中国科学

1983 年 1 月　　A 辑　　第 1 期

指数级数及幂级数的一些拟必然性质

余　家　荣

(武汉大数学系学)

摘　　要

本文研究指数级数 $\sum a_n e^{i\omega_n} e^{-\lambda_n s}$ 及 $\sum \pm a_n e^{-\lambda_n s}$ 的一些拟必然性质. 在一定条件下,它们拟必然以收敛轴即虚轴上每一点为 Picard 点或 Borel 点. 在一定条件下,幂级数 $\sum a_n e^{i\omega_n} z^n$ 及 $\sum \pm a_n z^n$ 拟必然以收敛圆,即 $|z| = 1$ 上每一点为至少 $k(>0)$ 级的 Hadamard 点.

从 Borel 及 Steinhaus 的想法出发, Paley 及 Zygmund[1] 证明了指数级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{i\omega_n} e^{-\lambda_n s}, \tag{1}$$

及

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \pm a_n e^{-\lambda_n s} \tag{2}$$

几乎必然有相同的收敛半平面,且几乎必然其收敛轴为自然边界,这里 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \uparrow +\infty$, $s = \sigma + it$, σ 及 t 为实变数, a_n 为复常数,(2) 式的各项中的 ± 号以及 (1) 式的各项中的 $\omega_n \in [0, 2\pi]$ 都是任意取的.

在条件

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log n}{\lambda_n} < +\infty$$

下,应用 Paley 及 Zygmund 的结果,作者[2]证明了: 当级数 (1) 及 (2) 定义整函数时,几乎必然有下列结果: i) 函数在每个水平带形中的增长性与在全平面的增长性相同. ii) 在有限正 (R) 级情形下,函数在足够宽的每一水平带形中必有一水平 Borel 线; 在无穷 (R) 级情形下,每一水平直线为函数的 Borel 线. 对于在半平面收敛的级数(1)及 (2),作者[3,4]得到了相应的结果.

在讨论几乎必然性质时,把(1) 或 (2)式中每一级数看作一个概率空间中的一点. 我们也可把它看作一个紧拓扑空间中的一点; 对这空间中一个第二类 Baire 集成立的性质,称为"拟必然"("quasi-sure", 简写为 "q. s.")性质. 文献[5,6]曾经证明: 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ 有实系数,且有有限的收敛轴 $\sigma = \alpha$,那么级数 (2) 拟必然以 $\sigma = \alpha$ 为自然边界. 在本文中要证明: 当

本文 1981 年 9 月 12 日收到.

$\{\lambda_n\}$ 满足一定条件时，级数 (1) 及 (2) 的一些几乎必然性质也都是拟必然性质．我们还研究幂级数在收敛圆上 Hadamard 奇异级的相应问题．

一、两个紧拓扑空间

为了论证方便起见，我们先叙述一些已知结果[7]．设 Ω_k 为 $[0, 2\pi]$ (0 及 2π 看作一点)或 $\{-1, 1\}$．令 $\Omega = \bigtimes_{k=1}^{+\infty} \Omega_k$，并记 Ω 中的元素为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots)$，其中 $\omega_k \in \Omega_k$．Ω 中的区间 I 定义为：存在着某一正整数 n，使

$$I = \left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k\right) \times \left(\bigtimes_{k=n+1}^{+\infty} \Omega_k\right).$$

这里在 $\Omega_k = [0, 2\pi]$ 情形，I_k 为 Ω_k 中一(开)区间或 Ω_k 本身；在 $\Omega_k = \{-1, 1\}$ 情形，I_k 为 ± 1 或 Ω_k 本身．

已给 Ω 中的点列 $\{\omega^{(n)}\} = \{(\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \cdots)\}$ 及一点 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots)$．如果当 $n \to +\infty$ 时，$\omega_k^{(n)} \to \omega_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$，则称点列 $\{\omega^{(n)}\}$ 收敛于极限点 ω，记作 $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega_n = \omega$，或 $\omega^{(n)} \to \omega$ $(n \to +\infty)$．可以证明，$\{\omega^{(n)}\}$ 收敛于 ω 的充要条件是：对于含 ω 的任何区间 I，当 n 充分大时，$\omega^{(n)} \in I$．

如果 $A(\subset\Omega)$ 中任何收敛点列的极限点属于 A，则称 A 为闭集．如果集 $B(\subset\Omega)$ 的余集为闭集，则称 B 为开集．可以证明，$B(\subset\Omega)$ 为开集的充要条件是：对任何 $\omega \in B$，存在着一个含 ω 的区间 $I \subset B$．

这样引进拓扑后，Ω 就成为一个紧拓扑空间．

设实值函数 $g(\omega) = g(\omega_1, \omega_2, \cdots)$ 在 Ω 上有定义．如果对于 Ω 中任一点 ω^* 及任一点列 $\omega^{(n)} \to \omega^* (n \to \infty)$，$g(\omega^{(n)}) \to g(\omega^*)$，则称 $g(\omega)$ 在 Ω 上连续．可以证明，如果 $g(\omega)$ 在 Ω 上连续，那么对于任何实数 a，$\{\omega | g(\omega) \leqslant a\}$ 为闭集，$\{\omega | g(\omega) > a\}$ 为开集．关于复值函数有相应的定义及结果．

设 $\pi(\omega)$ 是关于 $\omega \in \Omega$ 的一个命题．如果在 Ω 中可数个稠密开集的交集上，$\pi(\omega)$ 成立，则称 $\pi(\omega)$ 拟必然 (q. s.) 成立．

二、指数级数的增长性及值的分布

设 $\{a_n\}$ 及 $\{\lambda_n\}$ 同前，并且

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\log |a_n|}{\lambda_n} = 0, \tag{3}$$

则指数级数

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{4}$$

以 $\sigma > 0$ 为收敛及绝对收敛半平面．令

$$M(\sigma) = \sup_{-\infty < t < +\infty} |f(\sigma + it)| \quad (\sigma > 0).$$

函数 $f(s)$ 在 $\sigma > 0$ 内的 (R) 级是

$$\rho = \varlimsup_{\sigma\to+0} \frac{\log^+\log^+ M(\sigma)}{-\log\sigma}.$$

在 $\rho=+\infty$ 情形，仿照熊庆来的方法，引进正增函数 $\rho(r)$ 及 $U(r)$ $(r>0)$，使

$$\lim_{r\to+\infty}\rho(r)=+\infty,\quad U(r)=r^{\rho(r)},$$

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\log U(r')}{\log U(r)}=1,\text{ 对于 } r'=r+\frac{r}{\log U(r)}.$$

如果

$$\varlimsup_{\sigma\to+0}\frac{\overset{+}{\log}\overset{+}{\log} M(\sigma)}{\log U\left(\frac{1}{\sigma}\right)}=1,$$

则称 $\rho\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ 为 $f(r)$ 在 $\sigma>0$ 内的 $(R\text{-}H)$ 级．当

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{n}{\lambda_n}=D<+\infty \tag{5}$$

时，我们可得到 ρ 或 $\rho(r)$ 与级数 (4) 式的系数及指数的关系[3,9]1)．

还可进一步考虑 $\rho=0$ 情形．当 (2.3) 式成立时，我们有

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\overset{+}{\log}|a_n|}{\log\lambda_n}\leqslant\varlimsup_{\sigma\to+0}\frac{\overset{+}{\log} M(\sigma)}{-\log\sigma}\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\overset{+}{\log}|a_n|}{\log\lambda_n}+1. \tag{6}$$

先证明 (2.4) 式中第一个不等式．令

$$\varlimsup_{\sigma\to+0}\frac{\overset{+}{\log} M(\sigma)}{-\log\sigma}=k.$$

考虑 $0\leqslant k<+\infty$ 情形，任给 $\varepsilon>0$，存在着 $\sigma_0>0$，使当 $0<\sigma<\sigma_0$ 时，

$$M(\sigma)<\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{k+\varepsilon},$$

从而对任何正整数 n，

$$|a_n|e^{-\lambda_n\sigma}<\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{k+\varepsilon},$$

$$\overset{+}{\log}|a_n|<(k+\varepsilon)\log\frac{1}{\sigma}+\lambda_n\sigma.$$

当 n 充分大时，取 $\sigma=\frac{1}{\lambda_n}$，于是

$$\overset{+}{\log}|a_n|<(k+\varepsilon)\log\lambda_n+1,$$

因而

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\overset{+}{\log}|a_n|}{\log\lambda_n}<k+\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，(6)式中第一个不等式($0\leqslant k<+\infty$ 情形)得证．这一不等式在 $k=+\infty$ 时显然成立．

其次，证明 (6) 式中第二个不等式．令

---

1) 在文献 [8, 9] 中，只提出了条件(3)．而为了得到这里提到的结果以及文献 [3, 4] 中其他有关结果，必须加上条件(5)式．事实上，在文献 [3]，第 107 页上，为了得到 $\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\lambda_n\sigma\varepsilon}=O\left(\frac{1}{\varepsilon\sigma}\right)$ $(\sigma\to+0)$，必须加上条件 (5) 式．

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\log^{+}|a_n|}{\log\lambda_n}=k'.$$

考虑 $0\leqslant k'<+\infty$ 情形，任给 $\varepsilon>0$，存在着 $N>0$，当 $n>N$ 时，$|a_n|<\lambda_n^{k'+\varepsilon}$. 我们有

$$\begin{aligned}M(\sigma)&\leqslant\sum_{n=1}^{N}|a_n|e^{-\lambda_n\sigma}+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\lambda_n^{k'+\varepsilon}e^{-\lambda_n\sigma(1-\varepsilon)}e^{-\lambda_n\varepsilon\sigma}\\&\leqslant\sum_{n=1}^{N}|a_n|e^{-\lambda_n\sigma}+\sup_{N+1\leqslant n<+\infty}\{\lambda_n^{k'+\varepsilon}e^{-\lambda_n\sigma(1-\varepsilon)}\}\sum_{n=N+1}^{+\infty}e^{-\lambda_n\varepsilon\sigma}\\&\leqslant\sum_{n=1}^{N}|a_n|e^{-\lambda_n\sigma}+\exp\left[(k'+\varepsilon)\log\frac{k'+\varepsilon}{\sigma(1-\varepsilon)}-(k'+\varepsilon)\right]O\left(\frac{1}{\varepsilon\sigma}\right)(\sigma\to+0)^{1)}.\end{aligned}$$

由此导出(6)式中第二个不等式 ($0\leqslant k'<+\infty$ 情形). 这一不等式在 $k'=+\infty$ 时显然成立. 由前段证明,(6)式中第一个不等式在 $k'=+\infty$ 时也成立.由本段证明,第二个不等式在 $k'=+\infty$ 时成立. (6) 式证完.

如果不但 (5) 式成立,而且

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{n}{\log\lambda_n}=E<+\infty,\tag{7}$$

那么

$$\overline{\lim_{\sigma\to+0}}\frac{\log^{+}M(\sigma)}{-\log\sigma}=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\log^{+}|a_n|}{\log\lambda_n}.\tag{8}$$

由 (6) 式的证明，可见在条件 (5) 下，从而在条件 (7) 下，(8) 式在一边为 $+\infty$ 时成立. 考虑到(6)式,为了完成(8)式的证明,只须证明在这式右边 $=k'<+\infty$ 情形下,其右边 $\leqslant k'$.

与前面证明一样,任给 $\varepsilon>0$，存在着正整数 N，使得

$$\begin{aligned}M(\sigma)&\leqslant\sum_{n=1}^{N}|a_n|e^{-\lambda_n\sigma}+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\lambda_n^{k'+2\varepsilon}e^{-\lambda_n\sigma}e^{-\varepsilon\log t_n}\\&\leqslant\sum_{n=1}^{N}|a_n|e^{-\lambda_n\sigma}+\sup_{N+1\leqslant n<+\infty}[\lambda_n^{k'+2\varepsilon}e^{-\lambda_n\sigma}]\sum_{n=N+1}^{+\infty}e^{-\varepsilon\log t_n}\\&\leqslant\sum_{n=1}^{N}|a_n|e^{-\lambda_n\sigma}+\exp\left[(k'+2\varepsilon)\log\frac{k'+2\varepsilon}{\sigma}-(k'+2\varepsilon)\right]O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(\sigma\to+0)^{2)}.\end{aligned}$$

由此可推出 (8) 式的左边 $\leqslant k'$. (8)式证完.

设 $\{a_n\}$ 及 $\{\lambda_n\}$ 与前面一样,满足 (3) 及 (5) 式. 于是指数级数

$$f_1(s;\omega)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_ne^{i\omega_n}e^{-\lambda_ns}\quad(\omega_n\in\Omega_n=[0,2\pi])\tag{9}$$

及

---

1) 容易证明，$x^{k'+\varepsilon}e^{-x\sigma(1-\varepsilon)}$ $(x>0)$ 在 $x=\dfrac{k'+\varepsilon}{\sigma(1-\varepsilon)}$ 达到最大值 $\exp\left[(k'+\varepsilon)\log\dfrac{k'+\varepsilon}{\sigma(1-\varepsilon)}-(k'+\varepsilon)\right]$.

此外,由 (5) 式,可找到正数 k，使得 $\lambda_n>n/k$ $(n=1,2,\cdots)$. 因此

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}e^{-\lambda_n\varepsilon\sigma}<\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{\varepsilon\sigma}{k}n}=\frac{1}{1-e^{-\varepsilon\sigma/k}}=O\left(\frac{1}{\varepsilon\sigma}\right)(\sigma\to+0).$$

2) 比较第 9 页上底注.

$$f_2(s;\omega)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\omega_n e^{-\lambda_n s}\quad(\omega_n\in\Omega_n\in\{-1,1\}).\tag{10}$$

以 $\sigma>0$ 为收敛及绝对收敛半平面．令

$$M_l(\sigma;\omega)=\sup_{-\infty<t<+\infty}|f_l(\sigma+it;\omega)|,\ (\sigma>0;\ l=1,2),$$

$$M_l(\sigma,\alpha,\beta;\omega)=\sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|f_l(\sigma+it;\omega)|,$$

其中 α 及 β 是满足 $\alpha<\beta$ 的任意两实数．

与前面一样，我们可分别确定 $f_l(s;\omega)$ 在 $\sigma>0$ 内的 (R) 级及 $(R\text{-}H)$ 级．由文献[3，4]中的结果，这些级与 l 及 ω 无关；当 (7) 式成立时，由 (8) 式，

$$\varlimsup_{\sigma\to+0}\frac{\log^+ M_l(\sigma;\omega)}{-\log\sigma},$$

也与 l 及 ω 无关．

定理 2.1．设级数 (9) 及 (10) 式满足 (3) 及 (4) 式，并且

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\log^+\log^+|a_n|}{\log\lambda_n}=\frac{\rho}{\rho+1}$$ $(0\leqslant\rho\leqslant+\infty)$，其中当 $\rho=+\infty$ 时，$\frac{\rho}{\rho+1}$ 应为 1．那么 $f_l(s;\omega)$ $(\omega\in\Omega;\ l=1,2)$ q. s. 具有下列性质：

i) 对任何实数 α 及 β $(\alpha<\beta)$，

$$\varlimsup_{\sigma\to+0}\frac{\log^+\log^+ M_l(\sigma,\alpha,\beta;\omega)}{-\log\sigma}=\rho.\tag{11}$$

ii) 当 $0<\rho<+\infty$ 时，收敛轴 $\sigma=0$ 上任一点是至少 ρ 级、至多 $\rho+1$ 级的 Borel (R) 点．

证．现证明 i)，先证 $l=1$ 情形．i) 中结论在 $\rho=0$ 时显然成立．设 $0<\rho<+\infty$．把 $\{e^{i\omega_n}\}$ 看作 Steinhaus 序列．那么 $f_1(s;\omega)$ a. s. 具有性质 i)．取一点 $\omega=\omega'\in\Omega$，使其满足 (11) 式[3]1)．

把全体有理数排成序列 $\{t_m\}$，则存在着 $\{s_{pm}=\sigma_{pm}+it_{pm}\}$，使 $\sigma_{pm}\downarrow 0$，$t_{pm}\to t_m$ $(p\to+\infty)$，

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\log^+\log^+|f_1(s_{pm};\omega')|}{-\log\sigma_{pm}}=\rho.$$

事实上，取 $\eta_p\downarrow 0$ $(\eta_p<\rho)$，$\varepsilon_p\downarrow 0$．由于 (11) 式在 $\omega=\omega'$，$\alpha=t_m-\eta_p$，$\beta=t_m+\eta_p$ 时成立，存在着 $s_{pm}(\sigma_{pm}>0,\ t_m-\eta_p\leqslant t_{pm}\leqslant t_m+\eta_p)$，使

$$\log^+|f_1(s_{pm};\omega')|=\log^+ M_1(\sigma_{pm},t_m-\eta_p,t_m+\eta_p;\omega')>\left(\frac{1}{\sigma_{pm}}\right)^{\rho-\eta_p}.$$

显然可取 $\sigma_{pm}\downarrow 0$．

令

---

1) 在文献 [3] 定理 4.1 的证明中，应将所有半带形 $B_{\alpha\beta}=\{s|\sigma>0,\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$ (其中 α 及 β 为有理数) 排成一序列 $\{B_{\alpha_j\beta_j}\}$．由于 $A_j=\left\{\omega\left|\varlimsup_{\sigma\to+0}\frac{\log^+\log^+ M_1(\sigma,\alpha_j,\beta_j;\omega)}{-\log\sigma}=\rho\right.\right\}$ 的概率为 1，可见 $\bigcap_{j=1}^{+\infty}A_j$ 的概率也是 1.

$$G_{mn}=\bigcup_{p=n}^{+\infty}\left\{\omega\,\Big|\,|f_1(s_{pm};\omega)|>\frac{1}{2}|f_1(s_{pm};\omega')|\right\}.$$

它是可列个开集的并集，因而也是开集．现证 G_{mn} 在 Ω 内处处稠密．Ω 中任何开集必含一区间 $I=\{\omega|\omega_1\in I_1,\ \omega_2\in I_2,\cdots,\omega_q\in I_q\}$，其中 $I_1,\cdots,I_q$ 是 $[0,2\pi]$ 中的区间．只需证 $G_{mn}\cap I\neq\phi$．

选取 p_1，使 $p\geqslant p_1$ 时，$\sum_{j=1}^{q}|a_j|<\frac{1}{4}|f_1(s_{pm};\omega')|$．在 I 中选取 $\omega^*=(\omega_1^*,\omega_2^*,\cdots)$，使 $\omega_1^*\in I_1,\cdots,\omega_q^*\in I_q$，$\omega_{q+1}^*=\omega'_{q+1}$，$\omega_{q+2}^*=\omega'_{q+2},\cdots$ 于是

$$f_1(s_{pm};\omega^*)=\sum_{j=1}^{+\infty}a_je^{i\omega_j^*}e^{-\lambda_js_{pm}}$$

$$=\sum_{j=1}^{+\infty}a_je^{i\omega'_j}e^{-\lambda_js_{pm}}-\sum_{j=1}^{q}a_je^{i\omega'_j}e^{-\lambda_js_{pm}}+\sum_{j=1}^{q}a_je^{i\omega_j^*}e^{-\lambda_js_{pm}}.$$

因而

$$|f_1(s_{pm};\omega^*)|>|f_1(s_{pm};\omega')|-\frac{1}{2}|f_1(s_{pm};\omega')|$$

$$=\frac{1}{2}|f_1(s_{pm};\omega')|\quad(p\geqslant p_1).$$

由此可见，$\omega^*\in G_{mn}$，亦即 $G_{mn}\cap I\neq\phi$．

当 $\omega^{**}\in\bigcap_{m=1}^{+\infty}\bigcap_{n=1}^{+\infty}G_{mn}$ 时，对任何正整数 m，由 $\omega^{**}\in G_{m1}$，存在着 p_1，使

$$\omega^{**}\in\left\{\omega\,\Big|\,|f_1(s_{p_1m};\omega)|>\frac{1}{2}|f_1(s_{p_1m};\omega')|\right\}.$$

由 $\omega^{**}\in G_{m,p_1+1}$，存在着 $p_2>p_1$，使

$$\omega^{**}\in\left\{\omega\,\Big|\,|f_1(s_{p_2m};\omega)|>\frac{1}{2}|f_1(s_{p_2m};\omega')|\right\}.$$

依此类推，可见存在着严格递增正整数序列 $\{p_j\}$，使

$$|f_1(s_{p_jm};\omega^{**})|>\frac{1}{2}|f_1(s_{p_jm};\omega')|.$$

于是

$$\varlimsup_{j\to\infty}\frac{\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}|f_1(s_{p_jm};\omega^{**})|}{\log(1/\sigma_{p_jm})}\geqslant\varlimsup_{j\to\infty}\frac{\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}|f_1(s_{p_jm};\omega')|}{\log(1/\sigma_{p_jm})}=\rho,$$

从而

$$\varlimsup_{j\to\infty}\frac{\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}|f_1(s_{p_jm};\omega^{**})|}{\log(1/\sigma_{p_jm})}=\rho.$$

因此对含 $\{s|\sigma>0,\ t=t_m\}$ 的任何水平半带形 $\{s|\sigma>0,\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$，(11) 式在 $l=1$，$\omega=\omega^{**}$，$0<\rho<+\infty$ 时成立．由于 $\{t_m\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处稠密，i) 在 $l=1$，$0<\rho<+\infty$ 情形下得证．仿照以上不难证明 $\rho=+\infty$ 情形．结论 i) 时 $l=2$ 也可同样作出证明．

利用 i)，按照文献 [3] 定理 4.4 可证明结论 ii)．

根据文献 [3] 系 4.1 与定理 4.3 以及文献 [4]，仿照定理 2.1 的证法，可以证明：

定理 2.2. 设级数 (9) 及 (10) 式满足 (3) 及 (5), 并且

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\log|a_n|}{\sqrt{\lambda_n}}=+\infty.$$

那么 $f_l(s;\omega)$ $(\omega\in\Omega;\ l=1,2)$ q. s. 具有下列性质:

i) 对任何实数 α 及 β $(\alpha<\beta)$.

$$\varlimsup_{\sigma\to+0}\sigma\log M_l(\sigma,\alpha,\beta;\omega)=+\infty.$$

ii) 收敛轴 $\sigma=0$ 上任一点为 $f_l(s;\omega)$ 的 Picard 点.

定理 2.3. 设级数 (9) 及 (10) 满足 (3) 及 (5) 式,并且

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log\lambda_n}{\log U(\lambda_n/\log|a_n|)}=1\quad(|a_n|>1),$$

这里 $\rho(r)$ 及 $U(r)=r^{\rho(r)}$ 是对(4)式中的 $f(s)$ 按照前述方式定义的. 那么 $f_l(s;\omega)(\omega\in\Omega;$ $l=1,2)$ q. s. 具有下列性质:

i) 对任何实数 α 及 β $(\alpha<\beta)$,

$$\varlimsup_{\sigma\to+0}\frac{\log\log M_l(\sigma,\alpha,\beta;\omega)}{\log U(1/\sigma)}=1.$$

ii) 收敛轴 $\sigma=0$ 上任一点是 $f_l(s;\omega)$ 的 $\rho(k/\sigma)$ 级 Borel (R-H) 点,这里 k 为一常数.

应用 (6) 及 (8) 式,可以证明:

定理 2.4. 设级数 (9) 及 (10) 式满足 (3) 及 (5) 式,并且

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|a_n|}{\log\lambda_n}=k>0.$$

那么 $f_l(s;\omega)$ $(\omega\in\Omega;\ l=1,2)$ q. s. 具有下列性质:

i)对任何实数 α 及 β $(\alpha<\beta)$,

$$k\leqslant\varlimsup_{\sigma\to+0}\frac{\log M_l(\sigma,\alpha,\beta;\omega)}{\log(1/\sigma)}\leqslant k+1. \tag{12}$$

ii) 如果 (7) 式成立,那么对任何实数 α 及 β $(\alpha<\beta)$,

$$\varlimsup_{\sigma\to+0}\frac{\log M_l(\sigma,\alpha,\beta;\omega)}{\log(1/\sigma)}=k.$$

当证明 i) 时,在级数(9)及(10)式中,先把$\{e^{i\omega_n}\}$及$\{\omega_n\}$分别看作 Steinhaus 序列及 Raclemacher 序列.于是仿照文献 [3] 定理 4.1 的证明,并注意第 1007 页的底注,可以得到: $f_l(s,\omega)$ a. s. 具有性质i),然后可以像定理 2.1 的证法一样,完成i)的证明. 应用同样的方法证明ii).

当级数 (9) 及 (10) 定义整函数时,也可得到与定理 2.1—2.4 相应的结果.

关于幂级数的相应结果可立即推出.

三、幂级数的奇异级

考虑收敛圆为单位的幂级数

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n, \tag{13}$$

于是 $F(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析. Hadamard[8,9] 定义了 $F(z)$ 在收敛圆上、在收敛圆的一段弧或一个点上的奇异级. 收敛圆上具有奇异级 k 的点称为 k 级 Hadamard 点.

Hadamard 证明了 $F(z)$ 在收敛圆上的奇异级为:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|a_n|}{\log n}+1.$$

如果它大于 1, 由 (6) 式,我们有

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\log|a_n|}{\log n}\leqslant\varlimsup_{r\to1-0}\frac{\log\mathscr{M}(r)}{-\log(1-r)}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|a_n|}{\log n}+1, \tag{14}$$

这里

$$\mathscr{M}(r)=\max_{|z|=r}|F(z)|\,(0<r<1).$$

Hadamard 还证明了: 如果 $F(z)$ 在弧 $\Gamma=\{e^{i\varphi}|\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2\}$ 上的奇异级为 ξ, 那么对任何 $\xi_1>\xi$,

$$\lim_{r\to1-0}(1-r)^{\xi_1}\mathscr{M}(r,\varphi_1,\varphi_2)=0, \tag{15}$$

$$\lim_{r\to1-0}(1-r)^{\xi_1}I_r=0, \tag{16}$$

这里

$$\mathscr{M}(r,\varphi_1,\varphi_2)=\max_{\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2}|F(re^{i\varphi})|\,(0<r<1),$$

I_r 是 $F(re^{i\varphi})$ 在弧 $\Gamma_r=\{re^{i\varphi}|\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2\}$ 上的偏差 (écart). $F(z)$ 在 $|z|=1$ 上一个 Hadamard 点的级是含逐点的所有圆弧上的奇异级的下确界.

考虑幂级数

$$F_1(z;\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{i\omega_n}z^n\quad(\omega_n\in\Omega_n=[0,2\pi]), \tag{17}$$

及

$$F_2(z;\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\omega_nz^n\quad(\omega_n\in\Omega_n=\{-1,1\}), \tag{18}$$

其中 $\{a_n\}$ 与 (13) 式的 $\{a_n\}$ 相同, $\omega\in\Omega^{(0)}=\bigtimes_{n=0}^{+\infty}\Omega_n$. 显然, $F_l(z;\omega)$ $(\omega\in\Omega^{(0)};\ l=1,2)$ 在 $|z|=1$ 上有相同的奇异级.

令

$$\mathscr{M}_l(r;\omega)=\max_{0\leqslant\varphi\leqslant2\pi}|F_l(re^{i\varphi};\omega)|,$$

$$\mathscr{M}_l(r,\varphi_1,\varphi_2;\omega)=\max_{\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2}|F_l(re^{i\varphi};\omega)|\quad(0<r<1).$$

如果 $F_l(z;\omega)$ 在 $|z|=1$ 上有奇异级 $k_1+1>1$, 那么由 (6) 式,有

$$k\leqslant\varlimsup_{r\to1-0}\frac{\log\mathscr{M}_l(r;\omega)}{-\log(1-r)}\leqslant k+1;$$

又由 (12) 式, $F_l(z;\omega)$ $(\omega\in\Omega^{(0)};\ l=1,2)$ q.s. 具有下列性质: 对任何 φ_1 及 $\varphi_2\in[0,2\pi]$ $(\varphi_1<\varphi_2)$,

$$k\leqslant\varlimsup_{r\to1-0}\frac{\log\mathscr{M}_l(r,\varphi_1,\varphi_2;\omega)}{-\log(1-r)}\leqslant k+1.$$

由此可见,对任何 $\varepsilon(0<\varepsilon<k)$, 以及任何 φ_1 及 $\varphi_2\in[0,2\pi]$ $(\varphi_1<\varphi_2)$,

$$\overline{\lim_{r\to 1-0}}\,(1-r)^{k-\varepsilon}\mathscr{M}_l(r,\varphi_1,\varphi_2;\omega)=+\infty,$$

于是 $|z|=1$ 的任何弧上的奇异级 $\geqslant k$. 由此得:

定理 3.1. 设级数 (17) 及 (18) 的收敛半径为 1, 并且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|a_n|}{\log n}=k>0.$$

那么 $F_l(z;\omega)$ 在 $|z|=1$ 上的奇异级为 $k+1$ $(\omega\in\Omega^{(0)};\ l=1,2)$, 并且它们 q. s. 具有这一性质: $|z|=1$ 上每一点是至少 k 级的 Hadamard 点.

参 考 文 献

[1] Paley, R. E. A. C. & Zggmund, A., *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **28**(1931—1932), 190—205.
[2] 余家荣 (Yu Chia-gung), *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3e séric, **68**(1951), 65—104.
[3] ————, 数学学报, **21** (1978), 97—118.
[4] ————, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **288**(1979), Sér. A, 891—893.
[5] Kahane, J.-P., *ibid.*, **276**(1973), Sér. A, 739—742.
[6] Queffelec, H., *Analyse Harmonique d'Orsay*, 1975, No. 16.
[7] Jessen, B., *Acta Math.*, **63**(1934), 249—323.
[8] Dienes, P., *The Taylor Series*, U. S. A., Dover, 1957.
[9] Mandblbrojt, S., *The Rice Inst. Pamphlct*, **14**(1927), Chap. VII; Selecta Paris Gauthier-Villars, 1981.