

代数方程组相关性的一个判准 及其在定理机器证明中的应用*

张景中 杨 路 侯晓荣

(中国科学院成都计算机应用研究所, 成都 610015)

摘 要

本文在吴-Ritt 整序原理基础上, 给出了检验一多项式在一给定的代数簇上是否消没的充要条件. 检验方法是切实可行的, 且不依赖于代数簇的分解.

关键词 整序原理、升列、结式

1 引 言

设 $\{f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, m\}$ 是域 K 上的多项式组, 而 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 K 上的多项式. 一个非常重要的基本问题是: 在条件

$$H: f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1, 2, \dots, m \quad (1.1)$$

之下, 是否有

$$C: g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (1.2)$$

成立?

这一问题的重要性不仅在于它有众多的应用, 如定理机器证明^[1]、微分动力系统定性^[2], 而且在于它是多元高次代数方程组理论的一个基本问题. 如果 (1.1) 式中的诸 f_i 和 (1.2) 式中的 g 都是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的一次式, 这一问题实质上正是线性代数中的线性相关性的判断问题, 是线性代数的基本问题之一. 由此可见, H 是否蕴含 C 的问题, 乃是非线性代数的基本问题之一.

设 $\bar{K}$ 是 K 的代数封闭域, 且允许诸 x_i 在 $\bar{K}$ 中取值, 则满足 (1.1) 式的 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和满足 (1.2) 式的 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 分别构成 $\bar{K}^n$ 中的曲面 Γ_H 和 Γ_C . 我们所提出的上述问题, 在代数几何上的意义就是问是否有 $\Gamma_H \subset \Gamma_C$?

近年来, 由于吴文俊教授的卓越贡献^[1,3], 这一问题有了根本性的进展. 应用吴-Ritt 整序法, 可以把 (1.1) 式转化为具有下列形式的方程组, 即所谓升列:

$$H^*: f_i(u, x_1, x_2, \dots, x_i) = 0, i = 1, 2, \dots, s, \quad (1.3)$$

其中 $u = (u_1, \dots, u_d)$ 是原来的某些变元的改写, 而且在 f_i 中不出现 $x_{i+1}, \dots, x_n$. 这里的诸 x_i 也是 (1.1) 式中某些变元改换指标而得, (1.1) 和 (1.3) 式中的 f_i 不一定相同. 相应地,

1991-08-04 收稿, 1993-02-12 收修改稿.

* 国家“攀登”计划资助项目.

(1.2)式也应改写为形式

$$C^*: g(u, x_1, x_2, \dots, x_s) = 0. \quad (1.4)$$

在此基础上, 吴文俊教授应用余式公式^[1]给出了判定是否有 $H^* \Rightarrow C^*$ 的一个充分条件. 这个条件用于几何定理机器证明, 获得了举世瞩目的巨大成功. 当(1.3)式中的升列 $\{f_i\}$ 为不可约时, 文献[1]中给出的这一条件是充分必要的. 但若 $\{f_i\}$ 可约时, 则需辅以某些几何考虑(如文献[4]), 或预先将升列分解(如文献[5]). 不久前, 我们提出了^[3,2]可以不经预先分解而克服可约性困难的 WR 法、WE 等方法^[6,7]. 但在执行这些方法过程中, 一般也是先导致升列的分解而后彻底解决问题. 本文所建立的方法, 则不需涉及升列的分解而直接得出是否有 $H^* \Rightarrow C^*$ 的确定判断.

以下对所用的符号作出说明.

把 f_i 看成 x_i 的一元多项式时, 它关于 x_i 的最高次数记作 $H(f_i)$, 关于 x_i 的最高次项的系数叫做 f_i 的导系数, 记作 I_i . 一般地, I_i 是关于变元 $u_1, \dots, u_d$ 及 $x_1, \dots, x_{i-1}$ 的多项式.

取定一组 u 值 $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_d)$, 若 $I_1(\tilde{u}) \neq 0$, 则方程 $f_1(\tilde{u}, x_1) = 0$ 在 $\bar{K}$ 中有 $m_1 = H(f_1)$ 个根(当然, 这 m_1 个根不一定两两不同, 甚至可能完全相同, 这并不影响以下的推理), 记作 $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(m_1)}$. 把这些 $x_1^{(i)}$ 分别代入 $I_2(\tilde{u}, x_1)$, 若这些 $I_2(\tilde{u}, x_1^{(i)})$ 均非 0, 又可以解方程 $f_2(\tilde{u}, x_1^{(i)}, x_2) = 0$ 以求出 x_2 的 $m_2 = H(f_2)$ 个值, 记作 $x_2^{(i_1, i_2)} (i_1 = 1, 2, \dots, m_1; i_2 = 1, 2, \dots, m_2)$. 如此做下去, 如果对一切 $j < l$, 已确定

$$\{x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_1, i_2)}, \dots, x_j^{(i_1, i_2, \dots, i_j)}\} = x^{(i_1, \dots, i_j)}, \quad (1.5)$$

$$i_k = 1, 2, \dots, m_k; m_k = H(f_k); k = 1, 2, \dots, j$$

且使一切

$$I_{j+1}(\tilde{u}, x^{(i_1, \dots, i_j)}) \neq 0, j = 1, 2, \dots, l-1. \quad (1.6)$$

则将 $\tilde{u}$ 及 $x^{(i_1, \dots, i_j)}$ 代入 $f_l(u, x)$ 后, 由方程

$$f_l(\tilde{u}, x_1^{(i_1)}, \dots, x_{l-1}^{(i_1, i_2, \dots, i_{l-1})}, x_l) = 0 \quad (1.7)$$

可确定出 x_l 的对应于标号 $i_1, i_2, \dots, i_{l-1}$ 的 $m_l = H(f_l)$ 个值 $x_l^{(i_1, i_2, \dots, i_l)} (i_l = 1, 2, \dots, m_l)$.

如果上述归纳定义过程能进行到 $l = s$, 我们便得到方程组(1.3)对于取定的 $\tilde{u}$ 值的全部 $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_s$ 组解(其中可能有若干组解相同. 即使它们全相同, 仍看成是 m 组解):

$$\{x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_1, i_2)}, \dots, x_s^{(i_1, \dots, i_s)}\} = x^{(i_1, \dots, i_s)}, \quad (1.8)$$

$$i_k = 1, 2, \dots, m_k (= H(f_k)); k = 1, 2, \dots, s.$$

而且对其中每组 $x^{(i_1, \dots, i_s)}$ 都有

$$I_j(\tilde{u}, x^{(i_1, \dots, i_j)}) \neq 0. \quad (1.9)$$

这时, 称 $\tilde{u}$ 为升列 $\{f_i(u, x)\}$ 的一个正常点, 或一组正常参数.

以下设 K 是数域而 $\bar{K}$ 是复数域. 这时若 $\tilde{u}$ 为正常点, 则在 d 维复空间有一个由正常点组成的 $\tilde{u}$ 的邻域. 具有正常点的升列叫做正常升列. 若方程组(1.3)的一组解 $(\tilde{u}, \tilde{x})$ 能使所有的 $I_j(\tilde{u}, \tilde{x}) \neq 0$, 则称为正常解. 若(1.3)式的所有正常解 $(\tilde{u}, \tilde{x})$ 均使 $g(\tilde{u}, \tilde{x}) = 0$, 则称(1.4)式在条件(1.3)之下一般成立. 若 $\tilde{u}$ 为正常点, 解 $(\tilde{u}, \tilde{x})$ 当然是正常解, 反之则未

1) 张景中、杨路, 几何定理机器证明 WE 完全方法, 系统科学与数学, 待发表.

2) 张景中、杨路, 几何定理机器证明的结式矩阵法, 系统科学与数学, 待发表.

必. 本文将对正常升列给出(1.4)式在条件(1.3)之下一般成立的充分必要条件.

在文献[8]中引入了真升列的概念¹⁾, 并给出了把任一升列分解为若干真升列的可行方法. 容易证明, 对 K 为数域的情形, 具有至少一个参数 u 的真升列也就是正常升列.

2 关于结式的几个引理

设 f, g 是交换环 A 上变元 v 的多项式:

$$\begin{cases} f = a_n v^n + \cdots + a_0, a_n \neq 0, \\ g = b_k v^k + \cdots + b_0, a_i, b_i \in A. \end{cases} \quad (2.1)$$

行列式

$$\text{Res}(g, f, v) = \begin{vmatrix} a_n & & & & b_k & & & \\ & a_n & & & & b_k & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & a_n & & & & b_k \\ a_0 & & & & b_0 & & & \\ & a_0 & & & & b_0 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & a_0 & & & & b_0 \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

叫做 g 关于 f 对变元 v 的结式. 多项式 g 的真正次数不一定是 k . 称 k 为 g 在此结式中的认定次数. 这样规定的目的是, 即使有时我们尚不能肯定 b_k 的值是否为 0, 结式 $\text{Res}(g, f, v)$ 仍有确定的定义. 下面的引理表明, 认定次数的不同, 对结式影响不大.

引理 2.1 按(2.1)式, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 $f = 0$ 的全部 n 个根, 则

$$\text{Res}(g, f, v) = a_n^k \prod_{i=1}^n g(\alpha_i). \quad (2.3)$$

引理 2.1 是熟知的结果, 证明从略. 由引理 2.1 立刻得

引理 2.2 按(2.1)式, 若 $f = f_1 \cdot f_2$, f_1 和 f_2 也都是 A 上关于 v 的多项式, 则有

$$\text{Res}(g, f, v) = \text{Res}(g, f_1, v) \cdot \text{Res}(g, f_2, v), \quad (2.4)$$

这里, (2.4)式的三个结式中, g 的认定次数是相同的.

对于升列 $\{f_1, f_2, \cdots, f_s\}$, 可递推地定义 g 关于此升列的结式如下:

$$\begin{cases} R_{s-1} = \text{Res}(g, f_s, x_s), \\ R_{s-2} = \text{Res}(R_{s-1}, f_{s-1}, x_{s-1}), \\ \vdots \\ R_0 = \text{Res}(R_1, f_1, x_1). \end{cases} \quad (2.5)$$

在(2.5)式中最后一个等式定义了 g 关于升列 $\{f_1, f_2, \cdots, f_s\}$ 的结式. 当确定了 g 和 $R_i (i=1, 2, \cdots, s-1)$ 的认定次数之后, R_0 是唯一确定的, 它是 u 的多项式. 可将 R_0 记为

$$\text{Res}(g, f_1, f_2, \cdots, f_s).$$

应用引理 2.1 并对 s 作数学归纳, 可得

引理 2.3 若 $\tilde{u}$ 是升列 $\{f_1, f_2, \cdots, f_s\}$ 的正常点, m_i 是 f_i 关于导元 x_i 的次数, 旗组(1.3)的对应于 $u = \tilde{u}$ 的解 $x^{(i_1, i_2, \cdots, i_s)}$ 如(1.8)式所给, 则有

1) 见 1037 页脚注 2).

$$\text{Res}(g, f_1, \dots, f_s)(\tilde{u}) = P(\tilde{u}) \prod_{\substack{1 \leq i_j \leq m_j \\ j=1, \dots, s}} g(\tilde{u}, x^{(i_1, \dots, i_s)}), \quad (2.6)$$

这里, $P(\tilde{u})$ 是某个多项式 $P(u)$ 在 $u = \tilde{u}$ 处的值. 并且 $P(\tilde{u}) \neq 0$.

证 对 s 作数学归纳. $s = 1$ 时即引理 2.1. 设命题对 $s - 1$ 已真, 考虑 g 关于升列 $\{f_1, \dots, f_s\}$ 的结式, 把 u 及 x_1 都看成自由变元, 由归纳前提可知, 对取定的 $\tilde{u}$ 及相应的 $x_1^{(i_1)}$, 有

$$\begin{aligned} R_1 &= \text{Res}(g, f_2, \dots, f_s)(\tilde{u}, x_1^{(i_1)}) \\ &= P^*(\tilde{u}, x_1^{(i_1)}) \prod_{\substack{1 \leq i_j \leq m_j \\ j=2, \dots, s}} g(\tilde{u}, x^{(i_1, \dots, i_s)}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

这里 P^* 是关于 u, x_1 的多项式在 $u = \tilde{u}, x_1 = x_1^{(i_1)}$ 处的值, 且 $P^*(\tilde{u}, \tilde{x}_1) \neq 0$. 将 (2.7) 式对 $i_1 = 1, \dots, m_1$ 连乘并应用引理 2.1 得

$$\begin{aligned} \text{Res}(g, f_1, \dots, f_s)(\tilde{u}) &= \text{Res}(R_1, f_1, x_1)(\tilde{u}) \\ &= (I_1(\tilde{u}))^N \prod_{i_1=1}^{m_1} \left(P^*(\tilde{u}, x_1^{(i_1)}) \prod_{\substack{1 \leq i_j \leq m_j \\ j=2, \dots, s}} g(\tilde{u}, x^{(i_1, \dots, i_s)}) \right) \\ &= (I_1(\tilde{u}))^N \left(\prod_{i_1=1}^{m_1} P^*(\tilde{u}, x_1^{(i_1)}) \right) \prod_{\substack{1 \leq i_j \leq m_j \\ j=1, \dots, s}} g(\tilde{u}, x^{(i_1, \dots, i_s)}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

由于 $x_1^{(i_1)} (i = 1, 2, \dots, m_1)$ 是多项式 $f_1(\tilde{u}, x_1)$ 的全体根, 故

$$(I_1(\tilde{u}))^N \prod_{i_1=1}^{m_1} P^*(\tilde{u}, x_1^{(i_1)})$$

是 $\tilde{u}$ 的多项式. 由数学归纳法, 引理 2.3 证毕.

从等式(2.6)可见, 对于正常点 $\tilde{u}$, 若有一组解 $(\tilde{u}, \tilde{x})$ 满足 $g(\tilde{u}, \tilde{x}) = 0$, 则对应的结式取值为 0, 反之亦然. 如果把 $g(\tilde{u}, x^{(i_1, \dots, i_s)})$ 看成是 $\tilde{u}$ 的代数函数, 则结式 $\text{Res}(g, f_1, \dots, f_s)$ 恒为 0 的充要条件是(2.6)式左端某个 $g(\tilde{u}, x^{(i_1, \dots, i_s)})$ 恒为 0. 但是, 我们无法判断是否每个 $g(\tilde{u}, x^{(i_1, \dots, i_s)})$ 都恒为 0. 下面来解决这个问题.

3 关于 λ 结式

设 λ 是不同于 u, x 的自由变元, 考虑多项式 $g(u, x) + \lambda$ 关于升列 $\{f_1, \dots, f_s\}$ 的结式

$$R(g + \lambda, f) = R(g + \lambda, f_1, \dots, f_s). \quad (3.1)$$

由引理 2.3, 对正常点 $\tilde{u}$, 有

$$R(g + \lambda, f)(\tilde{u}) = P(\tilde{u}) \prod_{\substack{1 \leq i_j \leq m_j \\ j=1, \dots, s}} (g(\tilde{u}, x^{(i_1, \dots, i_s)}) + \lambda). \quad (3.2)$$

由于(3.2)式两端都是 $\tilde{u}$ 的多项式, 而正常点又是非空开集, 于是立刻得

定理 3.1 若 $\{f_1, \dots, f_s\}$ 为正常升列, 则在条件(1.3)之下有(1.4)式一般成立的充要条件是

$$R(g + \lambda, f)(u, \lambda) = P(u) \lambda^{m_1 \cdot m_2 \cdots m_s}. \quad (3.3)$$

此外,从 $R(g + \lambda, f)$ 中还可以得到更多信息. 对于方程组(1.3), 对应于正常点 u , 其 m 组解 $x^{(i_1, i_2, \dots, i_d)}$ 可以看成 m 组以 u 为变元的代数函数, 每组代数函数叫做由(1.3)式确定的一个小支, 在这 $m = m_1 \cdot m_2 \cdots m_d$ 个小支中(这些小支中可能有若干个相同, 即使都相同, 仍看作 m 个小支), 有多少小支使等式(1.4)成立呢? 由(3.2)式立刻得

定理 3.2 若 $\{f_1, \dots, f_d\}$ 为正常升列. 如果 k 是最大的自然数使得 $\text{Res}(g + \lambda, f)$ 可分解为 λ^k 与某一个多项式 $Q(u, \lambda)$ 的乘积:

$$\text{Res}(g + \lambda, f) = \lambda^k \cdot Q(u, \lambda). \quad (3.4)$$

则恰好有(1.3)式的 k 个小支满足(1.4)式.

这样,从 $R(g + \lambda, f)$ 的表达式,可以看出在多大程度上有 $H^* \Rightarrow C^*$.

顺便指出,有时为了计算上的简便,在 $R(g + \lambda, f)$ 的计算过程中可以使用条件(1.3)中的某些等式,这样做不会影响计算结果,因为结式的计算实质上是消元,去掉等于零的部分不会影响消元结果,这可参见引理 2.1.

这里提出的算法是实际可行的和有效的. 目前通用的符号代数软件都具有结式计算功能. 我们已经在 SUN386i 工作站上用 MAPLE 软件非常成功地实现了对许多复杂问题的判定^[7,8].

4 例证法与 λ 结式

从(3.2)式出发,可以对文献[9]中所引入的几何定理机器证明的数值并行法(多点例证法)的理论根据给出更为清晰和简单的说明.

数值并行法步骤:

1. 估计多项式 $R(g + \lambda, f)$ 关于变元 $u_i (i = 1, 2, \dots, d)$ 的次数的上界. 这一上界不难由结式定义得到. 设它关于 u_i 之次数不超过 n_i .

2. 取变元 $(u_1, \dots, u_d)$ 的一个 $(n_1 + 1) \times \cdots \times (n_d + 1)$ 格阵, 对格阵中每组 u , 求出(1.3)式的各组解.

3. 若格阵中每个 u 都是正常点, 对应于 u 的解都满足 $g = 0$, 则在条件(1.3)下(1.4)式一般成立.

用反证法易知上述步骤之结论正确. 若不然, 即 $g = 0$ 不是一般成立, 则 $R(g + \lambda, f)$ 中所含的 λ 方幂的因子幂次小于 $m_1 \cdot m_2 \cdots m_d$, 因而(3.4)式中的 $Q(u, \lambda)$ 当 $\lambda = 0$ 时为 u 的非零多项式, 形为

$$Q(u, 0) = P(u) \prod_{(\alpha)} g(u, x^{(\alpha)}), \quad (4.1)$$

这里 (α) 使 $x^{(\alpha)}$ 取那些使 $g = 0$ 不恒成立的小支. 由于 $Q(u, 0)$ 关于 u_i 的次数不高于 n_i , 故不可能在 $(n_1 + 1) \times \cdots \times (n_d + 1)$ 格阵上全为0. 这推出矛盾.

我们这里要求格阵上每点都是正常的, 这个要求可以去掉, 但要对结式表示式(2.6)作推广. 详情将于另文讨论之.

关于计算误差问题, (3.2)式也能提供更好的处理方法. 由(3.2)式知, 当 f_i 和 g 都是整数多项式时, 如 u_i 为整数, 则(4.1)式也为整数. 如它非0, 模必不小于1. 因而只要有

$$\left| \prod_{(\alpha)} g(u, x^{(\alpha)}) \right| < 1/|P(u)|, \quad (4.2)$$

便知(4.1)式中之 $Q(u, 0)$ 为 0. 实际计算时, $P(u)$ 可经过一些 I_i 的幂之积估出. 具体的算法, 以及格阵规模的估算法, 将于另文论述.

据此已制成微机通用的“几何定理证明器”^[10].

5 升列可约性检验与 λ 结式

由引理 2.2 可得

引理 5.1 若升列 $\{f_1, f_2, \dots, f_i\}$ 中某一个 f_i 在 $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_{i-1} = 0$ 的条件下(当 $i = 1$ 时, 此条件不存在, 即要求 f_1 本身关于 x_1 可分解) 可分解为两个以 x_i 为导元的多项式之积, 即

$$f_i = f_i^{(1)} \cdot f_i^{(2)}, \quad (5.1)$$

则对应地有

$$\text{Res}(g, f_1, \dots, f_i) = \text{Res}(g, f_1, \dots, f_i^{(1)}, \dots, f_i) \cdot \text{Res}(g, f_1, \dots, f_i^{(2)}, \dots, f_i), \quad (5.2)$$

这里三个结式计算过程中, $g, R_{i-1}, \dots, R_1$ 关于导元的认定次数, 三者应当一致.

应当指出, 这里所说 f_i 可分解, 是指严格意义下的可分解. 例如, 设 $f_1 = x_1^2 - 1, f_2 = x_1 x_2^2 + 1$. 基域是有理数域, 则从 $f_1 = 0$ 可得 $x_1 + 1 = 0$ 或 $x_1 - 1 = 0$, 在 $x_1 + 1 = 0$ 时, f_2 可分解, 但 $x_1 - 1 = 0$ 时 f_2 不能分解, 故 f_2 不满足引理 5.1 中的条件. 但 f_1 则满足此条件.

由引理 5.1 立得

定理 5.1 若有多项式 g , 使 g 关于升列 $\{f_1, \dots, f_i\}$ 的 λ 结式 $R(g + \lambda, f)$ 是 λ 的不可约多项式, 则此升列是不可约的.

这是因为, 若升列 $\{f_1, \dots, f_i\}$ 可约, 则必有最小的 i , 使 f_i 在条件 $\{f_1 = 0, \dots, f_{i-1} = 0\}$ 之下可分解为 x_i 的两个多项式, 因而 $R(g + \lambda, f)$ 关于 λ 可分解.

反之, 易知有

定理 5.2 若 g 关于升列 $\{f_1, \dots, f_i\}$ 的 λ 结式 $R(g + \lambda, f)$ 有形式(3.4)但不具有形式(3.3), 则此升列为可约.

从定理 5.2 可进一步得出: 若 $R(g + \lambda, f)$ 可分解为

$$\text{Res}(g + \lambda, f) = \varphi_1(u, \lambda) \cdot \varphi_2(u, \lambda), \quad (5.3)$$

并能找到有理分式 $\lambda(u)$ 使 $\varphi_1(u, \lambda(u))$ 恒为 0, 但 $\varphi_2(u, \lambda(u))$ 不恒为 0, 则此升列可约. 这是因为, 若将 $g + \lambda(u)$ 去分母后得 g^* , 则 g^* 的 λ 结式中 will 含有部分 λ 方幂型因式.

一般地, 对给定的升列 $\{f_1, \dots, f_i\}$, 取什么样的 g 才能查出其是否可约, 是一个有趣且有用的问题.

6 例 子

例 1 $f_1 = x_1 - u, f_2 = x_2^2 - 2x_1 x_2 + u^2, g = x_2 - x_1$.

解 此题中一切 u 均为正常点.

$$\text{Res}(g + \lambda, f_2, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2x_1 & \lambda - x_1 & 1 \\ u^2 & 0 & \lambda - x_1 \end{vmatrix} = -x_1^2 + \lambda^2 + u^2,$$

$$\text{Res}(-x_1^2 + \lambda^2 + u^2, f_1, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -u & 1 & 0 \\ 0 & -u & \lambda^2 + u^2 \end{vmatrix} = \lambda^2,$$

故在条件 $\{f_1 = 0, f_2 = 0\}$ 之下有 $g = 0$.

例 2 $f_1 = x_1^2 + ux_1, f_2 = x_2^2 + (x_1^2 - u)x_2 + u^2x_1,$
 $g = x_2^2 + x_1(1 - u)x_2 - ux_1^2.$

解 用 Wu 法可求出 g 关于 $\{f_1, f_2\}$ 的最后余式 $\text{prem}(g, f_1, f_2) = (x_1 + u)x_2 \neq 0$, 用 $(x_1 + u)x_2$ 代替 g 作 λ 结式, 求得

$$\text{Res}((x_1 + u)x_2 + \lambda, f_2, x_2) = \lambda ux_1 + \lambda(\lambda + u^2) = R_1$$

(上述计算过程中利用条件 $f_1 = 0$ 做过约化).

$$\text{Res}(R_1, f_1, x_1) = \lambda^3(\lambda + u^2).$$

可见升列 $\{f_1, f_2\}$ 可约; 分解后有一个一次的升列使 $g = 0$ 一般假.

参 考 文 献

- [1] Wu Wen-tsün, *Scientia Sinica*, 1978, 21: 157—179.
- [2] 刘立、陆征一、王东明, 中国科学, A 辑, 1990, (8): 799—804.
- [3] 吴文俊, 几何定理机器证明的基本原理, 科学出版社, 北京, 1984.
- [4] Wu Wen-tsün, 数学季刊, 1987, 2(2): 1—19.
- [5] Chou Shangching, *Mechanical Geometry Theorem Proving*, P. Reidel Publishing Company, 1988.
- [6] Zhang Jingzhong, Yang Lu, A Method to Overcome the Reducibility Difficulty in Mechanical Theorem Proving, ICTP preprint IC/89/263, 1989.
- [7] Yang Lu, Zhang Jingzhong, Hou Xiaorong, *Proceedings IWMM'92*, International Academic Publishers, 1992, 110—134.
- [8] Yang Lu, Zhang Jingzhong, Searching Dependency Between Algebraic Equations: An Algorithm Applied to Automated Reasoning, ICTP preprint IC/91/6, 1991.
- [9] Zhang Jingzhong, Yang Lu, Deng Mike, *Theoretical Computer Science*, 1990, 74: 253—271.
- [10] Yang Lu, Zhang Jingzhong, Li Chuansong, *Proceedings IWMM'92*, International Academic Publishers, 1992, 244—250.