



线性正则变换的卷积定理及其应用

邓 兵^{1,2*} 陶 然¹ 王 越¹

(1. 北京理工大学电子工程系, 北京 100081; 2. 海军航空工程学院电子信息工程系, 烟台 264001)

摘要 线性正则变换作为 Fourier 变换更为广义的形式, 已经在光学和信号处理等领域得到了应用, 相关的许多性质也已经被导出, 但是对应于 Fourier 变换卷积定理的类似理论却还没有得到. 导出了线性正则变换的卷积定理, 并在此基础上研究了线性正则域带限信号的均匀采样以及滤波问题, 得到了信号的均匀采样和低通重构公式, 并提出了一种基于 FFT 实现的线性正则域乘性滤波器的时域构造方法, 与线性正则域实现方法相比, 大大降低了计算量.

关键词 线性正则变换 卷积定理 采样 乘性滤波器

Fourier变换是目前应用非常广泛的一种信号处理工具^[1], 我们知道对一个信号连续作两次Fourier变换得到的是该信号的时域反转, 如果连续作 4 次, 得到的就是原信号, 那么, 如果作分数次的Fourier变换会得到什么呢? 答案是分数阶Fourier变换^[2]. 在Almeida等人的努力下^[3,4], 分数阶Fourier变换在信号处理领域受到了越来越多的重视, 相关理论近 10 年来有了很大的发展, 作为Fourier变换的推广, 得到了许多与Fourier变换相类似的推广结论, 例如, 广义卷积定理、分数阶Fourier域的不确定性原理及采样定理等^[5~7]. 但是分数阶Fourier变换的一般性仍然不够, 通过引入更多的参变量, 分数阶Fourier变换能够进一步推广为线性正则变换(linear canonical transform)^[8]. 事实上, 线性正则变换不仅是分数阶Fourier变换的推广, 也是Fresnel变换的推广. 与分数阶Fourier变换一样, 最开始线性正则变换也是用于微分方程求解和光学系统分析, 随着分数阶Fourier变换理论的发展, 线性正则变换也逐渐在信号处理领域受到重视. 由于线性正则变换具有 3 个自由参数(参变量间存在的一个约束条件, 使得具有 4 个参变量的线性正则变换其实只有 3 个自由参数), 相较于分数阶Fourier变换的 1 个自由参数和Fourier变换的 0 个自由参数, 线性正则变换具有更强的灵活性, 已经在滤波器设计、信号合成、时频分析、加密、通信调制及复用等领域得到了应用^[8~13], 展示了其强大的信号处理能力和优势. 如Barshan等人提出的线性正则域滤波就表现出了线性正则变换多自由度的优势, 得到了比分数阶Fourier域滤波更好的效果, 而且针对同时存在多个线性调频信号干扰的情形, 线性正则域滤波往往一次滤波就能满足要求^[10], 而分数阶Fourier域滤波却必须通过多次滤波才行^[14].

收稿日期: 2005-03-22; 接受日期: 2006-04-26

国家杰出青年科学基金(批准号: 60625104)和国家部委基金(批准号: 6140445)资助项目

* 联系人, E-mail: navy_dbing@tom.com

在其他文献中, 线性正则变换还存在着其他的叫法, 如ABCD变换(ABCD transform)^[15]、广义Fresnel变换(generalized Fresnel transform)^[16]、扩展分数阶Fourier变换(extended fractional Fourier transform)^[17]等. 随着研究的不断深入, 人们发现了线性正则变换的许多性质^[8,18], 包括时移、尺度、微分、积分、能量守恒等基本性质; 一些简单信号(冲激、阶跃、线性调频等)的变换结果; 线性正则变换的特征函数等. 但是, 卷积定理作为Fourier变换的基本定理之一, 它推广到线性正则域是什么结果还不为人所知.

本文的目的是推导出线性正则变换的卷积定理, 并利用该定理分析线性正则域带限信号的采样及滤波问题, 得出线性正则域带限信号的均匀采样和低通重构公式, 以及乘性滤波器设计方法, 丰富线性正则变换的理论体系. 接下来的第1节将简要介绍线性正则变换的定义、需要用到的基本性质以及Fourier变换的相关内容. 第2节将推导出线性正则变换的卷积定理. 线性正则域的低通采样及滤波问题放在第3节进行分析. 第4节是本文的总结.

1 线性正则变换

1.1 线性正则变换的定义及部分性质

线性正则变换的定义式如下^[19]:

$$F_{(a,b,c,d)}(u) = L_{(a,b,c,d)}(f(t)) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{j\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\frac{1}{b}ut} e^{j\frac{a}{2b}t^2} f(t) dt, & b \neq 0, \\ \sqrt{d} \cdot e^{j\frac{cd}{2}u^2} f(du), & b = 0, \end{cases} \quad ad - bc = 1. \quad (1)$$

线性正则变换的两个基本性质是叠加性(the additivity property)和可逆性(the reversibility property), 也是本文卷积定理推导过程当中需要用到的两个重要性质.

性质1 叠加性

$$L_{(a_2,b_2,c_2,d_2)}(L_{(a_1,b_1,c_1,d_1)}(f(t))) = L_{(e,f,g,h)}(f(t)), \quad (2)$$

式中

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

性质2 可逆性

$$L_{(d,-b,-c,a)}(L_{(a,b,c,d)}(f(t))) = f(t). \quad (4)$$

性质2可以由性质1推出. 本文中 $L_{(a,b,c,d)}(\cdot)$ 表示参数为 a,b,c,d 的线性正则变换算子, 带有下标 a,b,c,d 的大写函数表示对应小写函数的线性正则变换结果, 如式(1)中的 $F_{(a,b,c,d)}(u)$ 就表示 $f(t)$ 的线性正则变换. 通常参数 a,b,c,d 取实数. 如果要取复数, 则为满足叠加性和可逆性, 也需要保证 b 为实数.

需要说明的是本文后面章节所提到的线性正则变换均是指 $b \neq 0$ 的情形. 当 $b = 0$ 时, 由定义式可以知道这时的线性正则变换就是尺度算子. 当 $b \neq 0$ 时, 线性正则变换可以简化成分数阶Fourier变换和Fresnel变换^[8]. 例如, 当 $(a,b,c,d) = (\cos\alpha, \sin\alpha, -\sin\alpha, \cos\alpha)$ 时, 线性正则变换简化为

$$L_{(\cos\alpha, \sin\alpha, -\sin\alpha, \cos\alpha)}(f(t)) = \sqrt{e^{-j\alpha}} \cdot \mathfrak{R}_\alpha(f(t)) = \sqrt{e^{-j\alpha}} F_\alpha(u), \quad (5)$$

式中 $\mathfrak{R}_\alpha(\cdot)$ 表示参数为 α 的分数阶 Fourier 变换算子, $F_\alpha(u)$ 表示 $f(t)$ 的分数阶 Fourier 变换. 进一步来看, 当 $\alpha = \pi/2$ 时, 即 $(a, b, c, d) = (0, 1, -1, 0)$ 时, 线性正则变换就简化为具有乘数因子 $\sqrt{-j}$ 的 Fourier 变换

$$L_{(0,1,-1,0)}(f(t)) = \sqrt{-j} \cdot \psi_{\text{FT}}(f(t)) = \sqrt{-j} \cdot F(u), \quad (6)$$

式中 $\psi_{\text{FT}}(\cdot)$ 表示 Fourier 变换算子, 文中后续部分仍将用到.

为了便于理解和推导, 这里先给出本文推导过程中所采用的 Fourier 变换对表达式 [20]

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-jut} dt, \quad (7)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \cdot e^{jut} du \quad (8)$$

及 Fourier 变换的卷积定理 [20].

若 $X(u) = \psi_{\text{FT}}(x(t))$, $Y(u) = \psi_{\text{FT}}(y(t))$, 则

$$\psi_{\text{FT}}(x(t) * y(t)) = X(u)Y(u), \quad (9)$$

$$\psi_{\text{FT}}(x(t)y(t)) = \frac{X(u) * Y(u)}{2\pi}, \quad (10)$$

本文中 $*$ 表示卷积算子: $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. 可以看到本文所用的 Fourier 变换对是非对称形式, 而如果采用对称形式的话, 并不影响推导, 只是会存在 $\sqrt{2\pi}$ 或 $1/\sqrt{2\pi}$ 的系数差.

1.2 线性正则变换与时频分布的关系

分数阶 Fourier 变换可以理解为时频平面的旋转, 如下所示:

$$W_x(u, v) = R_\alpha[W_{X_\alpha}(u, v)], \quad (11)$$

式中 $W_{X_\alpha}(u, v) = l_{\text{WD}}(X_\alpha(u))$ 和 $W_x(u, v) = l_{\text{WD}}(x(t))$ 分别表示 $X_\alpha(u)$ 和 $x(t)$ 的 Wigner 分布, $l_{\text{WD}}(\cdot)$ 表示 Wigner 分布算子, R_ϕ 表示二维函数 $W(u, v)$ 作角度为 ϕ 的顺时针旋转算子, 即

$$R_\phi[W(u, v)] = W(u\cos\phi + v\sin\phi, -u\sin\phi + v\cos\phi),$$

而线性正则变换作为分数阶 Fourier 变换的推广, 其自由参数增加到 3 个, 导致其与 Wigner 分布的关系不再仅仅是简单的坐标旋转, 而复杂了许多. 下面给出了线性正则变换与 Wigner 分布的关系表达式.

设 $W_x(u, v)$ 和 $W_{X_{(a,b,c,d)}}(u, v)$ 分别是 $x(t)$ 和 $X_{(a,b,c,d)}(u)$ 的 Wigner 分布, 即 $W_x(u, v) = l_{\text{WD}}(x(t))$, $W_{X_{(a,b,c,d)}}(u, v) = l_{\text{WD}}(X_{(a,b,c,d)}(u))$, 则存在如下关系:

$$W_{X_{(a,b,c,d)}}(u, v) = W_x(du - bv, -cu + av), \quad (12)$$

$$W_x(u, v) = W_{X_{(a,b,c,d)}}(au + bv, cu + dv), \quad (13)$$

$$|X_{(a,b,c,d)}(u)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(du - bv, -cu + av) dv. \quad (14)$$

由式(14)可以看出, 信号 $x(t)$ 的线性正则变换模平方等于 $x(t)$ 的 Wigner 分布做坐标变换后的边

缘积分, 这点可用在 4.2 节线性正则域乘性滤波器的传递函数设计方面. 根据上述关系式, 我们还能够得到一种更为灵活的 Wigner 分布计算方法: 先对信号 $x(t)$ 做线性正则变换得到 $X_{(a,b,c,d)}(u)$, 再求得其 Wigner 分布 $W_{X_{(a,b,c,d)}}(u, v)$, 最后利用式(12)就能够得到 $x(t)$ 的 Wigner 分布 $W_x(u, v)$. 由于 $W_x(u, v)$ 和 $W_{X_{(a,b,c,d)}}(u, v)$ 之间存在坐标变换关系, 故通过选择不同的参数 (a, b, c, d) 就可以灵活地改变 $W_x(u, v)$ 在时频平面上的采样位置.

2 卷积定理

2.1 线性正则域卷积定理

定理 1 设 $X_{(a,b,c,d)}(u) = L_{(a,b,c,d)}(x(t))$, $Y(u) = \psi_{\text{FT}}(y(t))$, 则

$$L_{(a,b,c,d)}(x(t)y(t)) = \left| \frac{1}{2\pi b} \right| e^{\frac{d}{2b}u^2} \left(\left(X_{(a,b,c,d)}(u) e^{-\frac{d}{2b}v^2} \right) * Y\left(\frac{u}{b}\right) \right). \quad (15)$$

证明 令

$$s(t) = x(t)y(t), \quad (16)$$

则

$$\begin{aligned} S_{(a,b,c,d)}(u) &= L_{(a,b,c,d)}(s(t)) \\ &= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{b}ut} e^{\frac{a}{2b}t^2} x(t)y(t) dt. \end{aligned} \quad (17)$$

根据可逆性

$$\begin{aligned} x(t) &= L_{(d,-b,-c,a)}(X_{(a,b,c,d)}(u)) \\ &= \sqrt{\frac{-1}{j2\pi b}} e^{-\frac{1}{b}at^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{b}ut} e^{-\frac{d}{2b}u^2} X_{(a,b,c,d)}(u) du. \end{aligned} \quad (18)$$

将上式代入式(17), 得到

$$\begin{aligned} S_{(a,b,c,d)}(u) &= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{b}ut} e^{\frac{a}{2b}t^2} \sqrt{\frac{-1}{j2\pi b}} e^{-\frac{1}{b}at^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{b}vt} e^{-\frac{d}{2b}v^2} \cdot X_{(a,b,c,d)}(v) dv \cdot y(t) dt \\ &= \left| \frac{1}{2\pi b} \right| e^{\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{d}{2b}v^2} X_{(a,b,c,d)}(v) \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-\frac{1}{b}(u-v)t} dt dv \\ &= \left| \frac{1}{2\pi b} \right| e^{\frac{d}{2b}u^2} \left(\left(X_{(a,b,c,d)}(u) e^{-\frac{d}{2b}u^2} \right) * Y\left(\frac{u}{b}\right) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

证毕.

2.2 时域卷积定理

定理 2 设 $X_{(a,b,c,d)}(u) = L_{(a,b,c,d)}(x(t))$, 则

$$L_{(a,b,c,d)}(x(t) * y(t)) = \left| \frac{1}{a} \right| e^{\frac{c}{2a}u^2} \left(\left(X_{(a,b,c,d)}(u) e^{-\frac{c}{2a}u^2} \right) * y\left(\frac{u}{a}\right) \right). \quad (20)$$

证明 令 $z(t) = x(t) * y(t)$, 因为

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

所以根据线性正则变换的叠加性, 可以得到

$$Z_{(a,b,c,d)}(u) = L_{(a,b,c,d)}(z(t)) = L_{(b,-a,d,-c)}(L_{(0,1,-1,0)}(z(t))). \quad (22)$$

由式(6)和(10), 有

$$Z_{(0,1,-1,0)}(u) = L_{(0,1,-1,0)}(z(t)) = \sqrt{-j} \cdot \psi_{\text{FT}}(z(t)) = \sqrt{-j} \cdot X(\omega)Y(\omega),$$

所以式(22)可以化为

$$Z_{(a,b,c,d)}(u) = L_{(b,-a,d,-c)}\left(\sqrt{-j} \cdot X(u)Y(u)\right). \quad (23)$$

我们发现将式(16)中的 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别用 $X(\mu)$ 和 $Y(\mu)$ 代替, 并令 $(a,b,c,d) = (b,-a,d,-c)$, 则式(19)化为

$$L_{(b,-a,d,-c)}(X(\mu)Y(\mu)) = \left| \frac{1}{2\pi a} \right| e^{j\frac{c}{2a}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\frac{c}{2a}v^2} L_{(b,-a,d,-c)}(X(\mu)) \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\mu) e^{j\frac{1}{a}(u-v)\mu} d\mu dv, \quad (24)$$

由式(6)可以得到

$$X(\mu) = \sqrt{j} \cdot L_{(0,1,-1,0)}(x(t)).$$

根据式(21)和线性正则变换的叠加性, 有

$$L_{(b,-a,d,-c)}(X(\mu)) = L_{(b,-a,d,-c)}\left(\sqrt{j} \cdot L_{(0,1,-1,0)}(x(t))\right) = \sqrt{j} \cdot X_{(a,b,c,d)}(v), \quad (25)$$

将上式代入式(24), 得到

$$L_{(b,-a,d,-c)}(X(\mu)Y(\mu)) = \left| \frac{1}{2\pi a} \right| e^{j\frac{c}{2a}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\frac{c}{2a}v^2} \sqrt{j} \cdot X_{(a,b,c,d)}(v) \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\mu) e^{j\frac{1}{a}(u-v)\mu} d\mu dv. \quad (26)$$

又因为由式(8)可以得出

$$y(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\mu) \cdot e^{-j\mu t} d\mu,$$

所以式(26)可以进一步化为

$$L_{(b,-a,d,-c)}(X(\mu)Y(\mu)) = \left| \frac{1}{2\pi a} \right| e^{j\frac{c}{2a}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\frac{c}{2a}v^2} \sqrt{j} \cdot X_{(a,b,c,d)}(v) \cdot 2\pi \cdot y\left(\frac{u-v}{a}\right) dv.$$

将上式代入式(23), 整理后得到

$$Z_{(a,b,c,d)}(u) = \left| \frac{1}{a} \right| e^{j\frac{c}{2a}u^2} \left(\left(X_{(a,b,c,d)}(u) e^{-j\frac{c}{2a}u^2} \right) * y\left(\frac{u}{a}\right) \right).$$

证毕.

式(20)所表示的线性正则变换时域卷积定理与 Fourier 变换的时域卷积定理(式(9)所示)相比, 形式要复杂得多, 不便于分析线性正则域的乘性滤波, 因此接下来将给出一种简便直观的线性正则变换“时域卷积定理”.

定理 3 设 $X_{(a,b,c,d)}(u) = L_{(a,b,c,d)}(x(t))$, $Y_{(a,b,c,d)}(u) = L_{(a,b,c,d)}(y(t))$, 则

$$L_{(a,b,c,d)}(x(t)\Theta y(t)) = X_{(a,b,c,d)}(u) \cdot \tilde{Y}_{(a,b,c,d)}(u), \quad (27)$$

式中 $\tilde{Y}_{(a,b,c,d)}(u) = Y_{(a,b,c,d)}(u)e^{-j\frac{d}{2b}u^2}$, 算子 Θ 与线性完整变换的参数有关, 定义如下:

$$x(t)\Theta y(t) = \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{-j\frac{a}{2b}t^2} \left(\left(x(t)e^{j\frac{a}{2b}t^2} \right) * \left(y(t)e^{j\frac{a}{2b}t^2} \right) \right). \quad (28)$$

证明

$$\begin{aligned} L_{(a,b,c,d)}(x(t)\Theta y(t)) &= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{j\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\frac{1}{b}ut} e^{j\frac{a}{2b}t^2} \\ &\quad \cdot \left[\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{-j\frac{a}{2b}t^2} \left(\left(x(t)e^{j\frac{a}{2b}t^2} \right) * \left(y(t)e^{j\frac{a}{2b}t^2} \right) \right) \right] dt \\ &= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{j\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{-j\frac{1}{b}ut} x(\tau) e^{j\frac{a}{2b}\tau^2} y(t-\tau) e^{j\frac{a}{2b}(t-\tau)^2} d\tau dt, \end{aligned}$$

交换积分顺序

$$= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{j\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{j\frac{a}{2b}\tau^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{-j\frac{1}{b}ut} y(t-\tau) e^{j\frac{a}{2b}(t-\tau)^2} dt \right) d\tau,$$

针对上式括号部分对 t 的积分, 令 $t-\tau=\lambda$, 则

$$\begin{aligned} L_{(a,b,c,d)}(x(t)\Theta y(t)) &= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{j\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{j\frac{a}{2b}\tau^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{-j\frac{1}{b}u(\lambda+\tau)} y(\lambda) e^{j\frac{a}{2b}(\lambda)^2} d\lambda \right) d\tau \\ &= e^{-j\frac{d}{2b}u^2} Y_{(a,b,c,d)}(u) \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{j\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\frac{1}{b}u\tau} e^{j\frac{a}{2b}\tau^2} x(\tau) d\tau \\ &= e^{-j\frac{d}{2b}u^2} Y_{(a,b,c,d)}(u) X_{(a,b,c,d)}(u). \end{aligned}$$

证毕.

以上完成了线性正则变换卷积定理的证明. 因为分数阶Fourier变换是线性正则变换的特例, 因此将 $(a,b,c,d) = (\cos\alpha, \sin\alpha, -\sin\alpha, \cos\alpha)$ 代入式(15)和(20), 我们可以得到分数阶Fourier变换的卷积定理^[5]. 本文接下来的部分将利用线性正则变换的卷积定理解决一些理论上的问题.

3 线性正则域的采样与滤波

3.1 采样

利用线性正则域卷积定理(定理 1), 我们可以得到线性正则域带限信号的采样定理. 首先将理想冲激取样信号表示为

$$\hat{x}(t) = x(t) \cdot s_{\delta}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT), \quad (29)$$

式中 T 为采样周期, $s_{\delta}(t)$ 为冲激函数序列, 它的 Fourier 变换为

$$S_{\delta}(u) = \psi_{\text{FT}}(s_{\delta}(t)) = \frac{2\pi}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - m\frac{2\pi}{T}\right). \quad (30)$$

根据定理 1, 得到

$$\begin{aligned}\hat{X}_{(a,b,c,d)}(u) &= L_{(a,b,c,d)}(\hat{x}(t)) = \left| \frac{1}{2\pi b} \right| e^{j\frac{d}{2b}u^2} \left(\left(X_{(a,b,c,d)}(u) e^{-j\frac{d}{2b}u^2} \right) * S_{\delta} \left(\frac{u}{b} \right) \right) \\ &= \left| \frac{1}{2\pi b} \right| e^{j\frac{d}{2b}u^2} \left(\left(X_{(a,b,c,d)}(u) e^{-j\frac{d}{2b}u^2} \right) * \frac{2\pi}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta \left(\frac{u}{b} - m \frac{2\pi}{T} \right) \right) \\ &= \frac{1}{T} e^{j\frac{d}{2b}u^2} \left(\left(X_{(a,b,c,d)}(u) e^{-j\frac{d}{2b}u^2} \right) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta \left(u - m \frac{2\pi b}{T} \right) \right),\end{aligned}\quad (31)$$

由上式可以看出: 采样后, 信号 $x(t)$ 的线性正则变换 $X_{(a,b,c,d)}(u)$ 在线性正则域以周期 $2\pi|b|/T$ 进行延拓, $m=0$ 时, 与原线性正则谱 $X_{(a,b,c,d)}(u)$ 仅相差一个幅度因子 $1/T$, $m \neq 0$ 时的延拓谱还经过了调制和相移. 如果 $x(t)$ 为线性正则域上的限带信号 (即 $X_{(a,b,c,d)}(u)$ 的支撑区限制在 $|u| < \Omega_h$), 那么当 $2\pi|b|/T \geq \Omega_h$ (即采样频率 $\omega_s \geq 2\Omega_h/|b|$) 时就不会发生混叠. 这样就可以用幅度为 T , 截止频率 Ω_{LCT} ($\Omega_{\text{LCT}} \in [\Omega_h, |b|\omega_s - \Omega_h]$) 的线性正则域低通滤波器 (传递函数如式(32)所示) 来取出原线性正则谱 $X_{(a,b,c,d)}(u)$, 而滤除掉各次延拓谱, 从而再通过逆变换就可以恢复出原信号, 而不造成信息损失. 将低通滤波器的截止频率限定在区间 $[\Omega_h, |b|\omega_s - \Omega_h]$, 是为了保证只取出采样信号线性正则谱 $\hat{X}_{(a,b,c,d)}(u)$ 的 $m=0$ 部分.

$$H_{(a,b,c,d)}(u) = \begin{cases} T, & |u| < \Omega_{\text{LCT}}, \\ 0, & |u| \geq \Omega_{\text{LCT}}. \end{cases} \quad (32)$$

上述低通滤波后的输出信号形式可以利用定理 3 得到, 首先令

$$\tilde{Y}_{(a,b,c,d)}(u) = \begin{cases} T, & |u| < \Omega_{\text{LCT}}, \\ 0, & |u| \geq \Omega_{\text{LCT}}, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}y(t) &= L_{(d,-b,-c,a)} \left(\tilde{Y}_{(a,b,c,d)}(u) e^{j\frac{d}{2b}u^2} \right) \\ &= \int_{-\Omega_{\text{LCT}}}^{\Omega_{\text{LCT}}} \sqrt{\frac{-1}{j2\pi b}} e^{-j\frac{a}{2b}t^2} e^{j\frac{1}{b}ut} e^{-j\frac{d}{2b}u^2} T e^{j\frac{d}{2b}u^2} du \\ &= T \sqrt{\frac{-1}{j2\pi b}} e^{-j\frac{a}{2b}t^2} \frac{2b \cdot \sin \frac{\Omega_{\text{LCT}}}{b} t}{t}.\end{aligned}\quad (33)$$

因为 $\hat{X}_{(a,b,c,d)}(u) \tilde{Y}_{(a,b,c,d)}(u) = L_{(a,b,c,d)}(\hat{x}(t) \Theta y(t))$, 所以 $\hat{X}_{(a,b,c,d)}(u)$ 经过低通滤波后的时域输出为

$$\begin{aligned}x(t) &= \hat{x}(t) \Theta y(t) = \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{-j\frac{a}{2b}t^2} \left(\left(\hat{x}(t) e^{j\frac{a}{2b}t^2} \right) * \left(y(t) e^{j\frac{a}{2b}t^2} \right) \right) \\ &= \frac{T}{\pi} e^{-j\frac{a}{2b}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\tau) e^{j\frac{a}{2b}\tau^2} \frac{\sin \frac{\Omega_{\text{LCT}}}{b} (t-\tau)}{t-\tau} d\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{T}{\pi} e^{-j\frac{a}{2b}t^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(\tau - nT) e^{j\frac{a}{2b}\tau^2} \frac{\sin \frac{\Omega_{\text{LCT}}}{b}(t - \tau)}{t - \tau} d\tau \\
&= e^{-j\frac{a}{2b}t^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{j\frac{a}{2b}(nT)^2} \frac{T \sin \frac{\Omega_{\text{LCT}}}{b}(t - nT)}{\pi(t - nT)}, \quad (34)
\end{aligned}$$

上式即为线性正则域带限信号采样后经过低通滤波的时域重构公式. 令 $\Omega_{\text{LCT}} = \omega_s / 2 = \pi / T$, 可以得到传统频域带限信号的低通滤波时域重构公式.

3.2 滤波

本节将讨论线性正则域的乘性滤波问题, 其模型如图 1 所示.

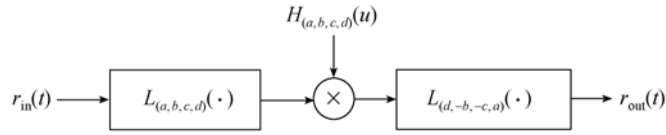


图 1 线性正则域的乘性滤波器

通过设计 $H_{(a,b,c,d)}(u)$ 可以实现低通、高通、带通、带阻等简单形式或更复杂形式的线性正则域滤波

如果信号 $s(t)$ 混叠有噪声 $n(t)$, 但是通过线性正则变换后, 能够在该线性正则域上实现 $S_{(a,b,c,d)}(u)$ 与 $N_{(a,b,c,d)}(u)$ 的部分或完全解耦合, 那么便能通过线性正则域的乘性滤波来提高信噪比. 我们考察图 2 所示的信号 $s(t)$, 其中含有噪声 $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$, 可见从时、频域都无法将信号和噪声完全分离开, 但是根据时频分布与线性正则变换的关系(见 1.2 节), 可以发现利用线性正则变换后就能够实现 $s(t)$ 和噪声在线性正则域上的完全解耦合, 这样利用线性正则域上的带通滤波(图 1)就能够完全滤除掉噪声. 通过改变线性正则变换的参数 a 和 b 可以实现不同斜率的时频平面分割. 如图 2 所示的信号时频分布特征, 很容易看出通过级联两次不同角度(即 $a_1/b_1 = \omega_1/t_1, a_2/b_2 = \omega_2/t_2$) 的线性正则域滤波就可以完全去除噪声, 恢复信号 $s(t)$. 在两级线性正则域级联滤波的实现中可以利用线性正则变换的叠加性, 从而省略一个线性正则反变换和一个正变换环节.

以上讨论的线性正则域乘性滤波也可以采用时域卷积的方式实现, 由于时域卷积可以通过 FFT 来实现^[21], 因此在工程实现上具有更大的价值. 根据定理 3, 将式(27)中的 $\tilde{Y}_{(a,b,c,d)}(u)$ 作为滤波器的传递函数, 可以得到线性正则域乘性滤波的时域实现步骤如下:

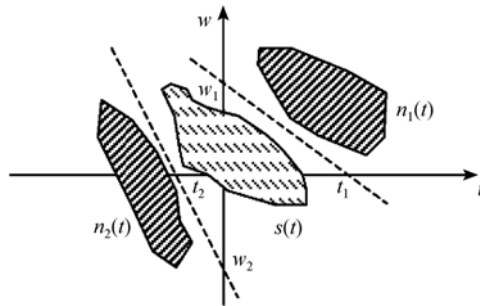


图 2 含噪信号的时频分布

1) 根据时频滤波要求或信号的时频分布特征, 设计出线性正则域滤波的传递函数 $H_{(a,b,c,d)}(u)$ 为

$$\tilde{Y}_{(a,b,c,d)}(u) = H_{(a,b,c,d)}(u). \quad (35)$$

2) 利用 Fourier 反变换得到卷积函数 $g(t)$,

$$g(t) = \sqrt{\frac{j2\pi}{b}} \tilde{y}\left(\frac{t}{b}\right),$$

式中 $\tilde{y}(t)$ 是 $\tilde{Y}_{(a,b,c,d)}(u)$ 的 Fourier 反变换.

证明 根据定理 3, 有

$$\begin{aligned} y(t) &= L_{(d,-b,-c,a)}(Y_{(a,b,c,d)}(u)) \\ &= \sqrt{\frac{-1}{j2\pi b}} e^{-j\frac{a}{2b}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{1}{b}ut} e^{-j\frac{d}{2b}u^2} Y_{(a,b,c,d)}(u) du \\ &= \sqrt{\frac{-1}{j2\pi b}} e^{-j\frac{a}{2b}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{1}{b}ut} \tilde{Y}_{(a,b,c,d)}(u) du \\ &= \sqrt{\frac{j2\pi}{b}} e^{-j\frac{a}{2b}t^2} \tilde{y}\left(\frac{t}{b}\right), \end{aligned}$$

所以

$$g(t) = y(t) e^{j\frac{a}{2b}t^2} = \sqrt{\frac{j2\pi}{b}} \tilde{y}\left(\frac{t}{b}\right). \quad (36)$$

证毕.

3) 按照图 3 构造滤波器, 即

$$r_{\text{out}}(t) = \left(r_{\text{in}}(t) \cdot e^{j\frac{a}{2b}t^2} \right) * g(t) \cdot \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{-j\frac{a}{2b}t^2}. \quad (37)$$

下面将证明图 3 实现了图 1 所示的线性正则域乘性滤波. 将式(36)代入式(37), 有

$$\begin{aligned} r_{\text{out}}(t) &= \left(r_{\text{in}}(t) \cdot e^{j\frac{a}{2b}t^2} \right) * \left(y(t) e^{j\frac{a}{2b}t^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{-j\frac{a}{2b}t^2} \\ &= r_{\text{in}}(t) \Theta y(t). \end{aligned}$$

根据定理 3, 有

$$L_{(a,b,c,d)}(r_{\text{out}}(t)) = L_{(a,b,c,d)}(r_{\text{in}}(t)) \cdot \tilde{Y}_{(a,b,c,d)}(u). \quad (38)$$

由式(35)和(38)可以知道图 3 与图 1 完成了同样的滤波功能.

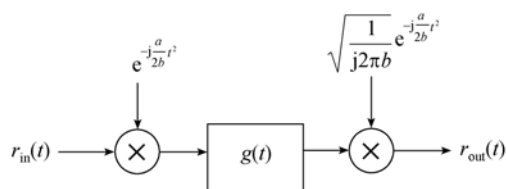


图 3 线性正则域乘性滤波器的时域实现

图3所示的时域实现方法相比于图1所示的线性正则域实现方法存在如下好处, 所以更为适合工程应用: 时域实现方法的计算主要集中在卷积函数 $g(t)$ 的计算和卷积上, 而这两者均能采用经典的FFT算法来实现, 而线性正则域实现方法要经过两次线性正则变换, 因此时域实现方法能够避开繁琐的线性正则变换离散计算. 而目前为止尚未有令人满意的线性正则变换快速离散算法出现, 即便是线性正则变换特例之一的分数阶Fourier变换都尚未有一种满足所有基本要求的快速离散算法^[22]. 因此时域实现方法跟线性正则域实现方法相比, 既能够保证滤波效果不差于后者, 而且运算量大大降低, N 点数据滤波的计算复杂度为 $O(M\log_2 N)$, 而后者计算复杂度为 $O(N^2)$.

4 结束语

本文对线性正则变换的定义及基本性质做了简要介绍, 然后分析了线性正则变换与时频分布的关系, 发现信号的线性正则变换模平方等于信号 Wigner 分布进行坐标变换后的边缘积分(式(14)), 改变线性正则变换的参数 a 和 b 可以实现不同斜率的时频面分割, 这一点可以用来设计线性正则域滤波器的传递函数.

在叠加性和可逆性的基础上, 本文推导出了线性正则变换的一个重要定理——卷积定理(定理1和2), 揭示了两个信号在时域分别做乘积和卷积操作后在线性正则域的表现形式, 而为了便于研究线性正则域乘性滤波, 本文又推导了线性正则变换时域卷积定理的另一种表现形式, 定义了一个时域算子 Θ 以保证两个信号通过该算子后在线性正则域表现为乘积形式(定理3).

利用导出的线性正则变换卷积定理, 本文分析了线性正则域带限信号的采样及滤波问题, 得出了线性正则域带限信号的均匀采样和低通重构公式(式(31)和(34)), 可以看出采样后, 信号的线性正则谱仍然做周期延拓, 只是周期变成了 $|b|\omega_s$, 延拓谱存在调制和相移. 在给出线性正则域乘性滤波模型后, 本文还研究了其时域实现方法, 提出了一种可用经典FFT实现的滤波算法, 在滤波效果不差于线性正则域实现方法的前提下, 大大降低了计算量, 使其可以满足实际应用的需要.

参 考 文 献

- 1 Bracewell R N. The Fourier integral and its applications, 3th ed. Boston: McGraw Hill, 2000
- 2 Namias V. The fractional Fourier transform and its application in quantum mechanics. J Inst Math Appl, 1980, 25(4): 241—265^[DOI]
- 3 Almeida L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations. IEEE Trans Signal Process, 1994, 42(11): 3084—3091^[DOI]
- 4 Mendlovic D, Ozaktas H M. Fractional Fourier transforms and their optical implementation. J Opt Soc Am, 1993, 10(9): 1875—1881
- 5 Almeida L B. Product and convolution theorems for the fractional Fourier transform. IEEE Signal Process Lett, 1997, 4(1): 15—17
- 6 Sudarshan S, Vikram M G. An uncertainty principle for real signals in the fractional Fourier transform domain. IEEE Trans Signal Process, 2001, 49(11): 2545—2548^[DOI]
- 7 Xia Xiang-Gen. On bandlimited signals with fractional Fourier transform. IEEE Signal Process Lett, 1996, 3(3): 72—74^[DOI]
- 8 陶然, 齐林, 王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用. 北京: 清华大学出版社, 2004
- 9 Tao R, Deng B, Wang Y. Research progress of the fractional fourier transform in signal processing. Sci China Ser F-Inf Sci, 2006, 49(1): 1—25

- 10 Barshan B, Kutay M A, Ozaktas H M. Optimal filters with linear canonical transformations, *Opt Commun*, 1997, 135: 32—36[DOI]
- 11 Scharf L L, Thomas J K. Wiener filters in canonical coordinates for transform coding, filtering, and quantizing. *IEEE Trans Signal Process*, 1998, 46(3): 647—654[DOI]
- 12 Bultan A. A four-parameter atomic decomposition of chirplets. *IEEE Trans Signal Process*, 1999, 47(3): 731—745[DOI]
- 13 Mendlovic C, Lohmann A W. Space-bandwidth product adaption and its application to superresolution: fundamentals. *J Opt Soc Am A*, 1997, 14(3): 558—562
- 14 Erden M F, Kutay M A, Ozaktas H M. Repeated filtering in consecutive fractional Fourier domains and its application to signal restoration. *IEEE Trans Signal Process*, 1999, 47(5): 1458—1462[DOI]
- 15 Bernardo L M. ABCD matrix formalism of fractional Fourier optics. *Opt Eng*, 1996, 35(3): 732—740[DOI]
- 16 James D F V, Agarwal G S. The generalized Fresnel transform and its applications to optics. *Opt Commun*, 1996, 126: 207—212[DOI]
- 17 Hua J, Liu L, Li G. Extended fractional Fourier transforms. *J Opt Soc Am A*, 1997, 14(12): 3316—3322
- 18 Pei Soo-Chang, Ding Jian-Jiun. Eigenfunctions of linear canonical transform. *IEEE Trans Signal Process*, 2002, 50(1): 11—26[DOI]
- 19 Moshinsky M, Quesne C. Linear canonical transformations and their unitary representations. *J Math Phys*, 1971, 12(8): 1772—1783
- 20 曾禹村, 张宝俊, 吴鹏翼. 信号与系统. 北京: 北京理工大学出版社, 1992
- 21 王世一. 数字信号处理. 北京: 北京理工大学出版社, 2004. 158—160
- 22 Candan C, Kutay M A, Ozaktas H M. The discrete fractional Fourier transform. *IEEE Trans Signal Process*, 2000, 48(5): 1329—1337[DOI]