

基于 Schweizer-Sklar T -范数的 模糊逻辑系统*

张小红^{1,2**} 何华灿² 徐 扬³

(1. 宁波大学理学院, 宁波 315211; 2. 西北工业大学计算机学院, 西安 710072; 3. 西南交通大学
应用数学系, 成都 610031)

摘要 基于 Schweizer-Sklar T -范数, 提出了一个新的模糊逻辑形式系统 UL^* , 证明了系统 UL^* 的可靠性和完备性, 并指出著名的 $SBL_{\sim}$ 系统是 UL^* 的语义扩张, 而 $IMTL_{\Delta}$ 系统是 UL^* 当两个“非”运算重合时的特例. 最后分析了 UL^* 系统与其他模糊逻辑形式系统的关系, 并从 Yager 的“与度”、Whalen 的“模糊规则交互作用的强度”概念出发, 说明了系统 UL^* 中参数 p 的含义及其在近似推理中的应用.

关键词 T -范数 模糊逻辑系统 UL^* 完备性 模糊逻辑系统 MTL 近似推理

近年来, 模糊逻辑和模糊推理的基础研究日趋活跃, 如 Hajek 提出了基础逻辑系统 BL (见文献[1]), Esteva 与 Godo 提出了模糊逻辑系统 MTL (见文献[2]), 应明生深入研究了模糊推理、蕴涵算子 (见文献[3, 4]) 以及模糊量词, 王国俊建立了模糊逻辑的形式演绎系统 L^* , 创建了较 CRI 方法更有效的模糊推理三 I 算法及新型三 I 算法 (见文献[5~7]) 等.

在模糊逻辑中, 选择怎样的蕴涵算子对模糊推理的效果有直接影响. 由于 T -范数较好地反映了逻辑“与”的性质, 因而模糊逻辑系统中所选择的蕴涵算子基本上都与某种 T -范数相伴. 然而要刻画人们日常推理中的灵活性 (或柔性), 选择带参数的 T -范数似乎更为合理. 事实上, Klement 与 Navara 在文献[8]中就研究了基于带参数的 T -范数——Frank T -范数的模糊逻辑系统; 吴望名和王国俊等分别在文献[9, 10]中研究了带参数的 Kleene 系统和 H_{α} 系统; Whalen 在长达 50 页的文献[11]中研究了由 Schweizer-Sklar T -范数导出的剩余蕴涵簇, 并将其中的参数 p

2005-06-15 收稿, 2005-08-26 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目 (批准号: 60273087, 60474022) 和宁波市青年基金资助项目 (编号: 2005A620032)

** E-mail: zxhonghz@263.net

与模糊规则之间交互作用的强度联系起来. 这些正是本文形式地研究基于 Schweizer-Sklar T -范数的模糊逻辑系统的出发点.

本文首先研究了 Schweizer-Sklar T -范数及其剩余蕴涵的性质, 随后基于 Schweizer-Sklar T -范数, 提出了一个新的模糊逻辑形式系统 UL^* , 证明了系统 UL^* 的可靠性和完备性, 并指出著名的 SBL_{Δ} 系统(见文献[12])可看成是 UL^* 的语义扩张, 而 $IMTL_{\Delta}$ 系统(添加了投影算子 Δ 后系统 $IMTL$ 的扩张形式)是 UL^* 的特例. 最后分析了 UL^* 系统与其他模糊逻辑形式系统的关系, 指出 UL^* 系统中投影算子 Δ 在非可换模糊逻辑形式化中可能的作用, 并从 Yager 的“与度”(见文献[13])、Whalen 的“模糊规则交互作用的强度”出发, 说明了系统 UL^* 中参数 p 的含义及其在近似推理中的应用.

值得指出的是, 在模糊逻辑系统 UL^* 中, 逻辑非“ $-$ ”是对合的, 但“ $-$ ”与“ $\neg$ ”是相互独立的, 这里“ $\neg$ ”的含义是“ $\neg A = A \rightarrow_p 0$ ”. 另外, 尽管 UL^* 中有算子 $\&$, 但它不是“逻辑与”, $\&_p$ 才是“逻辑与”的抽象. 文献[14]中给出一般模糊推理的形式化定理, 体现了模糊逻辑与模糊推理相结合的研究思路, 文中充分运用了运算“ $\otimes$ ”, 而它相当于这里的 $\&_p$ (刻画的是 T -范数的特征). 本文通过对含参 T -范数中参数的合理解释, 以反映模糊推理中的柔性(实际上有众多的学者在研究带参数的模糊逻辑控制, 如文献[15~17, 24]), 这可能是模糊逻辑与模糊推理相结合的新途径.

1 Schweizer-Sklar T -范数及其剩余蕴涵

Schweizer 与 Sklar 在文献[18, 19]中提出如下 T -范数定义(也可参见文献[11, 20]):

$$T_p^{SS}(x, y) = \begin{cases} (x^{-p} + y^{-p} - 1)^{-\frac{1}{p}}, & p \in (0, \infty), \\ \begin{cases} (x^{-p} + y^{-p} - 1)^{-\frac{1}{p}}, & x^{-p} + y^{-p} \geq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} & p \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

在 $p > 0$ 时 $(x^{-p} + y^{-p} - 1)$ 可能无意义, 如 $x = 0$ 或 $y = 0$ 时 0 出现在分母上. 此时, 令其对应的 T -范数值为 0. 对于 $p \rightarrow -\infty, p \rightarrow 0, p \rightarrow \infty$, Schweizer-Sklar T -范数定义为

$$T_{-\infty}^{SS}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0, 1) \times [0, 1), \\ \min(x, y), & \text{其他}, \end{cases}$$

$$T_{\infty}^{SS}(x, y) = \min(x, y), \quad T_0^{SS}(x, y) = xy.$$

定义 1.1^[5] 设 P 是偏序集, P 上的二元运算 $\otimes$ 与 $\rightarrow$ 叫做互为伴随, 若以下条件成立:

(M0) $\otimes: P \times P \rightarrow P$ 是单调递增的;

(R0) $\rightarrow: P \times P \rightarrow P$ 关于第一个变量是不增的, 关于第二个变量是不减的;

(A) $a \otimes b \leq c$ 当且仅当 $a \leq b \rightarrow c$, $a, b, c \in P$,

这时 $(\otimes, \rightarrow)$ 叫做 P 上的伴随对.

称与 T -范数 $\otimes$ 相伴的运算 $\rightarrow$ 为剩余蕴涵. 容易证明, Schweizer-Sklar T -范数对应的剩余蕴涵为(见文献[11])

$$I_p^{SS}(x, y) = \min(1, (1 - x^{-p} + y^{-p})^{-\frac{1}{p}}), \quad p \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty);$$

$$I_0^{SS}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ y/x, & \text{其他}, \end{cases} \quad I_\infty^{SS}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ y, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$I_{-\infty}^{SS}(x, y) = \begin{cases} y, & x = 1, \\ 1, & \text{其他}. \end{cases}$$

注 1 对于 $p \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 时, 文献[11]中没有对若干特殊点进行讨论, 这使得最后的剩余蕴涵表达式出现歧义. 为此, 特作以下分析:

1) 当 $p > 0$ 时, $I_p(x, 0) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$ 这是因为, 按照剩余蕴涵的定义 $0 \rightarrow 0 = \sup\{z | T_p(0, z) \leq 0\} = \sup\{z | 0 \leq 0\} = 1$. 而当 $x \neq 0$ 时, $x \rightarrow 0 = \sup\{z | T_p(x, z) \leq 0\} = \sup\{z | T_p(x, z) = 0\} = 0$, 因为 $p > 0$, $x \neq 0$ 时, 只有 $z = 0$ 满足 $T_p(x, z) = 0$.

2) 当 $p > 0$ 时, $1 - x^{-p} + y^{-p}$ 可能非正(如 $1 - 0.1^{-2} + 0.5^{-2} = -95$, $1 - 0.2^{-1} + 0.25^{-1} = 0$). 此时, 按照剩余蕴涵的定义易得 $I_p(x, y) = 1$ (实际上, 此时必有 $x < y$).

当然, 也可以仍用一个表达式 $I_p(x, y) = \min(1, (1 - x^{-p} + y^{-p})^{-\frac{1}{p}})$, $p \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 来表示与 Schweizer-Sklar T -范数相伴的剩余蕴涵, 但需要作如下约定($p > 0$): $I_p(0, 0) = 1$; $x \neq 0$ 时 $I_p(x, 0) = 0$; 如果 $(1 - x^{-p} + y^{-p})$ 非正, $I_p(x, y) = 1$.

以下用 $\otimes_p$ 表示 Schweizer-Sklar T -范数, $\rightarrow_p$ 是其对应的剩余蕴涵. 据 $(\otimes_p, \rightarrow_p)$ 为伴随对, 应用文献[5]中命题 7.2.3, 定理 7.2.8, 7.2.10 (或直接验算) 易得如下定理.

定理 1.2 对于任何实数 p 及 $\forall x, y, z \in [0, 1]$ 有

$$(SS1) \quad x \otimes_p y = y \otimes_p x;$$

$$(SS2) \quad (x \otimes_p y) \otimes_p z = x \otimes_p (y \otimes_p z);$$

$$(SS3) \quad 1 \rightarrow_p x = x, 1 \otimes_p x = x;$$

$$(SS4) \quad x \leq y \text{ 当且仅当 } x \rightarrow_p y = 1;$$

$$(SS5) \quad x \rightarrow_p y \leq (z \rightarrow_p x) \rightarrow_p (z \rightarrow_p y);$$

$$(SS6) \quad (x \otimes_p y) \rightarrow_p z = x \rightarrow_p (y \rightarrow_p z);$$

$$(SS7) \quad a \otimes_p (\bigvee_i x_i) = \bigvee_i (a \otimes_p x_i), \quad a \rightarrow_p \bigwedge_i y_i = \bigwedge_i (a \rightarrow_p y_i), \quad (\bigvee_i y_i) \rightarrow_p a = \bigwedge_i (y_i \rightarrow_p a);$$

$$(SS8) \quad x \rightarrow_p y \leq (x \otimes_p z) \rightarrow_p (y \otimes_p z);$$

$$(SS9) \quad (x \rightarrow_p y) \vee (y \rightarrow_p x) = 1, \quad (x \otimes_p (x \rightarrow_p y)) \leq x \wedge y, \quad (x \rightarrow_p y) \rightarrow_p z \leq ((y \rightarrow_p x) \rightarrow_p z) \rightarrow_p z,$$

其中 $\rightarrow_p$, $\otimes_p$ 分别为上、下确界运算.

现引入如下 0-1 投影算子 Δ 及非算子 “ $-$ ”

$$\Delta x = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$-x = 1 - x,$$

则容易证明如下结果.

定理 1.3 对于任何实数 p 及 $\forall x, y, z \in [0, 1]$ 有

$$(SS10) \quad \Delta x \vee (\Delta x \rightarrow_p 0) = 1; \quad (SS11) \quad \Delta(x \vee y) \leq \Delta(x) \vee \Delta(y);$$

$$(SS12) \quad \Delta x \leq x, \Delta 1 = 1; \quad (SS13) \quad \Delta x \leq \Delta(\Delta x);$$

$$(SS14) \quad \Delta(x \rightarrow_p y) \leq \Delta x \rightarrow_p \Delta y; \quad (SS15) \quad -(-x) = x;$$

$$(SS16) \quad x \leq y \Rightarrow (-y) \leq (-x); \quad (SS17) \quad \Delta(x \rightarrow_p y) = \Delta((-y) \rightarrow_p (-x)).$$

注 2 一般地, $\Delta x \neq (-x) \rightarrow_p 0$, 如取 $p=2, x=0.4$, 则有 $\Delta x = 0, (-x) \rightarrow_p 0 = 0.8$.

这说明, 投影算子 Δ 不能像文献[12]那样定义为 $\Delta x = \neg \sim x$, 即不能定义为 $\Delta x = (-x) \rightarrow 0$.

2 模糊逻辑系统 UL^* 及其可靠性定理

以 Schweizer-Sklar T -范数及其剩余蕴涵为背景, 我们引入如下模糊逻辑系统 UL^* , 它可以看成 MTL 逻辑系统的扩张——附加一个新的对合否定 “ $-$ ” 及投影算子 “ Δ ” 的 MTL 逻辑系统.

定义 2.1 设 S 是无穷集, “ $-$ ” 和 “ Δ ” 是 S 上的一元运算, $\&_p, \rightarrow_p$ 是 S 上的二元运算, 0 为真值常量. $F(S)$ 是由 S 生成的 $(-, \Delta, \&_p, \rightarrow_p)$ 型自由代数. 称 $F(S)$ 中具有以下各种形式的公式为公理:

$$(UL1) \quad (A \rightarrow_p B) \rightarrow_p ((B \rightarrow_p C) \rightarrow_p (A \rightarrow_p C)); \quad (UL2) \quad (A \&_p B) \rightarrow_p A;$$

$$(UL3) \quad (A \&_p B) \rightarrow_p (B \&_p A); \quad (UL4) \quad (A \rightarrow_p B) \rightarrow_p (B \rightarrow_p A);$$

$$(UL5) \quad (A \rightarrow_p B) \rightarrow_p (B \rightarrow_p A); \quad (UL6) \quad (A \&_p (A \rightarrow_p B)) \rightarrow_p (A \rightarrow_p B);$$

(UL7) $((A \&_p B) \rightarrow_p C) \rightarrow_p (A \rightarrow_p (B \rightarrow_p C))$;

(UL8) $(A \rightarrow_p (B \rightarrow_p C)) \rightarrow_p ((A \&_p B) \rightarrow_p C)$;

(UL9) $((A \rightarrow_p B) \rightarrow_p C) \rightarrow_p (((B \rightarrow_p A) \rightarrow_p C) \rightarrow_p C)$;

(UL10) $0 \rightarrow_p A$;

(UL11) $(A \rightarrow_p (\neg A)) \&_p ((\neg A) \rightarrow_p A)$;

(UL12) $\Delta A \quad (\neg \Delta A)$;

(UL13) $\Delta(A \ B) \rightarrow_p (\Delta A \ \Delta B)$;

(UL14) $\Delta A \rightarrow_p A$;

(UL15) $\Delta A \rightarrow_p \Delta \Delta A$;

(UL16) $\Delta(A \rightarrow_p B) \rightarrow_p (\Delta A \rightarrow_p \Delta B)$;

(UL17) $\Delta(A \rightarrow_p B) \rightarrow_p \Delta((\neg B) \rightarrow_p (\neg A))$,

其中 $\neg A$ 是 $A \rightarrow_p 0$ 的简写, $A \ B$ 是 $((A \rightarrow_p B) \rightarrow_p B) \ ((B \rightarrow_p A) \rightarrow_p A)$ 的简写. 有下述两个推理规则:

MP 规则(分离规则)——由 A 和 $A \rightarrow_p B$ 推得 B .

必然推理规则——由 A 推得 ΔA .

由公式集 $F(S)$ 、公理(UL1)~(UL17)以及上述推理规则组成的系统称为 UL^* .

系统 UL^* 中的证明、定理等概念可以按文献[5]中的方法定义, 记号 $\vdash$ 的意义也同文献[5].

容易证明下面的结论(见文献[1, 2]或直接验证)成立.

定理 2.2 以下公式是系统 UL^* 的定理:

(T1) $A \rightarrow_p (B \rightarrow_p A)$;

(T2) $(A \rightarrow_p (B \rightarrow_p C)) \rightarrow_p (B \rightarrow_p (A \rightarrow_p C))$;

(T3) $A \rightarrow_p A$;

(T4) $(B \rightarrow_p C) \rightarrow_p (A \&_p B \rightarrow_p A \&_p C)$;

(T5) $A \&_p (B \&_p C) \rightarrow_p (A \&_p B) \&_p C, (A \&_p B) \&_p C \rightarrow_p A \&_p (B \&_p C)$;

(T6) $(B \rightarrow_p C) \rightarrow_p ((A \rightarrow_p B) \rightarrow_p (A \rightarrow_p C))$;

(T7) $(\neg A) \rightarrow_p A, A \rightarrow_p (\neg A)$;

(T8) $A \rightarrow_p (A \ B), B \rightarrow_p (A \ B)$;

(T9) $(A \&_p B) \rightarrow_p (A \ B), A \rightarrow_p (A \ A)$;

(T10) $(A \rightarrow_p B) \ (B \rightarrow_p A)$;

(T11) $(A \ B) \rightarrow_p (B \ A), (A \ B) \rightarrow_p (B \ A)$;

(T12) $((A \rightarrow_p C) \ (B \rightarrow_p C)) \rightarrow_p ((A \ B) \rightarrow_p C)$;

(T13) $((A \rightarrow_p B) \ (A \rightarrow_p C)) \rightarrow_p (A \rightarrow_p (B \ C))$.

定理 2.3 在系统 UL^* 中有

(T14) 若 $\vdash B \rightarrow_p C$, 则 $\vdash (A \rightarrow_p B) \rightarrow_p (A \rightarrow_p C)$;

(T15) 若 $\vdash A \rightarrow_p B$, 则 $\vdash (B \rightarrow_p C) \rightarrow_p (A \rightarrow_p C)$;

(T16) 若 $\Gamma = \{A \rightarrow_p B, B \rightarrow_p C\}$, 则 $\Gamma \vdash (A \rightarrow_p C)$;

(T17) 若 $\vdash A \rightarrow_p B$, 则 $\vdash (\neg B) \rightarrow_p (\neg A)$;

(T18) $\vdash A \rightarrow_p (B \rightarrow_p (A \rightarrow_p B))$;

(T19) 若 $\Gamma = \{A \rightarrow_p C, B \rightarrow_p C\}$, 则 $\Gamma \vdash (A \rightarrow_p B) \rightarrow_p C$.

定义 2.4 设 $A, B \in F(S)$, 如果 $\vdash A \rightarrow_p B$ 且 $\vdash B \rightarrow_p A$, 则称 A 与 B 可证等价, 记作 $A \approx B$.

定理 2.5 可证等价是 $F(S)$ 上的等价关系.

定理 2.6 可证等价关系 $\approx$ 是 $F(S)$ 上的 $(\neg, \Delta, \&_p, \rightarrow_p)$ 型同余关系, 即

(i) 若 $A \approx B$, 则 $(\neg A) \approx (\neg B)$.

(ii) 若 $A \approx B$, 则 $\Delta A \approx \Delta B$.

(iii) 若 $A \approx B$ 且 $C \approx D$, 则 $A \&_p C \approx B \&_p D$.

(iv) 若 $A \approx B$ 且 $C \approx D$, 则 $A \rightarrow_p C \approx B \rightarrow_p D$.

(v) 若 $A \approx B$ 且 $C \approx D$, 则 $A \rightarrow_p C \approx B \rightarrow_p D$.

定理 2.7 在系统 UL^* 中有如下的 De Morgan 律:

(T20) $\neg(A \rightarrow_p B) \approx (\neg A) \rightarrow_p (\neg B)$;

(T21) $\neg(A \rightarrow_p B) \approx (\neg A) \rightarrow_p (\neg B)$;

(T22) $\neg(A \rightarrow_p B) \approx (\neg A) \rightarrow_p (\neg B)$;

(T23) $\neg(A \rightarrow_p B) \approx (\neg A) \rightarrow_p (\neg B)$.

定理 2.8 $F(S)$ 上的可证等价关系 $\approx$ 具有下述性质:

(T24) $A \&_p (B \&_p C) \approx (A \&_p B) \&_p C, (A \&_p B) \rightarrow_p C \approx A \rightarrow_p (B \rightarrow_p C)$;

(T25) $A \rightarrow_p (B \rightarrow_p C) \approx (A \rightarrow_p B) \rightarrow_p C, A \rightarrow_p (B \rightarrow_p C) \approx (A \rightarrow_p B) \rightarrow_p C$;

(T26) $\Delta A \approx \Delta(A \&_p A)$;

(T27) $\Delta A \approx \Delta A \&_p \Delta A$;

(T28) $\Delta(A \&_p B) \approx \Delta A \&_p \Delta B$.

定义 2.9 函数 $v: F(S) \rightarrow [0, 1]$ 叫做 $F(S)$ 的 SS-赋值, 如果 v 满足 (p 为任意确定的实数并遵循前面第一节的约定)

(i) $v(\neg A) = 1 - v(A)$;

(ii) $v(\Delta A) = \Delta(v(A))$, 右端 Δ 的定义如下:

$$\Delta x = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad x \in [0, 1];$$

(iii) $v(A \&_p B) = \max(v(A)^{-p} + v(B)^{-p} - 1, 0)^{-\frac{1}{p}}$;

(iv) $v(A \rightarrow_p B) = \min((1 - v(A)^{-p} + v(B)^{-p})^{-\frac{1}{p}}, 1)$;

(v) $v(A \rightarrow_p B) = \min\{v(A), v(B)\}$.

可以在集合 $[0, 1]$ 上引入相应的运算 $\neg, \Delta, \&_p, \rightarrow_p$, 使 $F(S)$ 的 SS-赋值是从

$F(S)$ 到 $[0, 1]$ 的 $(-, \Delta, \&_p, \rightarrow_p)$ 型同态.

用 Ω 表示 $F(S)$ 的全体 SS -赋值之集.

定义 2.10 设 A 是 $F(S)$ 中的公式, 如果对任意的 $v \in \Omega$ 均有 $v(A)=1$, 则称 A 为重言式(永真式), 记为 $\vdash A$. 如果 $A \rightarrow_p B$ 与 $B \rightarrow_p A$ 都是重言式, 则称 A 与 B 逻辑等价.

容易验证 A 与 B 逻辑等价当且仅当对任意的 $v \in \Omega$ 均有 $v(A)=v(B)$.

以下定理表明: UL^* 中的语构关于语义 Ω 是可靠的.

定理 2.11(可靠性定理) UL^* 中的定理一定是重言式, 即若 $A \in F(S)$ 且 $\vdash A$, 则 $\vdash A$.

证 只需证明 UL^* 中的公理(UL1)~(UL17)都是重言式, 并且 UL^* 中的 MP 推理规则、必然推理规则保持重言式.

由定理 1.2, 1.3 易知(UL1)~(UL17)都是重言式, 而仿照文献[5]中的方法容易证明 UL^* 中的 MP 推理规则保持重言式. 以下证明必然推理规则保持重言式. 事实上, 设 A 是重言式, 则对任意赋值 v 均有 $v(A) = 1$, 从而 $v(\Delta A) = \Delta(v(A)) = \Delta 1 = 1$, 所以 ΔA 为重言式.

注 3 文献[12]提出了具有对合否定的逻辑系统 $SBL_{\sim}$ (其中的对合否定“ $\sim$ ”相当于本文的“ $-$ ”), 它是基于严格 T -范数的, 且 0-1 投影算子 Δ 可由两个非运算定义, 即 $\Delta\varphi = \neg(\sim\varphi)$. 但系统 UL^* 中“ $-$ ”、“ $\neg$ ”、“ Δ ”相互独立. 文献[2]中提出逻辑系统 IMTL, 它只有一个非运算“ $\neg$ ”且是对合的. 可以仿照文献[1]中为 BL 系统添加投影算子 Δ 得到扩张 BL_{Δ} 的方法, 建立 IMTL 的扩张系统 $IMTL_{\Delta}$. 需要指出的是, 当系统 UL^* 中的两个否定“ $-$ ”、“ $\neg$ ”重合时, (UL17)成为自然的公理, 从而此时的 UL^* 正好是 $IMTL_{\Delta}$.

3 UL^* 代数及 UL^* 系统的完备性

依据自由代数 $F(S)$ 关于可证等价关系 $\approx$ 构成的 $(-, \Delta, \&_p, \rightarrow_p)$ 型商代数 $[F]=F(S)/\approx$ 为背景, 我们引 UL^* 代数的概念, 并研究它的滤子理论, 借此证明系统 UL^* 的完备性定理.

定义 3.1 设 M 是 $(-, \Delta, \&_p, \rightarrow_p)$ 型代数, 称 M 是 UL^* 代数, 如果 M 满足 () $(M, \&_p, \rightarrow_p, 0, 1)$ 构成剩余格(相应的序为 $\leq$), 这里 0, 1 分别是最小元、最大元, 而 定义为

$$(P1) a \leq b \Leftrightarrow ((a \rightarrow_p b) \rightarrow_p b) \rightarrow_p a, \forall a, b \in M,$$

且满足

$$(P2) (a \rightarrow_p b) \rightarrow_p (b \rightarrow_p a) = 1, \forall a, b \in M.$$

() “ $-$ ”是关于序 $\leq$ 而言的 M 上的逆序对合对应, 即有 $a \leq b \Rightarrow (-b) \leq (-a)$ 且对任意的 $a \in M$ 成立 $(-a) = a$.

() “ Δ ”是 M 上的一元运算, 且对任意 $a, b \in M$ 有

$$(P3) \Delta a \quad (\neg(\Delta a))=1;$$

$$(P4) \Delta(a \quad b) \leq (\Delta a) \quad (\Delta b); \quad (P5) \Delta a \leq a;$$

$$(P6) \Delta a \leq \Delta a; \quad (P7) \Delta(a \rightarrow_p b) \leq (\Delta a) \rightarrow_p (\Delta b);$$

$$(P8) \Delta(a \rightarrow_p b) = \Delta((-b) \rightarrow_p (-a)); \quad (P9) \Delta 1 = 1,$$

其中 $\neg$ 的意义是 $\neg a = a \rightarrow_p 0, \forall a \in M$.

容易证明 $F(S)$ 关于可证等价关系 $\approx$ 构成的 $(\neg, \Delta, \&_p, \rightarrow_p)$ 型商代数 $[F] = F(S)/\approx$ 是一个 UL^* -代数.

定理 3.2 设 M 是 UL^* -代数, 则对任意 $a, b \in M$ 有

$$(P10) \text{ 若 } a \leq b, \text{ 则 } (-b) \leq (-a). \quad (P11) (-1)=0, (-0)=1.$$

$$(P12) \text{ 若 } a \leq b, \text{ 则 } \Delta a \leq \Delta b. \quad (P13) \Delta a = \Delta \Delta a.$$

$$(P14) \Delta a \&_p \Delta(\neg a) = 0. \quad (P15) \Delta a = 1 \text{ 当且仅当 } a = 1.$$

$$(P16) \Delta a \&_p \Delta b = \Delta(a \&_p b). \quad (P17) \Delta(-a) = \Delta(\neg a).$$

以上结论的证明类似于文献[12]中 Lemma 4 及 6, 但需要作某些修改, 如 (P11) 的证明不能照搬文献[12]中的方法(因为文献[12]中的 A.2 在 UL^* -代数中不再成立), 可如下进行证明:

因为 1 为最大元, 故有 $(-0) \leq 1$, 应用(P10)得 $(-1) \leq -(-0) = 0$. 于是 $(-1) = 0$, 而 $(-0) = -(-1) = 1$.

另外, (P16)可类似于本文定理 2.8(T28)进行证明, 而(P17)与文献[12]中 Lemma 6(10)不同, 即一般地 $\Delta(-a) \neq \neg a$. 例如, 取 $M = [0, 1]$, 非运算 “ $-$ ” 定义为 $(-x) = 1 - x$, Δ 为 0-1 投影, $\&_p, \rightarrow_p$ 分别为 $p = -2$ 时的 Schweizer-Sklar T -范数及其剩余蕴涵, $\rightarrow$ 为下确界运算, 则 M 是 UL^* -代数, 而 $\Delta(-0.6) = 0 \neq 0.8 = \neg 0.6$. 同时此例还说明, UL^* -代数中一般不成立 $\Delta x = \neg(-x)$, 因为 $\Delta(0.4) = 0 \neq 0.8 = \neg(-0.4)$.

容易验证全体 UL^* -代数构成代数簇, 故应用泛代数的结果可以得到.

定理 3.3 全体 UL^* -代数构成的类关于子代数、同态象以及直积封闭.

定义 3.4 设 M 是 UL^* -代数, M 的非空子集 F 称为是 M 的一个滤子, 如果满足

$$(F1) \text{ 若 } a, b \in F, \text{ 则 } a \&_p b \in F.$$

$$(F2) \text{ 若 } a \in F, a \leq b, \text{ 则 } b \in F.$$

$$(F3) \text{ 若 } a \in F, \text{ 则 } \Delta a \in F.$$

$$(F4) \text{ 若 } a \rightarrow_p b \in F, \text{ 则 } (-b) \rightarrow_p (-a) \in F.$$

一个滤子 F 称为是素的, 如果还满足

$$(F5) \text{ 对任意 } a, b \in M, a \rightarrow_p b \in F \text{ 或 } b \rightarrow_p a \in F.$$

注 4 由于在 UL^* -代数中一般不成立 $\Delta x = \neg(-x)$, 故上述定义中的条件(F3)不能像文献[12]那样由其他条件推出.

容易证明下面的结论成立.

定理 3.5 设 M 是一个 UL^* -代数, M 的非空子集 F 是 M 的一个滤子, 当且仅当满足

(F1') $1 \in F$.

(F2') 若 $a \in F, a \rightarrow_p b \in F$, 则 $b \in F$.

(F3) 若 $a \in F$, 则 $\Delta a \in F$.

(F4) 若 $a \rightarrow_p b \in F$, 则 $(-b) \rightarrow_p (-a) \in F$.

类似文献[12]中 Lemma 7, 8 的证明, 可以得到如下结果.

定理 3.6 对于 UL^* -代数 M , 以下结论成立:

(1) 如果 M 是线性序的, 则对任意 $a \in M - \{1\}$ 有 $\Delta a = 0$.

(2) 如下定义的关系 $\equiv_F$ 是 M 上的一个同余关系, 其中 F 是 M 的一个滤子:

$$a \equiv_F b \text{ 当且仅当 } a \rightarrow_p b \in F, b \rightarrow_p a \in F.$$

(3) M 关于 $\equiv_F$ 的商代数 $M/\equiv_F$ 是一个 UL^* -代数.

(4) 商代数 $M/\equiv_F$ 是线性序的当且仅当 F 是 M 的素滤子.

(5) 如果 M 是线性序的, 则 M 是单的, 即仅有的滤子是 $\{1\}$ 与 M .

定理 3.7 设 M 是一个 UL^* -代数, $a \in M - \{1\}$. 则存在 M 的一个素滤子 F 满足 $a \notin F$.

证 首先证明如下结论成立:

(P18) 包含一个滤子 F 及元素 x 的最小滤子是

$$F' = \{u \mid \exists v \in F, u \geq v \&_p(\Delta x)\}.$$

事实上, 对于 F' 来说, (F1), (F2) 显然成立. 假设 $u \in F'$, 则有 $v \in F$ 使得 $u \geq v \&_p(\Delta x)$, 据定理 3.2 (P12), (P16), (P13) 得 $\Delta u \geq \Delta(v \&_p(\Delta x)) = (\Delta v) \&_p(\Delta \Delta x) = (\Delta v) \&_p(\Delta x)$, 注意到 $\Delta v \in F$ (对滤子 F 应用 (F3)), 所以 $\Delta u \in F'$, 即 F' 满足 (F3). 如果 $a \rightarrow_p b \in F'$, 则有 $v \in F$ 使得 $a \rightarrow_p b \geq v \&_p(\Delta x)$, 据 (P5), (P8), (P12), (P13) 可得

$$(-b) \rightarrow_p (-a) \geq \Delta((-b) \rightarrow_p (-a)) = \Delta(a \rightarrow_p b) \geq \Delta(v \&_p(\Delta x)) = (\Delta v) \&_p(\Delta x),$$

这说明 $(-b) \rightarrow_p (-a) \in F'$, 即 F' 满足 (F4). 于是 F' 是 M 的一个滤子, 而它是 “包含滤子 F 及元素 x 的最小滤子” 则是显然的.

现在证明: 对于 $a \in M - \{1\}$, 存在 M 的一个素滤子 F 满足 $a \notin F$. 假设 F 是不包含 a 的滤子 (这样的滤子一定存在, 如 $\{1\}$), 而 $x, y \in M$ 且满足 $x \rightarrow_p y \notin F, y \rightarrow_p x \notin F$. 利用上面的结论, 可以构造两个滤子 F_1, F_2 , 它们分别是包含 F 与 $x \rightarrow_p y, y \rightarrow_p x$ 的最小滤子. 可以断定 F_1, F_2 中至少有一个不包含 a , 否则, 由 $a \in F_1, a \in F_2$ 可得 (存在 $v_1, v_2 \in F$)

$$\begin{aligned} a &\geq (v_1 \&_p(\Delta(x \rightarrow_p y))) \quad (v_2 \&_p(\Delta(y \rightarrow_p x))) \\ &\geq ((v_1 \&_p v_2) \&_p(\Delta(x \rightarrow_p y))) \quad ((v_1 \&_p v_2) \&_p(\Delta(y \rightarrow_p x))) \text{ (由剩余格的性质, } \&_p \text{ 的单调性)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=(v_1 \&_p v_2) \&_p (\Delta(x \rightarrow_p y) \quad \Delta(y \rightarrow_p x)) && \text{(参见文献[2]Proposition 1(30))} \\
&\geq (v_1 \&_p v_2) \&_p (\Delta((x \rightarrow_p y) \quad (y \rightarrow_p x))) && \text{(由 P4)} \\
&=(v_1 \&_p v_2) \&_p (\Delta 1) = (v_1 \&_p v_2) \&_p 1 && \text{(由 P2, P9)} \\
&=v_1 \&_p v_2 \in F && \text{(由剩余格的性质及定义 3.4 (F1))},
\end{aligned}$$

从而有 $a \in F$, 这是一个矛盾. 于是, 按照这种方式, 可以构造一个不包含 a 的嵌套的滤子序列, 而它们的“并”正是要寻找的素滤子.

定义 3.8 设 M 为 UL^* -代数, 函数 $v: F(S) \rightarrow M$ 叫做一个 M -赋值, 如果 v 是 $(-, \Delta, \&_p, \rightarrow_p,)$ 型同态.

用 $\Omega(M)$ 表示全体 M -赋值之集. 设 A 是 $F(S)$ 中的公式, 如果对任意的 $v \in \Omega(M)$ 均有 $v(A)=1$, 则称 A 为 M -重言式(永真式), 记为 $\vdash_M A$. 如果 M 是线性序, $\vdash_M A$ 简记为 $\vdash A$.

类似文献[2]中定理 2 和文献[12]中定理 6 有如下定理.

定理 3.9(完备性定理) 逻辑系统 UL^* 是完备的, 即对系统 UL^* 中的任意公式 φ , 以下各项等价:

- 1) φ 是系统 UL^* 的定理, 即 $\vdash \varphi$.
- 2) 对任意的 UL^* -代数 M , φ 是 M -重言式, 即 $\vdash_M \varphi$.
- 3) 对任意线性序的 UL^* -代数 M , φ 是 M -重言式, 即 $\vdash \varphi$.

4 关于 UL^* -系统的意义及其在近似推理中的应用

本节主要阐述模糊逻辑系统 UL^* 与其他模糊逻辑形式系统的关系, 借此说明 UL^* 的理论意义. 同时, 从 Yager 的“与”度、Whalen 的“模糊规则交互作用的强度”概念出发, 说明系统 UL^* 中参数 p 的含义, 借此阐明 UL^* 的应用价值.

关于模糊逻辑形式系统, 著名的有 BL , L^* , MTL , SBL 等系统, 其中 MTL 是基于一般左连续 T -范数的较弱系统. MTL 系统中的推理规则只有 MP 规则, 其“公理集”如下(见文献[2]):

- (MTL1) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C));$
- (MTL2) $(A \& B) \rightarrow A;$
- (MTL3) $(A \& B) \rightarrow (B \& A);$
- (MTL4) $(A \rightarrow B) \rightarrow A;$
- (MTL5) $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A);$
- (MTL6) $(A \& (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B);$
- (MTL7) $((A \& B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C));$
- (MTL8) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \& B) \rightarrow C);$
- (MTL9) $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow C) \rightarrow C);$
- (MTL10) $0 \rightarrow A.$

不难看出, (MTL1)~(MTL10)正好对应 UL^* 系统的(UL1)~(UL10). 为什么要扩张 MTL 去建立 UL^* 系统呢? 这可以从以下几个方面来说明:

其一, MTL 系统没有对合否定, 这与通常 $\neg\neg A \approx A$ 的“直观”意义相差较远, 也与系统 L^* 的整齐结构形成鲜明对比. 为了保留 MTL 的广泛性 (基于一般左连续 T -范数), 同时又具备系统 L^* 的对合否定, 这就促使我们建立 UL^* 系统. 如本文所述, UL^* 系统确实达到了预期目的.

其二, 如文献[12]所述, 传统的模糊逻辑系统(如 BL 和 MTL)将“逻辑非”取作 $\neg A = A \rightarrow 0$, 这就使得“逻辑非”依赖于蕴涵算子, 导致不同的蕴涵算子对应的“逻辑非”具有不同的性质. 改进这种不尽合理现象, 正是文献[12]建立新的逻辑系统 SBL_L的原因. 然而, 为了保证系统的完备性, SBL_L限制在严格连续 T -范数之下(SBL_L名称中的 S 正是“严格”的英文 strict 缩写). 而本文建立的 UL^* 系统去掉了“严格”的限制, 并且仍然具有完备性.

另外, 本文建立完备的 UL^* 系统的方法, 对于非可换模糊逻辑的形式化有直接的推广价值. 近几年来, 受非可换线性逻辑 (它在逻辑程序设计、计算语言学、模糊数据库等领域有重要应用价值)的影响, 几个基于伪 T -范数(pseudo t -norm)的非可换模糊逻辑系统相继提出, 如 $psBL$, $psMTL$ (见文献[25, 26]). 由于非可换“逻辑与”的限制, 为了使这些逻辑系统具有完备性, 不得不添加了新的公理, 分别形成完备的 $psBL'$, $psMTL'$ 系统. 事实上, 作者已初步证实(将在另文中详细论述), 运用本文的方法, 通过引入恰当的投影算子 Δ , 不必添加新的公理, 可以在非可换的情形下得到完备的模糊逻辑形式化系统.

下面从系统 UL^* 中参数 p 的含义出发说明系统 UL^* 的应用, 这要先从“与度”和“强度”两个概念说起.

Yager 在文献[13]中首次提出“与度”的思想, 就是说人类在推理时对“与”、“或”有不同的要求, 这是人脑灵活性的表现. 在文献[22]中如下定义了“与度”:

$$AD(f) = 1 - 3 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy,$$

其中 $f(x, y)$ 是 Fuzzy “与”算子 (通常选用 T -范数, 对于不连续的 T -范数, 可以像文献[23]建议的那样取 Lebesgue 积分). 从命题逻辑的角度看, 可以把“与度”理解为命题之间的关联程度. 而按照上述定义, “最大与算子”的“与度”最小 (恰为 0), 这与我们直观的感觉恰好相反. 为此, 我们用它相对于 1 的补, 作为更具直观性的“与度” h (理解为命题之间的关联程度) 的定义, 即

$$h = 3 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy.$$

可以类似文献[22]中定理 4.1 的证明得到 $0 \leq h \leq 1$. 由于“最大与算子”对应的体积正好为 $1/3$, 因此 h 的几何意义就是 Fuzzy “与”算子 $f(x, y)$ 与“最大与算子

”的体积之比. 有趣的是, Whalen 最近发表了长篇论文^[11], 认为应该考虑模糊规则之间的相互作用问题, 提出相互作用“强度”的思想, 并将 Schweizer-Sklar T -范数中的参数 p 与“强度”联系起来, 这与前述的“命题之间的关联程度”的思想如出一辙. 这也正是本文建立基于 Schweizer-Sklar T -范数的模糊逻辑系统 UL^* 的出发点.

如同文献[11]所述, 在模糊逻辑的应用中, 人们关注的焦点是根据实际问题选取恰当的模糊蕴涵算子, 基本上不考虑 If-Then 规则之间的相互作用问题. 而事实上, 模糊规则不是孤立的, 在一个实际应用系统中, 它们的交互作用是有强弱之分的, Schweizer-Sklar T -范数中的参数 p 正好用来描述这种作用关系. 本文提出的 UL^* 系统, 其宗旨就是在形式系统中体现命题之间的关联关系, 为模糊控制等应用领域提供可能的柔性逻辑基础. 下面借助“命题之间的关联程度”及三 I 算法, 来分析系统 UL^* 在近似推理中的作用.

考虑如下的模糊推理问题:

(GMP)由公式 $A \rightarrow B$ 和 A^* 推得 B^* .

用系统 UL^* 及三 I 算法, 可给(GMP)一个解: 因为 $(A \rightarrow_p B) \rightarrow_p (A^* \rightarrow_p B^*) = (A^* \&_p (A \rightarrow_p B)) \rightarrow_p B^*$, 要使 $(A \rightarrow_p B)$ 与 $(A^* \rightarrow_p B^*)$ 更接近, 自然取 $B^* = A^* \&_p (A \rightarrow_p B)$. 而这实际上正好与 $\&_p$ 的“合取”语义一致.

同样用文献[21]中的例子来说明问题. 假设公式 A 表示“西红柿红了”, 公式 B 表示“西红柿熟了”, A^* 表示“某西红柿相当红了”. 而对于 $A \rightarrow B$ 的真值, 可能有多种理解, 如 0.7, 0.8, 0.9 等; 对于 A^* 的真值, 同样可能有多种理解, 如 0.7, 0.9, 0.95 等. A 与 B 之间有一定的“关联程度”, 直观上看, 本问题中 A 与 B 之间“有较大的相关性”, 故应取 $h \geq 0.75$ (相对应的 $p > 0$).

经计算有如下结果(取 $p = 2$, 使用数学软件 Maple 计算可得相应的 $h \approx 0.92$)(表 1):

表 1

A^*	$A \rightarrow B$	B^*	
		SS 范数	R_0 范数
0.7	0.7	0.59	0.7
0.7	0.8	0.64	0.7
0.9	0.7	0.67	0.7
0.8	0.9	0.75	0.8
0.5	0.5	0.38	0
0.3	0.7	0.29	0

从表 1 可看出, 系统 UL^* 较好反映了常识推理, 特别重要的是, 人们可以根据对 A 与 B 之间“相关性”的不同理解选择不同的参数 p , 使推理具有一定的柔

性(但总的趋势大致相当). 而系统 L^* 总取 A^* 与 $A \rightarrow B$ 中真值最小者, 过于刚性——如(0.9, 0.7)与(0.7, 0.7)没有区别; 同时, 对于 L^* 来说(0.5, 0.5)与(0.3, 0.7)其结果均为 0, 这尽管可从文献[7]中“过半可信”原则得到一定程度的解释, 但对于 A 与 B 之间关联程度较大时丢弃所有不过半的情况似乎有些生硬.

综上所述, 在理论方面, UL^* 系统拓广了已有系统的适用范围, 同时保持了完备性; 在应用方面, UL^* 系统通过参数体现了命题之间的关联程度, 对模糊控制、近似推理等应用有一定的参考价值.

参 考 文 献

- Hajek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. Kluwer Academic Publishers, 1998
- Esteva F, Godo L. Monoidal t -norm based logic: Towards a logic for left-continuous t -norms. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124: 271~288[DOI]
- Ying M S. Perturbation of fuzzy reasoning. IEEE Trans Fuzzy Sys, 1999, 7: 625~629[DOI]
- Ying M S. Implications operators in fuzzy logic. IEEE Trans Fuzzy Sys, 2002, 10: 88~91[DOI]
- 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 北京: 科学出版社, 2000
- 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法. 中国科学, E 辑, 1999, 29(1): 43~53
- 王国俊, 宋庆燕. 一种新型的三 I 算法及其逻辑基础. 自然科学进展, 2003, 13(6): 575~581
- Klement E P, Navara M. Propositional fuzzy logics based on Frank t -norms: A comparison. In: Dubois D, ed. Fuzzy Sets, Logics and Reasoning about Knowledge. Kluwer Academic Publishers, 1999
- 吴望名. 参数 Kleene 系统中的广义重言式. 模糊系统与数学, 2000, 14(1): 1~7
- 王国俊, 兰 蓉. 系统 H_0 中的广义重言式理论. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2003, 31(2): 1~11
- Whalen T. Parameterized R-implications. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 134: 231~281[DOI]
- Esteva F, Godo L, Hajek P, et al. Residuated fuzzy logic with an involutive negation. Arch Math Logic, 2000, 39: 103~124[DOI]
- Yager R R. Generalized “AND/OR” operators for multivalued and fuzzy logic. Int Sym on Multiple-Valued Logic (IEEE), 1980: 214~218
- Wang G J. Formalized theory of general fuzzy reasoning. Information Sciences, 2004, 160: 251~266[DOI]
- Batyrshin I, Kaynak O, Rudas I. Fuzzy modeling based on generalized conjunction operations. IEEE Transactions on fuzzy systems, 2002, 10(5): 678~683[DOI]
- Song Q, Kandel A, Schneider M. Parameterized fuzzy operators in fuzzy decision making. International journal of intelligent systems, 2003, 18: 971~987[DOI]
- Rutkowski L, Cpałka K. Flexible neuro-fuzzy systems. IEEE Transactions on Neural Networks, 2003, 14(3): 554~574[DOI]
- Schweizer B, Sklar A. Associative functions and abstract semigroups. Pub Math Debrecen, 1963, 10: 69~81
- Schweizer B, Sklar A. Associative functions and statistical triangle inequalities. Pub Math Debrecen, 1961, 8: 169~186
- Klement E P, Mesiar R, Pap E. Triangular Norms. Volume 8 of Trends in Logic. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000
- 裴道武, 王国俊. 形式系统 L^* 的完备性及其应用. 中国科学, E 辑, 2002, 32(1): 56~64[摘要] [PDF]
- 陈永义. Fuzzy 算子探讨(I). 模糊数学, 1982, 2: 1~10
- 应明生. Fuzzy 算子的模糊度. 模糊数学, 1984, 4: 1~6
- Bubnicki Z. Uncertain Logics, Variables and Systems. Berlin: Springer, 2002
- Hajek P. Observations on non-commutative fuzzy logic. Soft Computing, 2003, 8: 38~43
- Jenei S, Montagna F. A proof of standard completeness for non-commutative monoidal t -norm logic. Neural Network World, 2003, 5: 481~489