

欧氏空间瞬子解的几何解释*

谷超豪 沈纯理 胡和生 杨振宁

摘 要

本文利用黎曼几何学及共形映照下规范场的一些性质,用统一而自然的方式给出 Polyakov, 't Hooft, Jackiw-Nohl-Rebbi 等人所得到的瞬子解,并作出几何解释.

近年来对欧氏空间 E_4 中 SU_2 规范场的瞬子解进行了不少研究^[1-3],已经知道 Pontrjagin 示性数为 k 的自对偶(反自对偶)瞬子解依赖于 $8k-3$ 个参数,其中相当一部分是有显式的解析表达式的^[1,2]. 在本文中,我们利用黎曼几何学及共形映照下规范场的一些性质^[4],用统一而自然的方式给出所有这些具有显式表达式的瞬子解,并对此作出了几何解释. 我们证明了,这些瞬子解内在地联系于适当的黎曼空间,且它的规范势就是由克氏记号分解而形成.

一、瞬子解及共形映照

设 E_4 为 4 维欧氏空间, $b = b_\mu dx^\mu = b_\mu^i(x) dx^\mu X_i (i = 1, 2, 3, \mu = 1, 2, 3, 4)$ 为 SU_2 规范势形式,其强度为:

$$f_{\lambda\mu} = b_{\lambda,\mu} - b_{\mu,\lambda} - [b_\lambda, b_\mu]. \quad (1)$$

定义对偶强度

$$f_{\lambda\mu}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} f^{\alpha\beta}. \quad (2)$$

若

$$f_{\lambda\mu} = f_{\lambda\mu}^* \text{ 或 } -f_{\lambda\mu}^*, \quad (3)$$

就分别称 $b = b_\mu dx^\mu$ 为 SU_2 规范场的自对偶解或反自对偶解,它们都是无源解. 又

$$k = \frac{1}{8\pi^2} \{ \|f^+\|^2 - \|f^-\|^2 \}, \quad (4)$$

就是规范场的 Pontrjagin 示性数,这里

$$f^+ = \frac{1}{2} (f + f^*), \quad f^- = \frac{1}{2} (f - f^*),$$

f^+ 具自对偶性, f^- 具反自对偶性.

如果无源规范势 b_μ 满足: 1. 在无穷远处 $f_{\lambda\mu} \rightarrow 0$ 相当快, 2. 作用量有限, 3. 无奇点(或规范变换后无奇点), 则称这样的无源解为瞬子解或拟粒子解. 自对偶(反自对偶)的瞬子解是其中重要一类.

本文 1977 年 10 月 11 日收到.

* 本文是美国纽约州立大学教授杨振宁于 1977 年 7 月访华期间,和复旦大学部分教师共同讨论和研究的成果.

同样, 我们也可以定义 4 维黎曼空间中无源的 SU_2 规范场和自对偶(或反自对偶)的规范场, 并且已经知道, 负载规范场的 4 维黎曼空间当空间受到共形变换而规范势保持不变时, 无源规范势保持为无源的^[4], 自对偶(反自对偶)的规范势保持为自对偶(反自对偶)的, 这个事项为求欧氏空间 E_4 的 SU_2 瞬子解提供了一个有效的途径.

二、共形欧氏空间的平行移动规范场

每个 n 维黎曼空间内在地决定一个 $SO(n)$ 的平行移动规范场, 其规范势即克氏记号^[5]. 特别, 4 维共形平坦的黎曼空间 R_4 内在地决定了一个 $SO(4)$ 平行移动规范场. 设这空间的度规为:

$$ds^2 = e^{2\sigma}((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2), \quad (5)$$

其克氏记号为:

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \delta_{\mu}^{\lambda} \sigma_{,\nu} + \delta_{\nu}^{\lambda} \sigma_{,\mu} - \delta_{\mu\nu} \sigma_{,\lambda} (\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4), \quad (6)$$

它就是 R_4 上 SO_4 的规范势在自然标架下的表达式. 记 R_4 中和坐标 $(x^1, \dots, x^4)$ 相应的自然标架的基为 $I_{\mu} \left(= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right)$, 那么变位方程为:

$$DI_{\mu} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} dx^{\nu} I_{\lambda}, \quad (7)$$

D 表示绝对微分. 令 $e_{\mu} = e^{-\sigma} I_{\mu}$, 它们构成 R_4 的归一正交标架, 在这正交标架下

$$De_{\mu} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} dx^{\nu} e_{\lambda},$$

其中

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \delta_{\nu}^{\lambda} \sigma_{,\mu} - \delta_{\mu\nu} \sigma_{,\lambda}, \quad (8)$$

它对 λ, μ 为反称, $b_{\nu} = (\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})$ ($\nu = 1, 2, 3, 4$) 是 R_4 上的 SO_4 群的平行移动规范场的规范势在正交标架下的方阵表达式. 又记 $b_{\nu}^* = (\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda*})$, 这里“*”是关于指标 λ, μ 的对偶记号. 令

$$b_{\nu}^+ = \frac{1}{2}(b_{\nu} + b_{\nu}^*), \quad (9)$$

$$b_{\nu}^- = \frac{1}{2}(b_{\nu} - b_{\nu}^*), \quad (10)$$

我们就得到 R_4 上的两个 SU_2 规范势 b_{ν}^+ 与 b_{ν}^- .

现在把 R_4 和欧氏空间 E_4 相共形对应, 把 b_{ν}^+, b_{ν}^- 看成定义在 E_4 上的两个 SU_2 规范势, 记相应的规范场为 $\mathcal{F}^+$ 与 $\mathcal{F}^-$.

利用 (8) 式, 我们可将 b_{ν}^+, b_{ν}^- 写成下述形式:

$$b_i^+ = -\epsilon_{ijk} \sigma_{,j} Y_k - \sigma_{,4} Y_i, \quad b_4^+ = \sigma_{,i} Y_i, \quad (9')$$

$$b_i^- = -\epsilon_{ijk} \sigma_{,j} X_k + \sigma_{,4} X_i, \quad b_4^- = -\sigma_{,i} X_i \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (10')$$

这里 X_i, Y_i 为李代数 $SO'(4)$ 的基:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ & 1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}, & X_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & 1 \\ -1 & & \\ & -1 & \end{pmatrix}, \\
 X_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix}, & Y_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & & -1 \\ & -1 & \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}, \\
 Y_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & \\ & & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}, & Y_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

由于 $[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k$, $[Y_i, Y_j] = \epsilon_{ijk} Y_k$, 因而 X_1, X_2, X_3 与 Y_1, Y_2, Y_3 分别构成二个 SU_2 的李代数的基. 从 (9)' 和 (10)' 式就可见到 SU_2 规范势 $\bar{b}_\nu^+$ 与 $\bar{b}_\nu^-$ 实质上分别和 't Hooft 等人首先引入的 Ansatz^[2]

$$\bar{b}_\nu^+ = i\tau_{\mu\nu}\sigma_{\nu}, \quad (12)$$

$$\bar{b}_\nu^- = i\bar{\tau}_{\mu\nu}\sigma_{\nu} \quad (13)$$

相同¹⁾. 所以他们的两个 Ansatz 可以同时由共形平坦空间的克氏记号自然地导出.

三、具自对偶性的解及其几何解释

已知线素为 (5) 式的共形平坦空间的曲率张量 $R_{\lambda\mu\nu\rho}$ 的表达式为^[6]:

$$e^{-2\sigma} R_{\lambda\mu\nu\rho} = \delta_{\lambda\rho}\sigma_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu}\sigma_{\lambda\rho} - \delta_{\lambda\nu}\sigma_{\mu\rho} - \delta_{\mu\rho}\sigma_{\lambda\nu} + (\delta_{\lambda\rho}\delta_{\mu\nu} - \delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\rho})\Delta_1\sigma, \quad (14)$$

式中

$$\sigma_{\lambda\mu} = \sigma_{,\lambda\mu} - \sigma_{,\lambda}\sigma_{,\mu}, \quad \Delta_1\sigma = \delta^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta}, \quad (15)$$

转换到归一正交标架 e_λ , 曲率张量为:

$$\tilde{R}_{\lambda\mu\nu\rho} = e^{-4\sigma} R_{\lambda\mu\nu\rho}. \quad (16)$$

将 $\tilde{R}_{\lambda\mu\nu\rho}$ 关于前二个指标作对偶, 得 $\tilde{R}_{\lambda\mu\nu\rho}^*$, 那么

$$\tilde{R}_{\lambda\mu\nu\rho}^+ = \frac{1}{2} (\tilde{R}_{\lambda\mu\nu\rho} + \tilde{R}_{\lambda\mu\nu\rho}^*), \quad (17)$$

$$\tilde{R}_{\lambda\mu\nu\rho}^- = \frac{1}{2} (\tilde{R}_{\lambda\mu\nu\rho} - \tilde{R}_{\lambda\mu\nu\rho}^*). \quad (18)$$

所形成的 4×4 阵 $(\tilde{R}_{\lambda\mu\nu\rho}^+)$, $(\tilde{R}_{\lambda\mu\nu\rho}^-)$ 就是 $\mathcal{S}^+$ 和 $\mathcal{S}^-$ 的强度 $f_{\nu\rho}^+$, $f_{\nu\rho}^-$, 这里 λ, μ 是矩阵的行和列的指标. 从 (17), (18) 式通过直接的计算可知:

1. $\mathcal{S}^-$ 为自对偶或 $\mathcal{S}^+$ 为反自对偶的充要条件是:

$$\Delta u = 0 \quad (u > 0). \quad (19)$$

1) 在文献 [2] 中 $\bar{\tau}_{ij} = \frac{1}{4i} [\sigma_i, \sigma_j]$, $\bar{\tau}_{i4} = -\frac{1}{2} \sigma^i$, $\tau_{ij} = \bar{\tau}_{ij}$, $\tau_{i4} = -\bar{\tau}_{i4}$, 式中 σ_i 为 Pauli 阵, 但我们现在用 X_i 或 Y_i 代替 $\sigma_i/2i$.

这里 $u = e^\sigma$, 因此具这样的对偶性的共形平坦空间 R_4 可通过求解 Laplace 方程得出. 这样我们就用几何的方法导出了文献[2]中所得到的解, 这种解所相应的 R_4 的线素为:

$$ds^2 = \left(\sum_{a=0}^k \frac{\lambda_a^2}{(x - y_a)^2} \right) ((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2), \quad (20)$$

式中 y_a 是 $k+1$ 个定点

$$(x - y_a)^2 = (x^1 - y_a^1)^2 + (x^2 - y_a^2)^2 + (x^3 - y_a^3)^2 + (x^4 - y_a^4)^2, \quad (21)$$

下面给出这种 R_4 的一个几何结构的描述.

如果将 E_4 添上一个无限远点使它成为 S_4 , 然后在 S_4 上除去 $k+1$ 个 $y_a (a=0, \cdots, k)$, 那么就得到一个非紧致流形 M_4 , R_4 上线素(20)可以看成是定义在 M_4 上的黎曼结构. 利用反演变换, 可以见到所添上的无限远点是 R_4 的一个正常点. 又若 x 沿测地线 $\rightarrow y_a$ 时, 此测地线可无限延伸, 也即测地线长度 $\rightarrow \infty$, R_4 在 $x \rightarrow y_a$ 的渐近性质和 E_4 中 $x \rightarrow$ 无限远的渐近性质相同, 因此 R_4 是一个非紧致的完备的黎曼空间. 特别 $k=0$ 时, 如取 y_0 为 $(0, 0, 0, 0)$, 作一次坐标反演 $\xi^i = \frac{x^i}{x^2}$, 我们就得到普通的欧氏线素 $ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2 + (d\xi^4)^2$. 从而可见, 原来的无限远点实际上是正常点, 原来的 $(0, 0, 0, 0)$ 点附近的性质与欧氏空间无限远处性质相同.

2. $\mathcal{F}^+$ 为自对偶或 $\mathcal{F}^-$ 为反自对偶的充要条件为:

$$\sigma_{\lambda\mu} = 0, \quad \sigma_{\lambda\lambda} = \sigma_{\mu\mu} \quad (\lambda \neq \mu). \quad (22)$$

令

$$v = \frac{1}{u} = e^{-\sigma}, \quad (23)$$

上式化为:

$$v_{,\lambda\mu} = 0, \quad v_{,\lambda\lambda} = v_{,\mu\mu} \quad (\lambda \neq \mu). \quad (24)$$

从而得到(22)式的通解为:

$$u = \frac{c}{a + b(x - y)^2}, \quad (25)$$

式中 a, b, c 为常数 ($c > 0$), y 为一定点. 这时线素(5)式是常曲率空间的线素. 当 $a > 0$, $b > 0$ 时得出正常曲率空间, 这就是 BPST 解^[1]的几何解释, 当 $\frac{a}{b} < 0$, 我们得到负常曲率空间, 这时作用量不是有限的.

因而, 我们利用共形欧氏空间导出了那些已具有具体表达式的瞬子解, 并给出了它们的几何意义.

四、无源解

如上所述, 由无源的共形平坦空间的平行移动规范场¹⁾, 可以导出 E_4 上的两个无源的 SU_2

1) 平行移动规范场为无源的定义是 $R_{\lambda\mu;\nu} - R_{\lambda\nu;\mu} = 0^{[1]}$.

规范场。由于共形平坦空间成立

$$R_{\lambda\mu;\nu} - R_{\lambda\nu;\mu} + \frac{1}{6}(g_{\lambda\nu}R_{,\mu} - g_{\lambda\mu}R_{,\nu}) = 0, \quad (26)$$

所以得到共形平坦空间无源的充要条件为 $R = k = \text{常数}$, 利用 R 的表达式, 就得到方程

$$\Delta u = ku^3 \quad (u > 0). \quad (27)$$

当 u 满足 (27) 式时, $\mathcal{F}^+$, $\mathcal{F}^-$ 都是无源的规范场, 相反地, 若 $\mathcal{F}^+$ 和 $\mathcal{F}^-$ 有一为无源, 那末 (27) 式就必须成立, 从而另一个也必为无源. 事实上, 若 $\mathcal{F}^+$ 为无源, 则把 (26) 式转换到正交标架后, 就应有

$$(\delta_{\lambda\nu}\tilde{R}_{,\mu} - \delta_{\lambda\mu}\tilde{R}_{,\nu}) + (\delta_{\lambda\nu}\tilde{R}_{,\mu} - \delta_{\lambda\mu}\tilde{R}_{,\nu})^* = 0.$$

这时 “*” 是对指标 μ, ν 而作的, 取 $\mu = 1, \nu = 2, \lambda = 2$, 就有 $\tilde{R}_{,1} = 0$, 同样可得到

$$\tilde{R}_{,2} = \tilde{R}_{,3} = \tilde{R}_{,4} = 0,$$

这就是 $R = \text{常数}$, 也即 (26) 式.

这样, 我们就用几何的方法自然地导出了文献 [7] 中关于无源解的方程.

特别当 $k = 1$ 时, (27) 式的解包含了 BPST 解.

如果不计边界条件或容许有奇性, (27) 式的解是很多的, 其中下述的解

$$u = \frac{1}{\sqrt{(x - y_1)^2(x - y_2)^2}} \quad (28)$$

或许是有趣的, 这里 y_1, y_2 是两个定点, $k = -(y_1 - y_2)^2$.

参 考 文 献

- [1] Belavin, A., Polyakov, A., Schwartz, A. & Tyupkin, Y., *Phys. Lett.*, **59B**(1975), 85.
- [2] Jackiw, R., Nohl, C. & Rebbi, C., *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 1642.
- [3] Atiyah, M. F., Hitchin, N. J. & Singer, I. M., Deformations of Instantons (preprint, 1977).
- [4] Yang, C. N., *Conformal mapping of gauge field.*, Preprint ITP-SB, 77—23.
- [5] Yang, C. N., *Phys. Rev. Lett.*, **33**(1974), 445.
- [6] Eisenhart, L. P., *Riemannian Geometry*, 1949.
- [7] Corrigan, E., Fairlie, D. B., Scalar field theory and exact solutions to a classical SU(2) gauge theory (preprint 1977).