

基于自由落体的牛顿万有引力常数测定

王勇, 柯小平, 张为民, 许厚泽, 王虎彪, 柴华

中国科学院测量与地球物理研究所, 武汉 430077

E-mail: ywang@asch.whigg.ac.cn

2008-06-20 收稿, 2008-10-08 接受

国家重点基础研究发展计划资助项目(编号: 2003CB716300)

摘要 牛顿万有引力常数 G 是最基本的物理常数之一, 本文根据自由落体原理, 利用 FG5/112 型高精度绝对重力仪精确测定扰动质量产生的重力变化, 进而测得万有引力常数 G . 该方法可重复性强, 通过误差控制及大量重复观测, 可提高测量精度. 通过两次实验, 得到实测万有引力常数 G 为 $(6.6665 \pm 0.0554) \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$.

关键词

牛顿

万有引力常数

绝对重力仪

自由落体

牛顿万有引力常数 G 的精确测量不仅对于弄清引力相互作用的性质非常关键, 而且对于理论物理学、地球物理学、天文学、宇宙学以及精确测量等都具有重要的理论意义与现实意义. G 是历史上最早被认识和测量的物理常数, 但它的精度至今仍然较差. 最初确定 G 值是为了测量引力. 牛顿曾设想出两种测 G 的方法, 一种方法是直接测量两物体间的引力, 再利用引力公式确定 G 值; 另一种方法是利用大山附近单摆的偏角测定 G 值. 限于当时的实验条件, 这两种方法均未能付诸实现. 1774 年, 英国天文学家马斯基林利用大山吸引物体的方法测定 G 值, 由于大山的质量很难精确确定, 加上气流的影响, 实验结果不稳定, 误差也很大. 首次对 G 值做出精确测量的是英国物理学家卡文迪许(Cavendish), 他最初的目的是想确定整个地球的质量. 1798 年, 他利用英国地质学家密歇耳所发明的扭秤测定出地球的质量约为 $6.6 \times 10^{20} \text{ T}$, 其平均密度约为水的 5.5 倍. 在此一个世纪之前, 牛顿曾较准确地判断出地球的平均密度约为水的 5~6 倍, 并由此推算出 G 值约为 $6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$, 而卡文迪许对 G 的实验测量值为 $(6.754 \pm 0.041) \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$. 一些学者还认为, 万有引力常数 G 在小于 1000 km 的距离范围内可能并不是常数, 而是距离的函数, 并在实验室距离下检验牛顿引力反平方定律, 即 G 与距离的关系^[1].

万有引力常数 G 的测定方法大致可分为地球物

理测量、实验室测量和空间测量三大类. 空间测量方法面临着很多新的技术难题, 目前仍在探索之中. 实验室内测量是目前获得高精度 G 值的主要手段, 常用工具是精密扭秤. 采用扭秤测量引力常数 G 有以下方法: 直接倾斜法、共振法和周期法等, 其中扭秤周期法是采用最多并且测量结果较为理想的方法之一, 其基本原理是当扭秤周围放置吸引质量之后其运动周期会产生相应的变化. 虽然扭秤装置可以有效地消除外界引力和噪音的干扰, 但其无法进行重复测量, 且待测的几何量较多, 导致影响实验系统误差的因素较多, 测出的 G 值的离散度也较大. 地球物理学方法主要是通过测量重力的变化来测定引力常数 G . 地球物理学方法引力效应明显, 但实验的精度相对扭秤法要低.

Boer 等人^[2]1987 年利用扭秤法测得万有引力常数 G 为 $(6.667 \pm 0.0007) \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$. 陈应天等人^[3]1989 年利用机械共振法测得万有引力常数 G 为 $(6.6724 \pm 0.0087) \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$. Walesch 等人^[4]利用钟摆共鸣的方法在 1995 年测得 G 为 $(6.6719 \pm 0.0008) \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$, 随后 Schumacher 等人^[5]对实验进行了改进, 在 1998 年得到新的结果为 $(6.6637 \pm 0.0004 \pm 0.0044) \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$. Fitzgerald 和 Armstrong^[6]利用扭秤法在 1995 年测得 G 为 $(6.6656 \pm 0.00063) \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$; Michaelis 等人^[7]利用扭秤法在 1995 年也得到 G 的结果为 $(6.7154 \pm 0.00055) \times$

$10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$; Schurr等人^[8]在 1998 年测得 G 为 $(6.6754\pm 0.0015)\times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$; 罗俊等人^[9-12]采用长周期、高 Q 值扭秤并使之在一个恒温、隔振以及外界引力干扰相对较小的环境下, 克服了扭丝滞弹性和热弹性对测 G 的影响, 最终测得 G 为 $(6.6699\pm 0.0007)\times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$, 其相对精度达到 105 ppm (1 ppm = 1×10^{-6}), 这是目前国际上几个最好的测量值之一, 并于 1998 年被国际物理学基本常数委员会推荐的 CODATA 值采用. Schwarz 等人^[13,14]利用自由落体实验测量附加质量引起的重力变化进行引力常数 G 的测定, 其结果为 $(6.6873\pm 0.0094)\times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$. 近几年来, Gundlach 和 Merkowitz^[15], Quinn 等人^[16], Schlamminger 等人^[17]以及 Armstrong 和 Fitzgerald^[18]先后发表了相对测量精度好于 50 ppm 的 G 值. Hu 等人^[19]在 2005 年发现 HUST-99 工作中源质量密度的不均匀而对 HUST-99 结果有一个修正, 修正后的结果为 $(6.6723\pm 0.0009)\times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$.

基于扭秤的万有引力常数测定容易受外界干扰, 而基于自由落体原理的测定方法其测量精度虽然比扭秤法低, 但该方法的系统误差与扭秤法不同, 可利用该方法的结果与扭秤法测定的结果共同来确定万有引力常数 G . 本文在 Schwarz 实验的基础上, 从不同地区及不同时间角度, 利用 FG5/112 型绝对重力仪进行万有引力常数 G 的精确测量, 这也是国内首次利用自由落体原理对万有引力常数进行精确测定.

1 原理

重力加速度与位移之间的关系可表示为

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g, \quad (1)$$

式中 z 为位移, t 为时间, g 为重力加速度.

(1)式的解为

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t + X_0, \quad (2)$$

式中 V_0 为初始速度, X_0 为初始位移.

若考虑重力梯度的影响, 重力加速度与位移之间的关系为

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + \gamma z, \quad (3)$$

式中 γ 为梯度.

(3)式的解可表示为

$$z(t) = \frac{1}{2}g\left(t^2 + \frac{\gamma t^4}{12}\right) + V_0\left(t + \frac{\gamma t^3}{6}\right) + X_0\left(1 + \frac{1}{2}\gamma t^2\right). \quad (4)$$

(4)式即为绝对重力仪的理论计算式, 通过精确测定自由落体质量在时间 t 对应的位移 $z(t)$, 即可解得重力加速度 g .

若有一扰动质量存在, 其产生的扰动加速度为 $P(z, G)$, 则(3)式变为

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + \gamma z + P(z, G). \quad (5)$$

扰动加速度可由下式求得:

$$P(z, G) = \frac{\iiint_{V_p} \iiint_{V_s} \frac{G\rho_s\rho_p(z_s - z)}{|\vec{r}_s - \vec{r}_p|^3} dV_s dV_p}{m_p}, \quad (6)$$

式中 m_p 为落体的质量, V_p 和 V_s 分别为落体及扰动质量的体积, ρ_p 和 ρ_s 分别为落体及扰动质量的密度, G 为万有引力常数.

若扰动质量为空心圆柱体, 落体质量亦为圆柱体, 在柱坐标下则有

$$P(z, G) = G\rho_s\rho_p/m_p \times \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} \int_z^{z+h} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \int_{H_1}^{H_2} rR(\zeta - \eta) / ((R\cos\varphi - r\cos\theta)^2 + (R\sin\varphi - r\sin\theta)^2 + (\zeta - \eta)^2)^{3/2} \times d\theta dr d\eta d\varphi dR d\zeta. \quad (7)$$

(7)式可通过数值积分的办法求得. 给定 G 一假定值 G_t , 利用数值积分求得在假定 G_t 下的扰动重力加速度. (5)式为二阶常微分方程, 可通过数值解法得到不同时间 t 对应的位移 $z(t)$, 此时的位移时间数据对为局部重力加速度及扰动重力加速度共同作用的结果. 根据(4)式, 利用最小二乘法可求得 g_t , 此时的 g_t 为局部重力加速度及扰动重力加速度之和.

将扰动质量分别置于落体质量的上下两个不同位置, 就可得到处于上下位置时 g_t 的差值 Δg_t , 此时的 Δg_t 是在给定 G_t 假定值的情况下求得的理论值. 由于 G 与 Δg 呈线性关系^[13], 若利用 FG5 绝对重力仪测得实测 Δg_0 , 利用下式则可得到实际测量的精确的 G :

$$\frac{\Delta g_t}{G_t} = \frac{\Delta g_0}{G}. \quad (8)$$

利用上下两个不同位置处的重力的差值而非一个位置处的重力值, 一方面可以提高测量的信噪比, 另一方面可以消除在短时间内的外界干扰.

测量原理示意图如图 1 所示.

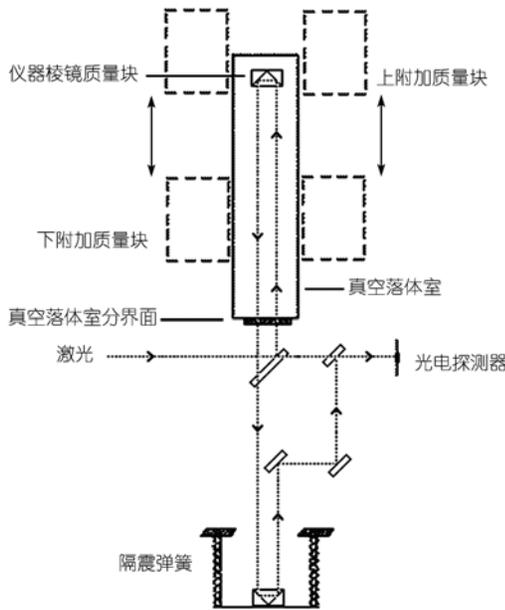


图1 测量原理示意图

2 测量

2.1 扰动质量形状及位置的确定

扰动质量采用空心圆环形, 空心部分用于放置绝对重力仪. 圆环形可以减小非对称性的影响. 扰动质量的形状按圆环高度与直径相等的原则进行设计, 因为在同等质量的情况下, 当高度与直径接近相等时, 物体产生的扰动加速度最大^[20]. 扰动质量的材料采用铅, 一方面是由于铅的密度大, 另一方面铅相对于钨等金属来说更经济. 同时, 应保证所用材料为非磁性. 实验前需测定铅块的质量、密度及形状尺寸.

计算表明, 圆环形铅块对重力仪产生的扰动重力加速度有两个极值(图2), 当铅块放置于上下极值处时, 产生的扰动重力差最大.

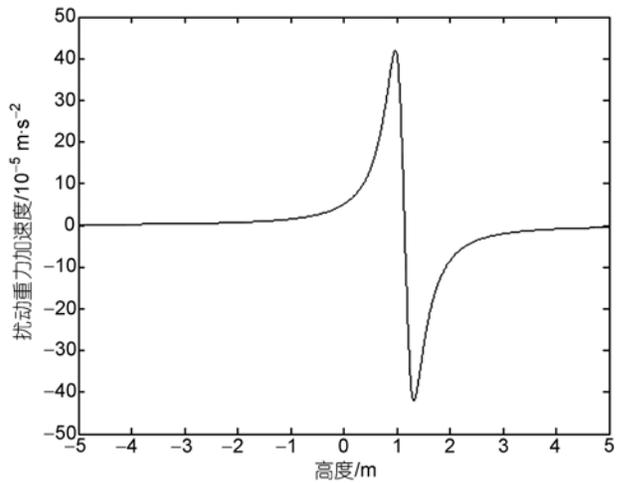


图2 扰动重力加速度随高度的变化情况

2.2 重力加速度的测量

在扰动质量放置前, 需测量实验点处的重力加速度值和重力梯度值. 在实验进行过程中, 同时利用超导重力仪进行相对重力测定, 以便进行相关的改正.

将扰动质量放置于上下部最佳位置, 利用 FG5 绝对重力仪测定当扰动质量分别位于上部及下部最佳位置时的重力值. 重复测量一定的时间, 从而得到一定数量的重力值.

本实验共进行了两次测量, 第一次测量进行了 12 h 20 min, 共有 3800 次落体, 测得 38 个重力数据(图 3(a)). 第二次测量进行了 26 h 50 min, 共有 3780 次落体, 测得 54 个重力数据(图 3(b)).

3 计算及结果

3.1 计算过程

() 在利用(5)式进行微分方程的数值解时, 必

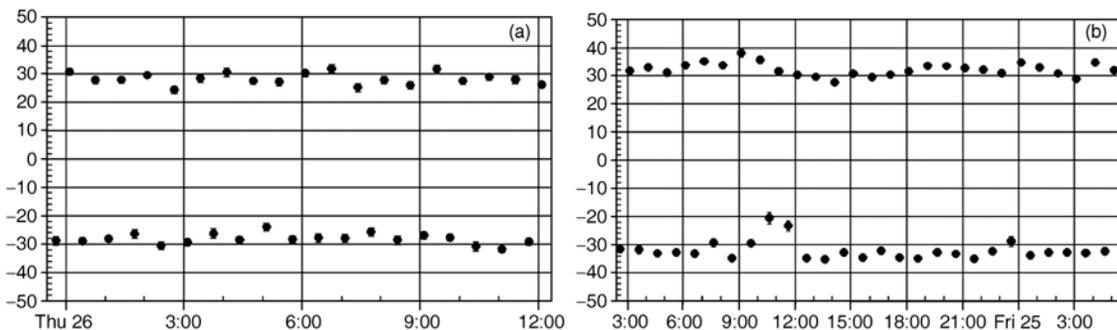


图3 实测重力数据

须知道落体质量的初始时间、结束时间、初始位移、初始速度。由于 FG5 重力仪只给出测定的绝对重力值，因此要对仪器的测量软件进行修改，以便得到落体质量的初始位移和速度以及落体质量的初始和结束时间。

() 由于重力仪内部的落体形态非常复杂，需对落体质量进行模型化。将落体质量模型化成 90 个圆柱体，扰动质量分成三个圆柱体，分别计算落体质量中每个圆柱体与扰动质量的每个圆柱体之间在给定 G 条件下的扰动重力的理论值，并计算总的扰动重力。计算根据(7)式进行，采用 Romberg 数值积分。

() 根据(5)式，采用四阶 Runge-Kutta 法解二阶常微分方程，得到不同时间对应的位移。在落体质量的自由下落过程中，重力仪记录了 150 个位移时间数据对。由于下落过程中位移的变化，每个位移均要利用过程()进行数值积分，从而得到一组理论位移时间数据对。

() 将过程(iii)得到的位移时间数据对，利用(4)式采用最小二乘法计算理论重力加速度。当扰动质量分别位于上下最佳位置时，可得到两者的重力差，即在给定 G 下的扰动重力差的理论值。

() 利用超导重力仪记录的相对重力值对 FG5 测得的绝对重力值进行改正，以消除极移、固体潮、气压等的影响。实测重力数据的重力差采用三段法^[13]。利用改正后的数据得到扰动重力差的实测值。

() 利用(8)式计算得到实测万有引力常数 G 。

3.2 计算结果

第一次测量中，其中一组重力差大于二倍的中误差而舍弃，最终为 18 组重力差，经计算得到的万有引力常数 G 如图 4(a)所示，其平均值为 $6.6771 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ 。第二次测量中，有 7 组重力差因误

差较大而舍弃，最终为 20 组重力差，经计算得到的万有引力常数如图 4(b)所示，其平均值为 $6.6558 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ 。两次实验得到的最终 G 值为 $6.6665 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ 。

4 误差分析

影响 G 值的误差主要有重力测量误差及理论计算误差两部分。理论计算误差包括扰动质量的测量及定位误差、落体质量的相关参数计算误差、未加扰动质量前实验点处背景场的重力及重力梯度值测量误差等。

重力测量误差包括 FG5 重力仪系统的误差、外部干扰对测量结果的影响、系统激光干涉条纹的选取对结果的影响等。仪器系统误差主要来自于激光束的垂向校正误差、时钟的频率误差、干涉仪的相位误差等^[13]。在 FG5 重力仪内部，电动马达在下落过程中会产生磁场信号^[13]。当扰动质量位于落体的下部时，扰动质量的传导特性会对交互磁场产生屏蔽作用；当扰动质量位于落体的上部时，这种屏蔽作用消失，这样就会产生不同的系统误差^[13]。落体开始时的声音脉冲会对干涉仪激光的控制反馈电路激发共振，导致干涉仪系统的误差。除仪器本身产生的误差外，外部干扰对仪器也会产生一定的影响。起始干涉条纹的选取会导致重力测量结果的差异。实际测量中，第一次实验重力测量误差为 $0.451 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2$ ，导致实测 G 的误差为 $0.0531 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ ；第二次实验重力测量误差为 $0.559 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2$ ，导致实测 G 的误差为 $0.0570 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ 。

扰动质量的测量及定位误差包括扰动质量的厚度及内外径测量误差、密度测量误差、扰动质量的定位误差、扰动质量与落体质量轴线偏离导致的误差等。在这些误差中，扰动质量定位的误差对结果的影响

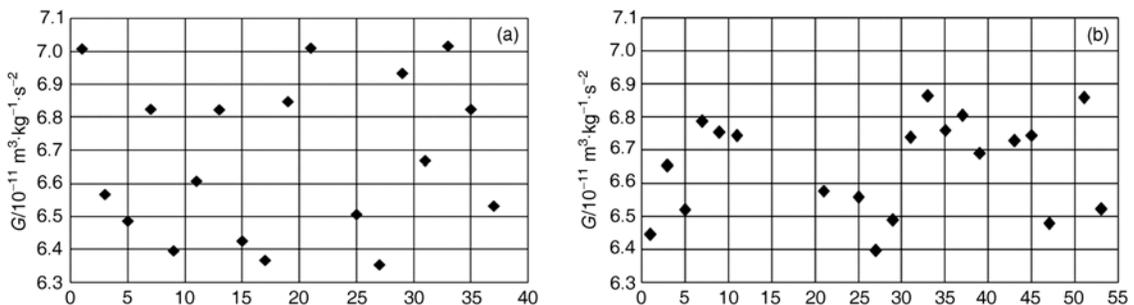


图 4 实测 G 的结果

较大.

落体质量的相关参数计算误差包括落体的初始位移和速度以及落体的初始和结束时间误差, 重力仪有效高度测量的误差会导致落体顶点位置的误差, 其中仪器有效高度测量误差导致的实测 G 的误差较大. 由于采用扰动质量上下位置处的重力差计算 G , 这样可大大消除未加扰动质量前实验点处的重力及梯度值测量误差对 G 值计算的影响.

两次实验的各项误差及其产生的 G 的误差列于表1, 其中总误差由各项误差的平方和再开平方得到. 第一次实验的总误差为 $0.0534 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$, 第二次实验的总误差为 $0.0573 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$, 两次实验的平均总误差为 $0.0554 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$, 相对误差为 8310×10^{-6} .

从表1可以看出, 误差的主要来源是重力测量产生的误差. 虽然本实验采用的FG5/112型绝对重力仪是目前国际上精度和分辨率最高的绝对重力仪, 但它的分辨率只能达到 $0.1 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2$. 随着绝对重力仪的发展, 如果采用更高分辨率的重力仪或重力梯度仪, 有望将 G 测量的相对精度提高一个数量级. 另外, 在观测和实验方面可通过以下两条途径提高相对测量精度: 一是增加重力测量的数据个数, 如果将重力

差增加到 2500 组左右, 则重力测量误差将减小一个数量级; 二是提高信噪比, 即增加扰动重力差. 但是仅从观测和实验方面提高精度是有限的, 在现有重力仪的精度和分辨率的情况下, 最多能将 G 测量精度提高 5 倍左右. 随着绝对重力仪精度的提高, 并提高观测和实验数据量, G 测量精度有可能提高到 100 ppm.

5 结论

通过两次实验得到实测万有引力常数 G 为 $(6.6665 \pm 0.0554) \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$. 该结果与 Schwarz 等人^[13]利用自由落体实验测得的 $6.6873 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ 相差 $0.0208 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$. 目前CODATA采用的 G 值为 $(6.67428 \pm 0.00067) \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$. 通过本实验, 认为利用FG5绝对重力仪进行万有引力常数的精确测量, 为万有引力常数的测定提供了新的途径, 其可重复性强, 通过大量的重复测量可提高测量结果的精度. 在实际测量中, 需要对各种误差进行严格控制. 虽然本次实验的测量精度有待提高, 但随着重力仪器的精度和分辨率的进一步提高, G 测量的精度也有望提高. 本实验为进一步利用自由落体原理进行万有引力常数的精确测量打下了基础.

表1 误差统计

误差源	第一次实验		第二次实验	
	误差量	G 的误差/ $10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	误差量	G 的误差/ $10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
重力测量误差	$0.451 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2$	0.0531	$0.559 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2$	0.0570
扰动质量厚度测量误差	0.1 mm	0.0003	0.1 mm	0.0009
扰动质量内径测量误差	0.1 mm	0.0033	0.1 mm	0.0038
扰动质量外径测量误差	0.1 mm	0.0013	0.1 mm	0.0012
扰动质量密度测量误差	0.1 kg/m^3	0.0001	0.1 kg/m^3	0.0001
扰动质量定位误差	0.1 mm	0.0039	0.1 mm	0.0025
轴线偏离产生的误差	1 mm	0.000047	1 mm	0.000047
落体初始位移误差	0.00003 mm	0.000003	0.00040 mm	0.00002
落体初始速度误差	0.00015 m/s	0.0005	0.00011 m/s	0.0003
落体初始时间误差	0.00002 s	0.0006	0.00001 s	0.0003
落体结束时间误差	0.00003 s	0.0009	0.00002 s	0.0004
仪器有效高度测量误差	0.1 mm	0.0039	0.1 mm	0.0025
未加扰动的重力值测量误差	$1 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2$	0.0000001	$1 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2$	0.0000003
重力梯度值测量误差	$0.0001 \times 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{cm}^{-1}$	0.0000002	$0.0001 \times 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{cm}^{-1}$	0.0000005
总误差		0.0534		0.0573

参考文献

- 1 刘宏亚, 张平华, 秦荣先. 实验室距离下检验牛顿反平方定律. 科学通报, 1982, 27(20): 1229—1230

- 2 Boer H, Haars H, Michaelis W. A new experiment for the determination of the Newtonian gravitational constant. *Metrologia*, 1987, 24: 171—174[DOI]
- 3 陈应天, 张学荣, 李建国, 等. 用机械共振法测引力常数 G . *华中理工大学学报*, 1989, 17(3): 155—158
- 4 Walesch H, Meyer H, Piel H, et al. The gravitational force at mass separations from 0.6 m to 2.1 m and the precise measurement of G . *IEEE Trans Instrum Meas*, 1995, 44(2): 491—493[DOI]
- 5 Schumacher A, Kleinevoss U, Schutt H, et al. Determination of the gravitational constant G using a Fabry-Perot pendulum resonator. *Precis Electromagn Meas Digest*, 1998. 144—145
- 6 Fitzgerald M P, Armstrong T R. Newton's gravitational constant with uncertainty less than 100 ppm. *IEEE Trans Instrum Meas*, 1995, 44(2): 494—497[DOI]
- 7 Michaelis W, Haars H, Augustin R. A new precise determination of Newton's gravitational constant. *Metrologia*, 1995, 32: 267—276[DOI]
- 8 Schurr J, Nolting F, Kundig W. Gravitational constant measured by means of a beam balance. *Phys Rev Lett*, 1998, 80: 1142—1145[DOI]
- 9 罗俊, 范淑华. 安培力补偿型扭称法测量万有引力常数. *华中理工大学学报*, 1995, 23(10): 1—3
- 10 罗俊, 胡忠坤, 傅湘辉, 等. 扭秤周期法测量万有引力常数 G . *中国科学 A 辑: 数学 物理学 天文学*, 1998, 28(9): 841—847
- 11 Luo J, Hu Z K, Fu X H, et al. Determination of the Newtonian gravitational constant G with a nonlinear fitting method. *Phys Rev D*, 1998, 59: 042001[DOI]
- 12 罗俊, 许厚泽. 万有引力常数 G 的精确测量. *中国科学院研究生院学报*, 2003, 20(3): 368—374
- 13 Schwarz J P, Robertson D S, Niebauer T M, et al. A free-fall determination of the Newtonian constant of gravity. *Science*, 1998, 282: 2230—2234[DOI]
- 14 Schwarz J P, Robertson D S, Niebauer T M, et al. A new determination of the Newtonian constant of gravity using the free fall method. *Meas Sci Tech*, 1999, 10: 478—486[DOI]
- 15 Gundlach J H, Merkowitz S M. Measurement of Newton's constant using a torsion balance with angular acceleration feedback. *Phys Rev Lett*, 2000, 85(14): 2869—2872[DOI]
- 16 Quinn T J, Speake C C, Richman S J, et al. A new determination of G using two methods. *Phys Rev Lett*, 2001, 87(11): 111101[DOI]
- 17 Schlamminger St, Holzschuh E, Kündig W. Determination of the gravitational constant with a beam balance. *Phys Rev Lett*, 2002, 89(16): 161102[DOI]
- 18 Armstrong T R, Fitzgerald M P. New measurements of G using the measurement standards laboratory torsion balance. *Phys Rev Lett*, 2003, 91(20): 201101[DOI]
- 19 Hu Z K, Guo J Q, Luo J. Correction of source mass effects in the HUST-99 measurement of G . *Phys Rev D*, 2005, 71: 127505
- 20 罗俊, 张学荣, 李建国, 等. 有限圆柱体的径向牛顿引力场. *中国科学 A 辑: 数学 物理学 天文学 技术科学*, 1990, 2: 163—168