度对导航精度的影响, 假设利用4条正确匹配曲线分别对相同高度下不同噪声强度着陆器位姿估计误差、着陆器下降过程中不同噪声强度对位姿估计误

图 8 (网络版彩图)着陆阶段着陆器姿态估计误差. (a) x 轴角度估计误差; (b) y 轴角度估计误差; (c) z 轴角度估计误差

Figure 8 (Color online) Lander attitude estimation error during landing. (a) x -axis angle estimation error; (b) y -axis angle estimation error; (c) z -axis angle estimation error.

图 9 (网络版彩图)点-切线个数与着陆器位置估计误差. (a) x 轴位置估计误差; (b) y 轴位置估计误差; (c) z 轴位置估计误差

Figure 9 (Color online) Number of point-tangent lines and estimation error of lander position. (a) x -axis position estimation error; (b) y -axis position estimation error; (c) z -axis position estimation error.

图 10 (网络版彩图)点-切线个数与着陆器姿态估计误差. (a) x轴角度估计误差; (b) y轴角度估计误差; (c) z轴角度估计误差

Figure 10 (Color online) Number of point-tangent lines and estimation error of lander attitude. (a) x-axis angle estimation error; (b) y-axis angle estimation error; (c) z-axis angle estimation error.

图 12 (网络版彩图)不同噪声强度下着陆器姿态估计误差. (a) x轴角度估计误差; (b) y轴角度估计误差; (c) z轴角度估计误差

Figure 12 (Color online) Attitude estimation error of lander under different noise intensities. (a) x-axis angle estimation error; (b) y-axis angle estimation error; (c) z-axis angle estimation error.

图 11 (网络版彩图)不同噪声强度下着陆器位置估计误差. (a) x轴位置估计误差; (b) y轴位置估计误差; (c) z轴位置估计误差

Figure 11 (Color online) Estimation error of lander position under different noise intensities. (a) x-axis position estimation error; (b) y-axis position estimation error; (c) z-axis position estimation error.

差的影响进行了仿真验证.

从图11和12的仿真结果可以看出, 与利用两对匹配曲线进行着陆器位姿估计算法相比, 当噪声强度小于5个像素时, 导航结果更加精确. 而当噪声强度大于5个像素时, 着陆器位姿估计误差增大.

从图13和14的仿真结果可以看出, 相同高度下着陆器的位置和姿态误差都随着噪声强度的增大而增大. 当噪声强度在3个像素以内时, 着陆器最终位置估计误差均在1.2 m以内, 角度估计误差均在0.06°以内.

5 结论

本文提出了一种基于不规则曲线匹配的小天体着陆器视觉导航算法, 与特征点算法相比, 特征提取时间和存储空间更少, 算法运行速度更快; 与陨石坑算法相比, 不规则曲线特征适用范围更广. 仿真实验表明, 当噪声强度为1 pixel, 着陆器着陆时, 三轴位置误差均在0.5 m以内, 三轴姿态误差均在0.02°以内, 具有较高的导航精度. 本文提出的基于不规则曲线的自主导航算

图 13 (网络版彩图)不同着陆高度下位置估计误差. (a) x 轴位置估计误差; (b) y 轴位置估计误差; (c) z 轴位置估计误差

Figure 13 (Color online) Position estimation error at different landing altitudes. (a) x -axis position estimation error; (b) y -axis position estimation error; (c) z -axis position estimation error.

法根据两条不规则曲线得到着陆器位姿的解析解; 根据两条以上的不规则曲线得到着陆器位姿的最小二乘

图 14 (网络版彩图)不同着陆高度下姿态估计误差. (a) x 轴角度估计误差; (b) y 轴角度估计误差; (c) z 轴角度估计误差

Figure 14 (Color online) Attitude estimation error at different landing altitudes. (a) x -axis angle estimation error; (b) y -axis angle estimation error; (c) z -axis angle estimation error.

解. 在此基础上, 后续将进一步提高不规则曲线的匹配速度并研究与惯性导航相结合的组合导航算法.

参考文献

- Qin T, Zhu S, Cui P, et al. An innovative navigation scheme of powered descent phase for Mars pinpoint landing. *Adv Space Res*, 2014, 54: 1888–1900
- Steinfeldt B A, Grant M J, Matz D A, et al. Guidance, navigation, and control system performance trades for Mars pinpoint landing. *J Spacecr Rockets*, 2010, 47: 188–198
- Jiang X, Yang B, Li S. Overview of China's 2020 Mars mission design and navigation. *Astrodynamics*, 2018, 2: 1–11
- Bhaskaran S, Riedel J E, Synnott S P. Autonomous nucleus tracking for comet/asteroid encounters: The stardust example. In: 1998 IEEE Aerospace Conference Proceedings. New York: IEEE, 1998. 353–365
- Ogawa N, Terui F, Mimasu Y, et al. Image-based autonomous navigation of Hayabusa2 using artificial landmarks: The design and brief in-flight results of the first landing on asteroid Ryugu. *Astrodynamics*, 2020, 4: 89–103
- Bos B J, Ravine M A, Caplinger M, et al. Touch and Go Camera System (TAGCAMS) for the OSIRIS-REx asteroid sample return mission. *Space Sci Rev*, 2018, 214: 37
- Yu Z S, Cui P Y. Research status and developing trend of the autonomous navigation, guidance, and control for planetary landing (in Chinese). *J Deep Space Explor*, 2016, 3: 345–355 [于正澍, 崔平远. 行星着陆自主导航与制导控制研究现状与趋势. 深空探测学报, 2016, 3: 345–355]
- Brownlee D E, Tsou P, Anderson J D, et al. Stardust: Comet and interstellar dust sample return mission. *J Geophys Res: Planets*, 2003, 108: 8111
- Anzai Y, Yairi T, Takeishi N, et al. Visual localization for asteroid touchdown operation based on local image features. *Astrodynamics*, 2020, 4: 149–161
- Yu M, Li S, Huang X, et al. A novel inertial-aided feature detection model for autonomous navigation in planetary landing. *Acta Astronaut*, 2018, 152: 667–681

- 11 Wei R, Ruan X, Yu N, et al. Shadow areas robust matching among image sequence in planetary landing. *Earth Moon Planets*, 2017, 119: 95–124
- 12 Tian Y, Yu M. A novel crater recognition based visual navigation approach for asteroid precise pin-point landing. *Aerosp Sci Technol*, 2017, 70: 1–9
- 13 Lu T, Hu W, Liu C, et al. Relative pose estimation of a lander using crater detection and matching. *Opt Eng*, 2016, 55: 023102
- 14 Yu M, Li S, Wang S, et al. Single crater-aided inertial navigation for autonomous asteroid landing. *Adv Space Res*, 2019, 63: 1085–1099
- 15 Xu C, Wang D, Huang X. Autonomous navigation based on sequential images for planetary landing in unknown environments. *J Guid Control Dyn*, 2017, 40: 2587–2602
- 16 Cui P, Gao X, Zhu S, et al. Visual navigation using edge curve matching for pinpoint planetary landing. *Acta Astronaut*, 2018, 146: 171–180
- 17 Cui P, Gao X, Zhu S, et al. Visual navigation based on curve matching for planetary landing in unknown environments. *Acta Astronaut*, 2020, 170: 261–274
- 18 Topal C, Akinlar C. Edge Drawing: A combined real-time edge and segment detector. *J Vis Commn Image Represent*, 2012, 23: 862–872
- 19 Xie J C. Visual Navigation Algorithm of Lander Based on Irregular Curve (in Chinese). Dissertation for Master Degree. Qingdao: Qingdao University of Science and Technology, 2020 [谢金城. 基于不规则曲线的着陆器视觉导航算法研究. 硕士学位论文. 青岛: 青岛科技大学, 2020]
- 20 Zhang L L, Koch R. An efficient and robust line segment matching approach based on LBD descriptor and pairwise geometric consistency. *J Vis Comm Image Represent*, 2013, 24: 794–805
- 21 Li G, Zucker S W. A differential geometrical model for contour-based stereo correspondence. In: *IEEE Workshop on Variational, Geometric, and Level Set Methods in Computer Vision*, Nice, France, 2003
- 22 Fabbri R, Kimia B B, Giblin P J. Camera pose estimation using first-order curve differential geometry. In: *Proceedings of the 12th European Conference on Computer Vision-Volume Part IV*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012

Visual navigation algorithm for asteroid lander based on irregular curve matching

SHAO Wei^{1*}, WANG BoNing¹, DOU LingFei¹, ZHAO HanXue¹, XIE JinCheng¹,
YAO WenLong^{1*} & HUANG XiangYu²

¹ School of Automation and Electronic Engineering, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266100, China;

² Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100094, China

In order to solve the visual navigation problem of the landing process of the small celestial body lander, this paper proposes an algorithm to estimate the position and attitude of the lander by using point-tangent line on the irregular curve. First, the irregular curve matching in the landing image is completed by constructing the irregular curve descriptor. Second, the constraint relationship between the position attitude and the point-tangent is established. Then, the curve parameterization method is used to solve the higher order equations, and the constraint conditions are used to obtain the unique solution of position attitude parameters and the least squares solution of multiple matching curves. Finally, the influence of noise intensity and the number of matching curves on the navigation accuracy is verified by simulation, and the feasibility of the algorithm is proved.

asteroid landing, visual navigation, irregular curve matching, curve integral

PACS: 96.35.-j, 96.35.Gt, 42.30.Tz, 96.30.Ys

doi: [10.1360/SSPMA-2020-0388](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2020-0388)