



飞行器轨迹优化数值算法综述

黄国强*, 陆宇平, 南英

南京航空航天大学航天学院, 南京 210016

* E-mail: huangguoqiang@nuaa.edu.cn

收稿日期: 2011-12-19; 接受日期: 2012-05-31

中央高校基本科研业务费专项资金和江苏省高校研究生创新基金(批准号: CXZZ11_0215)资助项目

摘要 作为计算飞行力学的重要组成部分之一, 飞行器轨迹优化数值算法一直是飞行力学工作者研究的热点与难点, 较全面地对各种方法进行综合研究的文献非常有限且近期未见公开发表. 通过对百余篇的相关文献的研究, 从计算飞行力学的应用角度出发, 并结合近年来轨迹优化领域的研究进展, 系统归纳分析了目前用于飞行器轨迹优化的数值算法. 简单综述了常用轨迹优化方法的基本原理、特点及应用, 介绍了近几年来出现的一些新方法, 新理论; 最后重点对众多飞行器协同轨迹优化与高超声速飞行器轨迹优化进行了综述. 在本文的结论部分, 提出了对飞行器轨迹优化数值算法的研究方向, 即众多飞行器协同、多目标、全局、实时在线、高精度、能够考虑各种未知的随机干扰的轨迹优化.

关键词

计算飞行力学
飞行器轨迹优化
飞行数值算法
全局优化

飞行器是指在大气层内或(与)大气层外空间(太空)飞行的器械. 在大气层外的飞行器主要有: 卫星、天基飞行器系统、月球探测飞行器、深空探测飞行器等; 在大气层内(外)的飞行器主要有: 航天运载器、(民用、军用)飞机, 各种导弹(地地、地空、地天、天地、空空、空地、各种巡航)、无人机、中空(临近空间)飞行器, 微型飞行器等. 飞行器轨迹优化是由该飞行器的类型及其特性、飞行任务即飞行器追求的性能指标、飞行器所处的周边环境等因素确定的. 飞行任务即性能指标主要有: 群体众多飞行器的协同, 群体对抗, 燃料消耗量最小或起飞重量最小, 飞行时间的最大或最小, 路过(或捕获)该路过的动态(或/与)静态点, 回避动态(或/与)静态威胁区, 与某些目标点交汇(相同的位置与相同的速度), 对飞行器特性要求最小(飞行器特性包括: 可用过载、升阻比、热防护系统、发动机推进特性、机载计算机、通信系统等). 周

边环境是指: 各种引力场、大气层的特性(风场、大气压、温度场等)、无线电与电磁场的作用、其他相关飞行器、各种未知的随机干扰等.

飞行器轨迹优化难点在于: 众多飞行全局协同与对抗, (众多/单一)飞行器轨迹(与静态参数)的多目标全局优化, 实时在线, 高精度, 能够考虑各种未知的随机干扰等.

轨迹优化是现代飞行器设计中的重要内容, 有利于提高飞行器飞行品质以满足既定任务要求. 而且随着飞行器应用领域的日益拓展, 设计过程中对轨迹优化的精度要求也越来越高. 特别是在空间飞行器和高空、高速、高机动性飞行器的设计中, 轨迹优化的地位尤其重要, 并贯穿于整个飞行器设计过程中, 影响着总体、气动布局、制导控制、动力和结构等多个分系统的设计^[1], 可以最佳地动态与静态的组合与匹配飞行器的各子系统, 达到最小起飞重量

或最大有效载荷, 或最低成本, 或最大可靠性等性能指标, 是飞行器系统设计成败的关键因素之一, 对飞行器设计有着十分重要的意义及实际工程价值^[2].

轨迹优化是根据指定的战术技术指标建立飞行力学方程, 并选择主要设计参数, 构造性能泛函, 通过运用相关数学方法求解最优参数而形成最优飞行轨迹. 在数学本质上, 飞行器轨迹优化可以抽象为在包含微分方程、代数方程和不等式等约束下求解泛函极值的开环最优控制问题. 因此, 飞行器最优轨迹的生成也就是求解相应的最优控制问题^[1].

在 20 世纪 50~70 年代, 飞行器轨迹优化的理论有一定的发展, 主要的工作在于求近似解析解, 或次优数值解. 随着最优控制理论、最优数值计算方法、计算机技术等飞速发展, 最优轨迹的数值计算在 80 年代得到了长足发展并趋于成熟. 概括地讲, 可用于飞行器轨迹优化的数值方法主要有: 梯度法、共轭梯度法、广义梯度法、投影恢复梯度法、改进的共轭梯度法、爬山法、变尺度法、直接迭代法、变分法、微分动态法、非线性规划法、多重打靶法、单纯形法和一种直接采用参数优化来获得最优控制的方法等^[2]. 轨迹优化方法的分类因分类标准而异. 主要有以下几大分类标准^[3]: 直接法和间接法; 积分法和微分法; 单目标优化和多目标优化; 确定性优化和鲁棒优化; 纯数学方法和非纯数学方法.

关于轨迹优化方法的综述性文献并不多见. 被广泛引用的一篇是 Betts^[4]在 1998 年发表的文章, 他总结了早期的轨迹优化数值方法, 主要包括直接法和间接法. 雍恩米等人^[3]在 2008 年发表的文章, 总结了常见的轨迹优化数值方法的基本算法、特点和应用情况. 同时紧跟该领域的新进展, 介绍了一些新的轨迹优化方法的基本原理和特点. 陈聪等人^[1]在 2009 年发表的文章, 他系统归纳分析了目前用于飞行器轨迹优化的直接数值解法, 对直接法分为两大步骤: 离散变换和非线性规划进行了分类讨论, 介绍了直接打靶法、配置法和微分包含法各自的基本原理及优缺点, 简述了直接法的应用.

本文从计算飞行力学的应用角度出发, 并结合近年来轨迹优化领域的研究进展, 在文中的第 1 节对飞行器轨迹问题进行了描述. 第 2 节综述了常用轨迹优化方法的基本原理、特点及应用, 介绍了近几年来出现的一些新方法, 新理论. 针对目前的热点多飞行器协同规划、以及高超声速飞行中需要考虑非动力学

变量(如气动加热、能量)等约束的轨迹优化问题, 第 3 和 4 节对高超声速飞行器轨迹优化与众多飞行器协同规划轨迹优化也进行了专题综述. 第 5 节对全文作了总结并对未来飞行器轨迹优化数值算法提出了研究方向.

1 问题描述

飞行器的类型与飞行器轨迹优化的类型均很繁多, 飞行任务(即性能指标、优化目标)多样, 飞行周边环境复杂而不可预测, 约束条件繁杂而随时多变, 众多群体(不同种类)飞行器轨迹优化均可归纳如下.

一个众多飞行器的大型随机飞行控制系统中包含 S 个飞行器子系统, 整个大型随机控制系统可由以下非线性微分方程组描述:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_1(t)}{dt} = \mathbf{f}_1[t, \mathbf{X}(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{w}_1(t), \mathbf{p}_1], \\ \frac{d\mathbf{x}_2(t)}{dt} = \mathbf{f}_2[t, \mathbf{X}(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{w}_2(t), \mathbf{p}_2], \\ \dots \\ \frac{d\mathbf{x}_S(t)}{dt} = \mathbf{f}_S[t, \mathbf{X}(t), \mathbf{u}_S(t), \mathbf{w}_S(t), \mathbf{p}_S], \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{X}=[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_S]$, 其中, 时间 $t \in [t_{i0}, t_{if}]$, $i=1, 2, \dots, S$, 状态变量 $\mathbf{x}_i(t)$ 是第 i 个飞行器子系统的 n_i 维向量 ($\mathbf{x}_i(t) \in R^{n_i}$), 控制变量 $\mathbf{u}_i(t) \in R^{m_i}$ 是第 i 个飞行器子系统的独立变量, 随机干扰 $\mathbf{w}_i(t) \in R^{L_i}$ 是作用在第 i 个子系统上的, $\mathbf{p}_i \in R^{O_i}$ 是第 i 个飞行器子系统(不随时间变化的)静态参数. $\mathbf{f}_i(\dots)$ 是描述相互干扰作用的各动态随机子系统的运动函数.

第 i 个飞行器子系统在时间 t_{i0} 时其初始条件如下, 从该初始条件的起点 O :

$$\mathbf{x}_i(t_{i0}) = \mathbf{x}_{i0}, \quad \mathbf{u}_i(t_{i0}) = \mathbf{u}_{i0}. \quad (2)$$

(在时间 t_{if} 时)运动到终点 F , 并需要满足以下终端约束:

$$\mathbf{x}_i(t_{if}) = \mathbf{x}_{if}, \quad \text{或} \quad \begin{cases} N_1[\mathbf{x}_i(t_{if}), t_{if}] = 0, \\ N_2[\mathbf{x}_i(t_{if}), t_{if}] \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

同时飞行过程受到以下过程约束:

$$\mathbf{g}_{i,\min} \leq \mathbf{g}_i(t, \mathbf{X}, \mathbf{u}_i, \mathbf{W}) \leq \mathbf{g}_{i,\max}, \quad (4)$$

式中, $\mathbf{g}_i$ 是 n_{gi} 维向量函数, $\mathbf{W}=[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_S]$. $\mathbf{u}_i(t)$ 和

$\mathbf{u}_i(t)$ 分别受到约束 Ω_U 和 Ω_P , 表述如下:

$$\mathbf{u}_{i,\min} \leq \mathbf{u}_i(t) \leq \mathbf{u}_{i,\max}, \quad (5)$$

$$\mathbf{p}_{i,\min} \leq \mathbf{p}_i \leq \mathbf{p}_{i,\max}. \quad (6)$$

在各飞行器子系统中的随机干扰 $\mathbf{w}_i(t)$ 按照以下的微分方程作演化运动:

$$\frac{d\mathbf{w}_i(t)}{dt} = \mathbf{h}[t, \mathbf{W}(t), \mathbf{v}_i(t), \mathbf{X}(t)], \quad (7)$$

$i=1, 2, \dots, S, \mathbf{w}_i(t)$ 的起点为: $\mathbf{w}_i(t_{i0}) = \mathbf{w}_{i0}$, $\mathbf{v}_i(t)$ 是随机干扰 $\mathbf{w}_i(t)$ 的控制变量, 它可以是随机的, 也可以是有规划进行的.

每个飞行器子系统在运动过程中有 T 个性能指标如下:

$$J_{i,j}[\mathbf{u}_i(t)] = \int_{t_{i0}}^{t_{if}} L_{i,j}[t, \mathbf{X}(t), \mathbf{u}_i(t), \mathbf{w}_i(t), \mathbf{p}_i] dt, \quad (8)$$

式中, $i=1, 2, \dots, S, j=1, 2, \dots, T, [t_{i0}, t_{if}]$ 是第 i 个飞行器子系统的工作时段. 其终端约束也表述为性能指标为

$$J_{i,T+1}[\mathbf{u}_i(t)] = \Phi_i[\mathbf{x}_i(t_{if}), t_{if}], \quad (9)$$

式中, $\Phi_i[\mathbf{x}_i(t_{if}), t_{if}]$ 是在终端的代价函数.

最优控制问题是寻找输入的控制函数 $\mathbf{U}^*(t) = [\mathbf{u}_1^*(t), \mathbf{u}_2^*(t), \dots, \mathbf{u}_S^*(t)]$ 与静态参数 $\mathbf{p}_i$, 在时段 $[t_{i0}, t_{if}]$ 操纵 S 个飞行器受随机干扰(7)作用的随机子系统(1), 大型随机控制系统从初始起点条件(2)运动到终端条件(3), 并受到过程约束(4)~(6)的作用, 各飞行器系统沿着轨迹 $\mathbf{X}^*(t) = [\mathbf{x}_1^*(t), \mathbf{x}_2^*(t), \dots, \mathbf{x}_S^*(t)]$, 运动, 使得以下全部众多的性能指标全局最优(最小)

$$\min_{\mathbf{U}(t) \in \Omega_U} J = \min \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \dots \\ J_S \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} J_{1,1}, J_{1,2}, \dots, J_{1,T+1} \\ J_{2,1}, J_{2,2}, \dots, J_{2,T+1} \\ \dots \\ J_{S,1}, J_{S,2}, \dots, J_{S,T+1} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

值得指出, $\mathbf{U}(t) = [\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \dots, \mathbf{u}_S(t)]$. 在函数(10)中如果其中一些性能指标 $J_{i,j}$ ($i \in [1, S], j \in [1, T+1]$)需要最大化, 则最大化 $J_{i,j}$ 可以转化为最小化:

$$J_{i,j} = -J_{i,j}. \quad (11)$$

因此函数(10)中, $S \times (T+1)$ 个性能指标 $J_{i,j}$ 是把

分别求最大化与求最小化的问题任意混杂在一起的.

2 数值方法综述

2.1 直接法

从20世纪50年代开始, Лев Понтрягин 和 Bellman 对最优控制理论的卓越贡献奠定了轨迹优化研究的基础^[1]. 同时由于工业应用领域需求的拉动, Bryson^[5] 展开了最优控制理论应用的研究. 应用极小值原理对最优控制问题进行求解时, 由最优控制问题转化而来的微分-代数方程组通常为非线性微分方程两点边值问题, 进行解析求解存在巨大的困难. 即使在80年代以后发展出的间接打靶法、临近极值法等数值求解方法, 依然存在着对初估值高度敏感、复杂约束下求解困难等问题^[6]. 因此, 借助优化理论, 直接通过迭代寻优求解最优轨迹的方法获得了研究者的重视.

直接法涵盖了两个关键问题: 如何将最优控制问题转化为非线性规划问题 and 如何求解变换而来的非线性规划问题, 即离散变换和优化求解^[1].

直接法无需求最优解的必要条件, 而是将连续的最优控制问题离散并参数化, 直接用数值方法对性能指标寻优^[3]. 直接法相对间接法应用更为广泛, 而且有多种转化方法实现上述参数化过程, 目前直接打靶法、多重直接打靶法、配点法、微分包含法等四种方法是主要应用的轨迹优化方法^[4].

2.2 直接打靶法

直接打靶法思路简单明确, 可以直接使用微分方程求解程序, 实现简单, 但是存在着对初始值敏感、数值梯度运算量较大等缺点, 适用于较简单、精度要求不高的最优控制问题. 传统的直接打靶法只能解决初值问题^[7].

直接打靶法最为显著的特性为仅将控制变量在时域上进行离散, 通过显式数值积分方法获得状态变量, 从而求出目标函数, 并将最优控制问题转化为非线性规划问题^[1].

对于最优控制问题, 选取有限个时间点 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_N\}$, 其中 $k = 1, 2, \dots, N, t_k \in [t_0, t_f]$.

设猜测控制变量 $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ 在离散点的值为 $\tilde{\mathbf{u}}_k = \{\tilde{\mathbf{u}}_0, \tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_k, \dots\}$. 由于在进行数值积分可能需要离

散时间点之间的控制值, 因此需要对控制变量进行插值. 例如, 最为常用的插值方法为线性插值:

$$\tilde{u} = \tilde{u}_{t_k} + \frac{\tilde{u}_{t_{k+1}} - \tilde{u}_{t_k}}{t_{k+1} - t_k}(t - t_k), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}. \quad (12)$$

设优化控制变量为

$$X = [\tilde{u}_{t_0}^T, \tilde{u}_{t_1}^T, \dots, \tilde{u}_{t_N}^T]^T. \quad (13)$$

通过在 $[t_0, t_f]$ 上对状态微分方程进行数值求解, 可以获得

$$\tilde{x}_i = F(X), \quad \tilde{J} = J(\tilde{x}, \tilde{u}, t) = J(X), \quad (14)$$

其中 $\tilde{x}_i$ 为数值解法获得的状态变量的离散序列.

对直接打靶法的改进包括: 选取更精确的插值方法(三次插值、样条插值等)、选用精度更高的数值积分方法求解微分方程、选用收敛性和精度更好的 NLP 算法和性能更好的数值微分算法.

直接打靶法转化而来的非线性规划模型优化变量数目较少, 但目标函数形式不明确, 在所选 NLP 算法需要计算梯度时, 需要进行大量的数值梯度运算, 当离散点数目较多时运算量急剧增加. 同时, 目前难以证明一般最优控制问题, 所得 NLP 数值解可收敛于系统最优控制.

直接打靶法在解决火箭上升轨迹和空间飞行器转移轨道优化方面收到了良好的效果.

2.3 多重直接打靶法

直接打靶法中数值积分区间为单区间 $[t_0, t_f]$. 当时间间隔较大时, 积分精度通常较差, 同时, 数值微分算法的效果也很差. 采用多段积分技术的多重直接打靶法是一种对直接打靶法较为简单有效的改进^[8, 9].

这种方法的特点是在离散控制变量的同时, 将状态变量在所选 m 个时间点 $T' = \{t'_1, t'_2, \dots, t'_j, \dots, t'_m\} \subset T, j=1, 2, \dots, m$. 其中 T 为上文中所选的控制变量离散时间点集合.

在数值积分运行至 $t'_j \in T'$ 时, 重新开始进行积分. 这样, 在进行 NLP 优化时, 在状态离散节点处, 计算所得的状态值与猜测值之间的误差被消除, 计算精度有所提高.

3 配置法

配置法即同时将控制变量和状态变量在 T 上进行

离散、将最优控制问题转化为 NLP 的方法. 配置法的离散方法有很多, 在此以 OTIS 所使用的算法为例进行介绍. 为了简化起见, 将状态微分方程简化为标量方程, 同时状态和控制变量也简化为标量.

设控制变量和状态变量在离散点的值分别为

$$\begin{cases} \tilde{u}_{t_k} = \{\tilde{u}_{t_0}, \tilde{u}_{t_1}, \dots, \tilde{u}_{t_k}, \dots\}, \\ \tilde{x}_{t_k} = \{\tilde{x}_{t_1}, \tilde{x}_{t_2}, \dots, \tilde{x}_{t_k}, \dots\}. \end{cases} \quad (15)$$

设优化控制变量为

$$X = [\tilde{u}_{t_0}^T, \tilde{u}_{t_1}^T, \dots, \tilde{u}_{t_N}^T, \tilde{x}_{t_1}^T, \dots, \tilde{x}_{t_N}^T]^T. \quad (16)$$

以 $\tilde{x}_{t_k}$ 为自变量, 在每个离散点之间的区间应用数值积分方法. 所需区间内的状态和控制变量值可以通过三次多项式插值获得. 通过分段积分的叠加和在离散点上应用原有代数约束条件, 可以分别获得目标函数的值.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f dt = \frac{t_{k+1} - t_k}{6} \left(f(t_k) + 4f\left(\frac{t_{k+1} + t_k}{2}\right) + f(t_{k+1}) \right). \quad (17)$$

同时, 状态微分方程可以转化为隐式形式:

$$g(X) = \int_{t_0}^{t_f} f(x, u, t) dt - x - x_{t_0} = 0, \quad (18)$$

这里的 $g(X)$ 在 NLP 模型中作为约束条件处理.

很显然, 配置法所得到的 NLP 模型的优化变量维数远高于直接打靶法, 但以此为代价, 降低了目标函数的病态程度, 提高了收敛性和精度.

由于将状态变量离散值视为未知量, 因此, 配置数值积分过程实际上是一系列符号运算, 而不能完全通过数值程序进行解算. 对一个复杂的最优控制模型进行转换所需的符号运算量是十分惊人的, 当离散点数目较多时尤其明显. 早期软件 OTIS 中集成了一系列飞行器轨迹优化问题的转化而来的 NLP 模型. 但对于其他最优控制问题, OTIS 并不适用. 这使配置法的应用受到了一定限制. 而计算机代数系统(Computer Algebra System, 简称 CAS, 即类似于 Maple 的计算机辅助符号运算系统)的逐渐成熟使这一状况得到了改观, 特别是基于集成了符号运算和数值分析 MatLab 的一批最优控制求解软件的出现使配置法的应用更为广泛.

伪谱法是配置法中目前发展较为迅速的一个分支. 其主要特点是: 离散点集的主要部分为 Gauss 点(例如, Legendre 伪谱法在 Gauss 点集基础上添加了初始点和终端点, Radau 伪谱法在 Gauss 点集基础上添

加了初始点); 利用正交多项式对控制和状态变量进行逼近. 伪谱方法对数值迭代的初始值敏感性很低, 收敛性非常好.

在一定条件下, 利用伪谱方法对最优控制问题进行变换满足所谓的协态映射定理(Costate Mapping Principle, 简称 CMP). 这意味着这些条件下, 直接法与间接数值方法实现了结果的统一, 从而从理论上保证了伪谱方法的收敛性.

伪谱方法对控制变量和状态变量的近似多项式、配点选择以及是否满足 CMP 条件的对比如表 1 所示^[10].

4 微分包含法

微分包含方法是另一种基于隐式积分原理的离散化方法, 可以视为对配置法的改进. 相对配置法, 由微分包含法所转化而来的 NLP 模型中的变量数目较少. 通常状况下, 使用微分包含法求解速度更快, 这更有利于飞行器轨迹优化的在线实现, 因此, 微分包含法是前景较为广阔的最优控制离散变换方法^[10].

微分包含法的显著特征是只对状态变量进行离散, 而通过对状态变量的变化率的限制将受限控制变量消去. 但是由于微分包含法必须抵消控制量, 对于复杂系统在转化上有一定的难度, 使其很难在参数化问题中得到广泛推广^[4].

直接法具有以下优点.

1) 不需要推导一阶最优性条件.

2) 收敛域相对于间接法更宽广, 对初值估计精度要求不高, 不需要猜测协调变量的初值, 不需要切换结构的先验信息.

直接法的不足如下.

1) 许多直接法不提供主矢量信息, 因此不能保证获得的非线性规划解是原最优控制问题的解.

2) 将控制变量参数化的直接法容易收敛到局部最优解, 即依赖于初始猜测值.

表 1 不同伪谱方法的对比

PS method	Discrete point type	Interpolation polynomial	Meeting CMP or not
LPM	LGL point	Lagrange polynomial	no
GPM	LG point	Lagrange polynomial	yes
CPM	GGL point	Chebyshev polynomial	no
RPM	LGR point	Lagrange polynomial	no
Hermite-LPM	LGL point	Lagrange polynomial	no

考虑到遗传算法的全局寻优能力, 一些学者将遗传算法用于求轨迹优化的 NLP 问题. 但遗传算法又存在计算量很大的问题. 另外, 对高超声速飞行器, 由于飞行轨迹对控制参数的高度敏感, 以使基于 NLP 方法的轨迹优化存在很大困难. 相对于仅限控制变量参数化的方法, 配点法对初始猜测值更不敏感^[11].

几十年来, 轨迹优化的直接数值算法的应用为航空航天工业的发展起到了极大的促进作用. 利用连续系统取样离散方法和 SQP、内点法等优化方法, 已经成功解决了再入飞行器轨迹优化等问题^[12, 13].

POST 使用直接打靶法解决了很多运载火箭(如“大力神”、“Delta”号运载火箭)的上升轨迹优化和任务分析. 国内利用直接打靶法解决了高超声速飞行器上升、滑翔和巡航轨迹的优化问题^[14, 15], RLV 多约束下上升轨迹优化^[16], Sönger 弹道优化^[17]、常推力月球着陆轨道优化等问题^[18], 取得了一定成果.

Boeing 公司利用以配置法为基础的 Cheby TOP 程序对很多卫星小推力变轨的轨道进行了优化. 配置法还解决了包括商业飞机的航迹优化、月球软着陆轨迹优化、航天飞机再入轨迹优化等大量问题^[1]. Boeing 公司于 20 世纪 80~90 年代开发的 OTIS 和 SOCS 软件使配置法更广泛的深入各种飞行器轨迹设计中.

2006 年 11 月 5 日, 国际空间站执行了一次大规模的姿态调整. 与以往不同的是, 这次被称为“零推进剂机动”的任务基于伪谱最优控制理论进行了预先的轨迹优化, 这是伪谱方法首次获得大规模的实际应用. 伪谱方法不仅使 NASA 节省了 150 万美元的推进剂费用, 而且实现了原本用现有国际空间站控制算法不能完成的任务^[19].

迄今为止, 伪谱方法已广泛应用于解决无人机航迹规划、导弹制导、机械臂轨迹优化、倒立摆的摆起及稳定、航天器轨道机动和入轨飞行器上升段制导等大量的最优控制问题, 成为目前解决最优控制和轨迹最优化问题最有效的工具^[20].

可以看出, 直接法的发展与航空航天和工业应用密切相关. 对直接法理论的研究进展能够快速地对实际工程起到推动作用.

4.1 间接法

间接法是基于 Pontryagin 极小值原理将最优控

制问题转换为一个 Hamiltonian 边值问题. 因此, 首先引入 Hamilton 函数^[10]:

$$H[x(t), u(t), \lambda(t), t] = L[x(t), u(t), t] + \lambda^T(t) f[x(t), u(t), t], \quad (19)$$

其中 $\lambda^T(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_l(t)]$ 称为伴随矢量或协调矢量. 为了适于极小值原理, 将边界条件分解为初始条件 $x(t_0) = x_0$ 和终端约束 $N[x(t_f), t_f] = 0$. 若 u^* 是最优控制的必要条件是存在一个非零矢量函数 $\lambda^*(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, 使 $u^*(t), \lambda^*(t), x^*(t), t_f^*$ 满足下列条件.

1) Hamilton 方程组

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \frac{\partial H[x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t]}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda}^* = -\frac{\partial H[x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t]}{\partial x} \end{cases} \quad (20)$$

2) 极小值条件

$$H[x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t] = \min_{u \in U} H[x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t]. \quad (21)$$

3) 终端横截条件

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ \lambda(t_f) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left(\frac{\partial N_1^T}{\partial x} \right) v \right]_{t=t_f}, \\ N_1[x(t_f), t_f] = 0. \end{cases} \quad (22)$$

4) 终端时刻 t_f 可变时, 用来确定 t_f 的终端横截条件:

$$\left[H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + v^T \frac{\partial N_1}{\partial t} \right]_{t=t_f} = 0. \quad (23)$$

间接法一般先求得最优控制变量的表达式, 它们是关于伴随变量和状态变量的函数. 再求解由 Hamilton 方程组、终端横截条件和约束构成的一个两点边值问题, 从而获得最优轨迹和相应最优控制的数值解.

初值问题和两点边值问题的主要区别在于, 前者所有微分方程状态变量的初始值均为已知, 使用数值积分方法, 由初始条件对微分方程进行积分求得数值解. 而两点边值问题, 其 $2n$ 个微分方程组中只有 n 个微分方程的初始值为已知, 另外的 n 个伴随微分方程组的初始值却不知, 只知道终值条件. 为了将它按初值问题的要求进行数值积分, 必须人为地随机选择 n 个变量的初始值, 才能同时对 $2n$ 个微分方程组进行数值积分, 以求得解. 两点边值问题的求

解是十分困难的, 除了一些简单的问题外, 一般难于求得精确解, 只能用数值积分方法求得近似解, 原因是随机选择的初始值求得的解往往很难满足另一边值条件. 况且, 由于飞行器运动的非线性常微分方程组本身就很复杂, 飞行器在大气层内飞行时, 使用的气动力和大气参数严重的非线性和大量的表格函数, 加上控制变量和状态变量通常施加各种类型的约束, 使轨道优化与制导规律问题的求解就显得特别复杂, 这种情况要求得到精确解就更加困难. 目前求解两点边值问题较常使用的数值方法有两种方法, 一种是打靶方法, 另一种是有限差分方法^[21].

4.1.1 打靶方法

在两点边值问题求解时, 对其中伴随微分方程组部分的初始值, 由猜测值给出. 然后才能采用前向积分的方法解初值问题. 如果求出的解能满足在另一端终点的所有边值条件, 那么初值问题的解就是边值问题的解. 否则, 另选择新的初始猜测值, 继续求得新的解. 这个重复迭代的求解过程直到所有边界条件被满足, 获得两点边值问题的解才终止. 使用打靶方法时, 选择合适的策略, 充分利用前几步迭代结果来调整新的初始值, 使迭代解快速收敛到最优解是极为重要的. 通常可选择的策略和算法有各式各样, 但最通用的策略和算法是牛顿-拉普森(Newton-Raphson)方法, 因为两点边值问题的求解过程中需要计算雅可比(Jacobian)矩阵, 矩阵中的元素不是解析函数形式, 而牛顿-拉普森方法恰为不需要提供解析式的雅可比矩阵, 所以很适合于两点边值问题的求解使用.

4.1.2 有限差分方法

由于飞行器的轨道优化与制导规律问题是一组变系数非线性的常微分方程式, 它可以由积分区间上的网格点值用差分方程近似代替, 试探解由每个网格点应变量值组成, 尽管初步选择的网格点值不一定能满足有限差分方程, 但是可以通过调节网格点上的所有值, 使其逐次接近, 最终达到满足有限差分方程及边界条件的解. 值得注意的是, 使用有限差分方法来解两点边值问题时, 与网格点的分布, 差分方程表达微分方程的形式以及迭代策略等有关. 一般, 对于飞行器飞行轨道比较光滑, 并且不是激烈振荡的情况, 使用有限差分方法比打靶方法好. 否则,

可使用打靶方法.

近年来, 针对打靶法求解两点边值问题存在的困难, 间接法的研究开始关注如何有效求解两点边值问题, 如协调变量的初值猜测技术的研究^[22], 遗传算法求两点边值问题^[23], 改进的邻近值法等^[24].

间接法具有以下优点.

- 1) 解的精度较高.
- 2) 最优解满足一阶最优性必要条件.

间接法的几点不足.

1) 基于极大(极小)值原理推导最优解的过程较为复杂和繁琐.

2) 求解两点边值问题时的收敛域很小, 因此对未知边界条件的初值估计精度要求很高. 而且, 很多间接法都要求估计协调变量的初值, 而这些变量无物理意义, 这进一步增大了初值估计的难度.

3) 对于有路径约束的最优控制问题, 采用间接法存在一定困难. 可能的解决方法是将过程约束通过数学变换转化为等价的终端约束, 或者是具备约束和非约束弧段的先验信息或切换结构.

极大值原理在早期的轨道优化研究中得到广泛应用. Vinh(阮春荣)^[25]在 20 世纪 70 年代开始研究大气中的最优飞行轨迹, 以变分原理和 Pontryagin 极值原理为理论基础, 研究了最优无动力飞行、超音速巡航、转弯以及再入飞行器最优滑翔等问题, 其中大部分问题考虑平面运动模型, 再入问题则采用了修正的查普曼(Chapman)公式. Istratie^[26]采用间接法研究了一系列不同优化目标, 如最小热流密度、最大剩余速度等最优跳跃再入轨迹问题. Lu 和 Vinh^[27]推导了基于极大值原理求解 Chebyshev 问题的方法, 他们将

问题转化为沿轨迹的状态变量受约束的问题来处理. 吴德隆, 王小军等人对基于极大值原理的最优气动辅助变轨问题进行了深入研究, 并在文献[28]中系统地介绍了其研究成果. 间接法相关应用还有飞机空战最优机动轨迹^[29], 高超声速滑翔飞行器弹道优化^[23], 运载火箭上升段轨迹优化等.

间接法求解最优控制问题时, 要利用 Pontryagin 极大值原理推导出最优控制的一阶必要条件, 从而得到求解最优轨迹的 Hamilton 边值问题(HBVP), 而后再利用直接法中提到的直接打靶法、配点法对 HBVP 进行参数化. 间接法求解的精度较高, 且最优解满足一阶最优性必要条件. 与直接法相比, 用间接法求解最优控制问题存在一定缺陷: 基于 Pontryagin 极大值原理推导最优解与横截条件等过程较为复杂和繁琐; 求解 HBVP 时的收敛域很小, 致使初值估计精度要求很高; 协态变量无实际物理意义, 其初始值难以估计; 含路径约束的最优控制问题, 必须将路径约束转化为终端约束才能解算; 含隐式约束条件时, 相应的拉格朗日乘子很难消去, 将大大增加计算量.

通过系统地研究和总结现有轨迹优化的数值解法的原理和成果, 在表 2 中对以上各种直接法和间接法进行了对比分析^[10].

4.2 动态规划法

动态规划是解决多阶段决策过程最优化的一种数学方法. 20 世纪 50 年代, Bellman 等人根据研究的一类多阶段决策问题, 提出了最优性原理作为动态规划的理论基础. 其最优性原理为: 一个最优策略的子策略总是最优的^[30, 31], 数学描述为

表 2 各种数值优化方法对比分析

Method	Initial value sensitivity	Symbol deduction type	NLP model	Whether t_f or not, uncertain problem	Accuracy	Whether BVP or not
Direct shooting	high	simple discrete control variable	relatively small	relatively hard	low	cannot
Point collocation	relatively low	large calculation quantity of discrete control variable and state variable, but programming is possible.	extremely large	relatively easy	relatively high	can
Differential inclusion	relatively low	hodograph mapping and discrete state variable, artificially deducting hodograph mapping and state discrete can be programmed	large	relatively easy	relatively high	can
Indirect	relatively high	first-order optimal condition, hard to be programmed		hard	high	hard

$$\begin{cases} \min_{u_1} \min_{u_2} \cdots \min_{u_N} J(u_1, u_2, \cdots, u_N), \\ s.t. \dot{x} = f(x, u, t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (24)$$

动态规划法的优点是计算原理简单, 精确度相对较高, 有严格的理论支持.

Betts 在他的综述文章中引用了《Applied Optimal Control》^[4]一书中的描述能够说明该方法的不足, 即: 该方法最大的不足, 正如 Bellman 自己所说, 是“维数灾难”现象. 即便是一个稍复杂的问题, 计算结果的记录都需要大量的存储量. 如果我们只是想从一个已知初始点寻找最优路径, 那么用动态规划方法寻找全局极值点就显得过于繁琐. 另外, 离散格式的选择无统一标准, 离散化程度会影响计算速度和精度.

动态规划是较早应用于飞行器轨迹优化的方法之一. 其方法研究一直围绕解决实际最优控制问题的“维数灾难”进行. Luns 等人^[32]研究了一种性能更好的迭代动态规划(IDP, Iterative Dynamic Programming)方法. 由于该方法不需要计算梯度信息, IDP 对光滑和非光滑最优控制问题都表现出较好的性能. IDP 解决了扩大网格的问题. 虽然 IDP 方法已经成功应用于许多实际最优控制问题, 如化学工程领域, 且成功地求解了一些高维问题, 但它在求解如空中交通、无人飞行器轨迹规划等在线最优控制问题时性能欠佳. 传统的动态规划和 IDP 都存在一个共同的问题, 即无法确定系统在每阶段适当的网格点数. 众所周知, 网格点数越多, 得到解得精度就越高, 同时, 所需的时间和存储空间随网格点数呈指数量级增长. 文献[33]提出了一种单网格点动态规划方法用于轨迹优化, 该方法可解决一些在线最优控制问题, 如飞行器碰撞规避, 无人飞行器的控制、最优轨道转移等问题.

4.3 快速探索随机树法

最近, 一些用于机器人轨迹规划的方法被引入飞行器轨迹在线规划与制导问题中. RRT 方法是针对在线轨迹规划, 优化需求而引入的一种快速轨迹规划方法. 该方法的基本原理为: 建立两个状态树, 一个以初始状态为起点, 向前积分; 另一个以目标(终端)状态为起点, 向后积分. 状态树每一步增长过程都是对飞行器动力学进行前向或后向积分. 相应的控制变量由使两个状态树以更快的速度接近的 RRT 算法决定. 一旦两个状态树接近到一定的空间距离,

就可连接起来作为一条可行轨迹^[34].

假定 x_{init} 为规划的起点, x_{goal} 为规划的终点. RRT 算法具体描述如下^[35].

步骤 1. 初始化生长树 T . 以给定的初始点 x_{init} 作为树 T 的根节点 t_1 .

步骤 2. 选择树的探索方向点 x_{dir} . 以概率 p 选择目标点 x_{goal} 作为当前树的探索方向点, 以概率 $1-p$ 选择搜索空间中的一个随机点 x_{rand} 作为当前树的探索方向点.

步骤 3. 选择树的生长点 t_{grow} . 假定当前树 T 中有 m 个节点, 即 $T = \{t_i | i = 1, 2, \cdots, m\}$. $d_i = \|t_i - x_{dir}\|$ 表示树节点 t_i 与 x_{dir} 间的距离, 选择距离探索方向点 x_{dir} 最近的节点 $t_{near} = \arg \min_{t_i \in T} \{\|x_{dir} - t_i\|\}$ 作为树生长点 t_{grow} .

步骤 4. 计算探索节点 t_{new} . 假定 S 为探索的步长, 则探索的新节点 t_{new} 可通过下式计算:

$$t_{new} = \begin{cases} x_{dir}, & \|x_{dir} - t_{grow}\| \leq S, \\ t_{grow} + S \cdot \frac{x_{dir} - t_{grow}}{\|x_{dir} - t_{grow}\|}, & \text{其他.} \end{cases} \quad (25)$$

步骤 5. 更新生长树 T . 若 t_{new} 未与障碍物发生碰撞, 则把 t_{new} 加入到生长树中, 新的生长树更新为 $T' = T \cup t_{new}$; 否则, 放弃本次对树所做的探索, 即 $T' = T$.

步骤 6. 判断是否已达目标. 若新探索点 t_{new} 满足 $\|x_{grow} - t_{dir}\| < \theta$, 其中, θ 为事先给定的阈值, 则认为已到达目标 x_{goal} ; 否则, 返回步骤 2.

步骤 7. 从目标点回到树的根节点, 并返回路径.

由于控制变量是由 RRT 算法在各种控制约束, 如最大侧倾角变化率、加速度约束等相对应的控制空间中计算出来, 同时超过状态变量约束的状态树分支会自动去除. 因此可自动满足状态变量或控制变量空间的约束. 这是 RRT 方法最显著的优点. 它存在一个我们不期望的特性, 即随机性. 对于在线应用问题, 随机过程可能使在一个特定时间区间内无法得到可行的轨迹. 且当问题规模增大时, 其难度急剧增加. 该方法的瓶颈是对那些复杂动力学系统如何确定收敛标准(Metric). 例如在再入问题中有两个状态变量, 航迹角和速度, 除非我们知道如何从每一个状态变量将飞行器控制到目标点, 否则很难判断哪一个状态更接近目标. 该问题与全部状态轨迹设计是等价的.

文献[36]实现了自动飞行器轨迹生成. 文献[34]试图采用 RRT 方法解决再入问题. 该方法在解决如直升机路径规划这类较难的轨迹规划问题时表现出很好的应用前景^[37]. 随机树法能够在数秒钟内找到十几条可行的规避多个障碍物的轨迹, 而其他优化方法很难获得如此多状态约束的可行轨迹.

4.4 滚动时域优化法

滚动时域优化方法是借鉴预测控制的思想, 对飞行器轨迹进行在线地有限时段优化. 预测控制是针对传统最优控制在工业过程中的不适用性而提出的一种优化控制算法, 其重要思想是利用滚动的有限时段优化取代一成不变的全局优化.

而将预测控制思想引入飞行器轨迹优化问题时, 还需要考虑终端价值函数最优, 因此在应用滚动时域优化时, 还必须解决剩余时间价值函数(Cost-to-Go Function)的描述问题. 一般的方法是采用某种近似模型来描述该函数.

在预测控制中已出现多种方法来解决该问题^[38]. Jadbabaie 等人提出一种控 Lyapunov 函数(CLF)来计算终端价值函数. 对基于滚动时域的轨迹优化问题, 一般采用近似的轨迹模型求解剩余价值函数. 例如文献[39]用多项式表示二维地形模型, 用近似距目标最短距离作为 RH 规划器的终端价值函数, 而该近似模型可由地形和目标信息离线计算.

滚动时域混合整数线性规划数学描述为^[40]

$$\begin{cases} \min_{x_k, u_k} J_T = \sum_{j=0}^{T-1} (q^T |x_{k+j|k} - x_f| + r^T |u_{k+j|k}|) + s^T |x_{k+T|k} - x_f|, \\ \text{s.t. } x_{k+j+1|k} = Ax_{k+j|k} + Bu_{k+j|k}, \forall j = 0, \dots, T-1, \\ x_{k+0|k} = \hat{x}_{k|k-1}, \\ u_{k+j|k} \in U, \forall j = 0, \dots, T-1, \\ p_{k+j|k} \notin U, \forall j = 0, \dots, T, \end{cases} \quad (26)$$

其中 T 表示控制时域和预测(规划)时域的长度. $x_{k+j|k}$ 表示在当前离散 k 时刻, 基于系统动态方程, k 时刻状态 x_k , 以及最优控制序列 $\{u_{k+j|k}\}_{j=0, \dots, N-1}$ 作用下, $k+j$ 时刻的系统状态的预测. 性能指标函数 J_T 表示要求飞行器状态尽可能快地到达终态 x_f , 并考虑控制 u 和终态 x_f 的性能要求, 其中 q , r , 和 s 为相应项的权向量.

实际轨迹优化问题往往存在一定程度的不确定性, 比如飞行器到达目的地之前或许目标已发生变

化, 且环境参数的详细信息也很难预先准确获知. 同时轨迹越长, 不确定性就越大. 滚动优化在有限时段优化轨迹, 因此在应对不确定性上具有优势, 同时有利于实现轨迹的实时规划.

目前, 该方法主要用于低空飞行器的轨迹规划. 如地形跟踪飞行器的二维或三维轨迹实时规划、预先已知的威胁和地形等信息或任务目标改变等情况下的飞行器轨迹在线重新规划^[41-43]. 且将该方法与动态规划等离线优化方法相结合, 以实现实时轨迹优化.

4.5 遗传算法

遗传算法(Genetic Algorithm, GA) 是一种模拟自然选择和遗传机制的不依靠梯度信息的智能全局优化算法, 具有较强的鲁棒性, 对初值不敏感, 对于一些大型、复杂非线性系统的全局优化问题表现出良好的性能. 遗传算法是建立在自然选择和群众遗传学机理基础上的, 具有广泛适应性的搜索方法. 遗传算法搜索结合了达尔文适者生存和随机信息交换的思想, 适者生存消除了解中不适应因素, 随机信息交换利用了原有解中已知的知识, 从而有力地加快了搜索过程.

遗传算法的基本思想: 遗传算法是从代表问题可能潜在解集的一个种群开始的, 一个种群由经过基因编码的一定数目的个体组成, 初始种群产生之后, 按照适者生存和优胜劣汰的原理, 逐步演化产生出越来越好的近似解. 在每一代, 根据问题域中个体的适应度大小挑选个体, 并借助自然遗传学的遗传算子进行交叉和变异, 产生出代表新的解集的种群. 这个过程将导致种群向自然进化一样的后代种群比前代更加适应环境, 末代种群中的最优个体经过解码, 可以作为问题近似最优解^[44].

基本遗传算法使用固定长度 n 进制符号串来表示群体中的个体, 其等位基因是由符号集 $\{0, 1, \dots, n\}$ 所组成的. 初始群体中各个个体的基因值可用均匀分布的随机数来生成^[45].

生物的进化过程主要是通过染色体之间的交叉和染色体的变异共同完成的, 与此相对应, 遗传算法中最优解的搜索过程也是模仿生物的这个进化过程使用所谓的遗传算子 (Genetic Operators) 作用于群体 $P(t)$ 中进行下述遗传操作从而得到新一代群体 $P(t+1)$.

最主要的遗传算子如下所述.

1) 选择算子(Selection): 根据各个个体的适应度

按照一定的规则和方法从第 t 代群体 $P(t)$ 中选出一些优良的个体遗传到下一代群体中, 群体中各个个体选择的概率根据个体的适应度, 个体适应度小的个体被选中的概率较小而个体适应度大的个体被选中的机会较大, 这个体现了自然界适者生存的思想.

2) 交叉算子(Crossover): 将群体内的各个个体随机搭配成对, 对每一对个体以某个概率(称为交叉概率 P_c , Crossover Rate)交换它们之间的部分染色体. 以二进制遗传算法编码单点交叉为例, 具体方法如下所示:

$$\begin{array}{l} A = (0110, 1100) \\ B = (1110, 0100) \end{array} \xrightarrow{\text{交叉}} \begin{array}{l} A' = (1110, 1100) \\ B' = (0110, 0100) \end{array}$$

3) 变异算子(Mutation): 对群体 $P(t)$ 中的每一个个体以某一概率(称为变异概率 P_m , Mutation Rate)改变某一个或某一些基因位上的基因值为其他的等位基因. 以二进制遗传算法编码为例, 如下所示:

$$A = (01\bar{1}10001) \xrightarrow{\text{变异变换}} A = (01010001).$$

其基本的算法流程图如图 1.

从以上的算法流程图 1 中可以知道, 遗传算法是群体性操作, 除了以上 3 个主要遗传算子外, 在具体操作中还需要对于群体大小、适应度函数、控制参数等进行设计.

1) 随着问题种类的不同以及问题规模的扩大, 要寻求一种能以有限的代价来解决搜索和优化的通用方法, 遗传算法正是为我们提供的一个有效的途径, 它不同于传统的搜索和优化方法. 主要区别在于: 自组织、自适应和自学习性.

2) 遗传算法的本质并行性.

3) 遗传算法不要求导或其他辅助知识, 而只需要影响搜索方向的目标函数和相应的适应度函数.

4) 遗传算法强调概率转换规则, 而不是确定的转换规则.

5) 遗传算法可以更加直接地应用.

6) 遗传算法对给定问题, 可以产生许多的潜在解, 最终选择可以由使用者确定.

其中对全局信息有效利用和隐含并行性是遗传算法的两大特点, 同时遗传算法对问题本身的限制较少, 因而具有很强的通用优化能力. 但遗传算法容易过早收敛, 这样就会使其他个体中的有效基因不能得到有效复制, 最终丢失; 而且在进化后期染色体之间的差别极小, 整个种群进化停滞不前, 搜索效率较低, 这样就会导致搜索到的结果不是全局最优解.

自从 1975 年 Holland 系统地提出遗传算法的完整结构和理论以来, 众多学者一直致力于推动遗传算法的发展, 对编码方式、控制参数的确定、选择方式和交叉机理等进行了深入的探究, 其基本途径概括起来有以下几个方面^[38]:

- 1) 改变遗传算法的组成部分或使用技术;
- 2) 采用混合遗传算法;
- 3) 采用动态自适应技术, 在进化过程中调整算法控制参数和编码粒度;
- 4) 采用非标准的遗传操作算子;
- 5) 采用并行遗传算法等.

遗传算法在飞行器轨迹优化设计中的应用, 较早的报道在 1996 年左右. 美国学者采用基本遗传算法研究了大气层外飞行器的低推力轨道转移问题^[46, 47]. 此后, 利用遗传算法求解飞行器轨道转移和行星探测轨道优化问题的文献陆续多了起来^[48, 49], 并关注改进的遗传算法在轨迹优化中的应用. 1999 年左右, 在飞行器轨道转移应用中获得成功的情况下, 遗传算法开始应用于运载器的再入轨迹优化设计^[50, 51]. 至此, 遗传算法成为飞行器轨迹优化中的研究热点, 并且开始广泛应用遗传算法研究所取得的最新成果.

国内的发展情况和国外基本相似, 但稍微晚一些. 较早的工作是关于月球卫星的最小推力变轨^[52], 此后逐渐应用到再入飞行器的返回轨道^[53, 54]和运载火箭的轨道优化设计中^[55]. 文献[56]提出采用基于自适应变尺度混沌遗传算法来求解最优滑翔弹道问题, 研究结果表明改进遗传算法能应用于求解弹道优化问题. 文献[57]利用遗传算法对深刻探测的轨道进行了优化与设计. 文献[58]提出了一种利用混沌因子、免疫浓度机制和自适应生成疫苗的方法, 该方法能

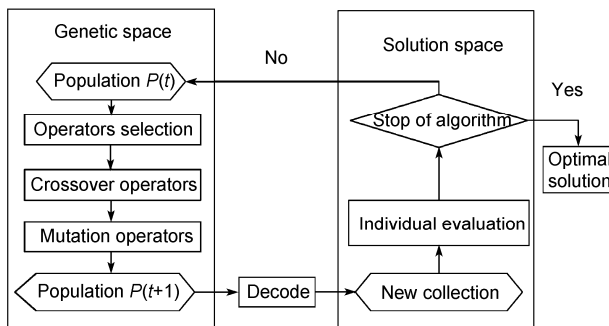


图 1 基本的算法流程图

够很好地改进遗传算法, 利用混沌的随机性、遍历性以及内在规律性进行初始化种群, 降低搜索的盲目性, 让初始种群能够均匀地分布在解空间内。同时, 通过免疫浓度调节机制来保持群体多样性, 避免早熟现象。再引入自适应生成疫苗的方法, 加快了寻优的速度, 提高算法的收敛速度和寻优质量; 并将该算法应用在天空飞行器轨迹优化研究中, 以爬升过程中燃料消耗最少作为优化目标, 通过仿真证明了该方法的有效性。

4.6 蚁群算法

1991年意大利学者 Colormi 等人^[59]就是根据蚂蚁的觅食、任务分配、构造墓地等群体行为而提出了一种新的群智能仿生优化算法—蚁群算法(Ant Colony Algorithm, ACA), 并将其成功地应用于解决旅行商问题(Traveling Salesman Problem, TSP)。该算法是一种基于种群寻优的通用型随机仿生优化算法。它以蚂蚁的觅食行为和觅食策略为基础, 用蚂蚁的爬行路线来表示待求解问题的初始解, 不依赖于所求问题的具体数学表达式描述, 具有很强的找到全局最优解的优化能力。该算法具有正反馈、较强的鲁棒性、优良分布式并行计算机制、易于与其他方法相结合等诸多优点, 但同时也存在着搜索时间过长、容易陷入局部最优化、收敛速度慢等一些缺陷^[60]。

蚁群算法包含两个基本阶段^[61, 62]: 适应阶段和协作阶段。在适应阶段, 各候选解根据积累的信息不断调整自身结构; 在协作阶段, 候选解之间通过信息交流, 以期产生性能更好的解, 这类似于学习自动机的学习机制。

为更清楚地理解蚁群算法的基本原理, 一般多借助经典的对称 TSP 问题来进行说明。基本蚁群算法的具体实现步骤如下^[60]。

1) 参数初始化。令时间 $t=0$ 和循环次数 $N_c=0$ 设置最大循环次数 N_{cmax} , 将 m 只蚂蚁置于 n 个城市上 ($m < n$), 令有向图上每条边 (i, j) 的初始化信息量 $\tau_{ij}(t) = \text{const}$, 其中 const 表示常数, 且初始时刻 ($\Delta\tau_{ij}(0) = 0$)。

2) 循环次数 $N_c \leftarrow N_c + 1$ 。

3) 蚂蚁数目 $k \leftarrow k + 1$ 。

4) 蚂蚁个体根据状态转移概率公式计算的概率选择城市 j 并前进。

5) 修改禁忌表指针, 即选择好之后将蚂蚁移动到新的城市, 并把该城市移动到该蚂蚁个体的禁忌表中。

6) 若集合中城市未遍历完, 即 $k < m$, 则跳转到第(3)步, 否则执行第(7)步。

7) 更新每条路径上的信息量。

8) 若满足结束条件, 即如果循环次数 $N_c > N_{cmax}$, 则循环结束并输出程序计算结果, 否则清空禁忌表并跳转到第(2)步。

蚁群算法作为一种随机型群智能仿生优化算法, 有其自身的优点和缺点^[63]。

它的优点主要表现为如下。

1) 分布式计算。蚁群算法是一个分布式的多智能体系统, 它在问题空间的多点同时独立地进行解搜索, 而整个问题的求解不会因为某个或某些蚂蚁故障而受到影响, 不仅使得算法具有较强的全局搜索能力, 也增加了算法的可靠性。

2) 自组织。自组织就是组织力或组织指令来自于系统内部, 即在没有外界作用下使得系统从无序到有序的过程。蚁群算法体现了这一特点。在算法初期, 单只蚂蚁无序地寻找解, 经过一段时间的演化, 蚂蚁越来越趋向于寻找到接近最优解的一些解, 体现了从无序到有序的自组织进化, 大大增强了算法的鲁棒性, 使算法不需要对待求解问题的所有方面都很了解, 因而很容易应用到同一类问题中。

3) 正反馈。正反馈是指以现在的行为去加强未来的行为。蚂蚁信息素的堆积体现了正反馈的过程, 在较优解经过的路径留下更多的信息素, 更多的信息素又吸引了更多的蚂蚁, 这个正反馈的过程使得初始值不断地扩大, 同时又引导整个系统向着最优解的方向进化。

4) 较强的鲁棒性。蚁群算法的求解结果不依赖于初始路线的选择, 而且在搜索过程中不需要进行人工的调整, 而且对其模型稍加修改, 就可以应用于其他问题, 没有中心的控制与数据, 不会由于某一个蚂蚁或者某几个蚂蚁出现故障而影响整个问题的求解。

5) 易于与其他方法结合。蚁群算法很容易与多种启发式算法结合, 如遗传算法、免疫算法、粒子群算法, 以改善蚁群算法的性能。

它的缺点主要表现为^[43, 44]如下。

1) 搜索时间过长。与其他智能仿生优化算法相比, 该算法的搜索时间过长。

2) 易陷于局部最优解. 搜索进行到一定程度后, 所有个体所发现的解趋于一致, 不能对解空间进一步进行搜索, 不利于发现更好的解, 即出现停滞现象.

文献[64]采用蚁群算法对月球软着陆轨迹优化问题进行研究. 通过对基本蚁群算法进行改进得到适合连续参数优化问题的十进制蚁群算法并在算法中增加局部搜索策略来提高搜索精度. 然后将其应用到月球软着陆的最优轨迹设计中. 文献[65]通过离散化的方法处理连续的搜索空间, 引入了信息素扩散机制, 并提出了自适应调整搜索空间的方法, 并将这种改进的蚁群算法应用到弹道优化的实际问题中. 由于蚁群算法在求解复杂优化问题特别是离散优化问题方面的一些优越性. 目前, 不少学者^[66-68]将蚁群算法应用于飞行器的航路规划当中, 并且显示了一定的优越性.

蚁群算法是一种原理相对简单的新兴仿生进化算法, 在众多领域中已展现出它的特点和魅力. 但蚁群算法理论与遗传算法、禁忌搜索算法等理论相比还远不成熟, 实际应用也远未挖掘出其真正潜力, 还有很多富有挑战性的课题亟待解决. 主要体现在以下几个方面^[69].

1) 加强蚁群算法的基础理论研究, 进一步发展新的数学分析和建模工具, 尤其对算法的基础理论研究非常重要, 包括对解决不同优化问题时收敛性和收敛速度的估计、避免陷入局部最优值、鲁棒性分析以及 α , β , ζ , ρ , Q 参数的设计理论. 目前尚未发现有关合理选择蚂蚁数量以及算法运行时间数学分析的论述. 因此, 该算法的数学基础理论研究将成为今后研究的一个重要课题.

2) 可将蚁群算法与其他类型方法综合使用以开发混合优化方法, 进而发展思想更先进、功能更强大、解决更复杂系统的智能行为^[70-73].

3) 新的理论必须通过实践进行检验, 在实践过程中, 可以发现新问题, 从而促进理论向前发展.

4) 此外, 蚁群算法的硬件实现也将成为研究的热点方向之一.

对上述问题的深入研究必将大大促进蚁群算法理论和应用的发展, 蚁群算法也必将在智能计算领域中展现出更加光明的前景.

4.7 粒子群算法

粒子群优化算法(Particle Swarm Optimization,

PSO)最早由心理学研究者 Kennedy 博士和从事计算智能研究的 Elberhart 博士受到人工生命的研究结果启发^[74, 75], 于 1995 年提出的一种基于群智能(Swarm Intelligence)方法的进化计算技术(Evolutionary Computation). 因其概念简单、实现容易, 收敛快, 而迅速引起学术界的重视, 被视为一个很有前景的优化算法. 目前已被应用于多目标优化、模式识别、信号处理、决策支持等领域, 并被列为“国际进化计算会议”的一个讨论专题.

粒子群优化(PSO)算法的运行原理不是依靠个体的自然进化规律, 而是对生物群体的社会行为进行模拟, 它最早源于对鸟群觅食行为的研究. 在生物群体中存在着个体与个体、个体与群体间的相互作用、相互影响的行为, 这种行为体现的是一种存在于生物群体中的信息共享的机制. PSO 算法就是对这种社会行为的模拟, 即利用信息共享机制, 使得个体间可以相互借鉴经验, 从而促进整个群体的发展^[76].

PSO 先生成初始种群, 即在可行解空间中随机初始化一群粒子, 每个粒子都为优化问题的一个解, 并由目标函数为之确定一个适应值. 每个粒子将在解空间中运动, 并由一个速度决定其方向和距离. 通常粒子将追随当前的最优粒子而动, 并经过逐代搜索最后得到最优解. 在每一代中, 粒子将跟踪两个极值, 一为粒子本身迄今找到的最优解, 另一为全种群迄今找到的最优解^[76].

粒子通过跟踪全局极值和局部极值来计算粒子新的速度. 粒子移动到一个新位置上. 每个粒子的优劣程度根据已定义好的适应度函数来评价, 这 and 具体被解决的问题相关^[76].

PSO 算法的主要算法流程如下.

1) 初始化粒子群, 包括群体规模, 每个粒子的位置和速度; 设定加速常数 c_1 和 c_2 , 最大进化代数 $T_{\max}$. 将当前进化代数置为 $t=1$, 在定义空间 R 中随机产生 m 个粒子 $X_1, X_2, \dots, X_m$, 组成初始种群 $X(t)$; 随机产生各粒子初始位移变化 $V_1, V_2, \dots, V_m$, 组成位移变化矩阵 $V(t)$.

2) 计算每个粒子在每一维空间中的适应度值.

3) 对每个粒子, 比较粒子的适应值和自身最优值 $pbest$. 如果当前值比 $pbest$ 更优, 则置 $pbest$ 为当前值, 并设 $pbest$ 位置为 n 维空间中的当前位置.

4) 对每个粒子, 比较粒子适应值与种群最优值. 如果当前值比 $gbest$ 更优, 则置 $gbest$ 为当前粒子的矩

阵下标和适应值.

5) 更新粒子的速度和位置, 生成新的种群.

如果满足结束条件(误差足够好或到达最大循环次数)退出, 否则回到(2).

6) 粒子群算法具有以下主要优点^[77]:

- a) 易于描述;
- b) 设置参数少;
- c) 容易实现;
- d) 收敛速度快.

粒子群算法很容易实现, 计算代价低且占用计算机硬件资源少. 粒子群算法已被证明能很好地解决许多全局优化问题. 当然, PSO 算法也和其他全局优化算法一样, 有易陷入局部最优, 收敛精度不高, 后期收敛速度慢等缺点.

文献[78]使用改进的粒子群算法, 分别对初始质量、起始角度和水平位移的关系进行了测试, 并参照测试结果对飞行轨迹进行了整体优化; 文献[79]以最小控制能量高超声速飞行器再入轨迹优化为例. 对飞行器运动模型进行简化, 控制量参数化, 对约束作了变换处理, 粒子群算法引入自适应权值, 充分利用飞行器的再入时运动特性来设置 PSO 算法初始参数和权重, 不仅使算法计算时间短, 同时保证了算法的收敛性. 并分析比较了仿真步数对结果的影响. 文献[76]使用多参数粒子群算法, 分别对飞行器的主要参数: 初始质量、起始角度、机翼面积、升阻比的大小和水平位移的关系进行了研究. 并参考研究结果对单周期冲越飞行轨迹进行了优化. 此外还基于粒子群算法参数均匀设计的冲越飞行轨迹优化. 文献[80]应用粒子群优化算法研究了固体运载火箭上升段弹道优化设计问题

PSO 算法是一种较新的基于群智能的进化算法, 其研究还没有坚固的理论基础和系统的分析方法, 有许多问题需要进一步的研究^[77].

1) PSO 的理论基础研究还很贫乏, 缺乏深刻且具有普遍意义的理论分析. 而任何一个算法要想取得长足的发展, 必须要有牢固的理论基础, 所以还需对算法从理论上做更深入的分析.

2) 算法参数的选择与设计. 算法参数是影响算法性能和效率的关键. 问题的不同需选取不同的参数, 但现在还没有通用的方法要选取最优参数, 导致许多实际问题的参数只能凭用户的经验选取. 对不

同的问题分类, 研究出较通用的方法对其进行参数选取, 也是我们研究方向之一.

3) 许多研究者将 PSO 归为进化算法的一种. 与其他进化算法类似, PSO 也会陷入局部极值, 在引入多种群、改变种群的拓扑结构、与其他优化算法混合等方面对 PSO 进行改进, 也是需要研究的方向之一.

4) 由于 PSO 算法具有内在的并行性, 因而, PSO 的并行计算也是研究的重要方向之一.

5) PSO 算法的应用领域尚待进一步拓宽. PSO 算法在进化神经网络方面有了比较成功的应用, 但是很多领域的应用还停留在研究阶段, 需对 PSO 可应用领域进行发展和总结.

4.8 动态规划法与共轭梯度组合法

1) 动态规划法^[81~83]

飞行器轨迹是一个四维飞行轨迹, 它是由位置(x, y, z)和飞行时间 t 或者速度矢量 $V(V_x, V_y, V_z)$ 4 个参数来描述. 飞行器轨迹将在一个网格坐标系($(o-\varphi r\theta)$)中来优化. o 为地心, φ 为经度, r 为飞行器与地心的距离, θ 为纬度. 飞行器轨迹上所有的点以 $P(i, j, k)$ 表示. i, j, k 分别代表在网格坐标系中 φ, r, θ 方向的值. i th 为第 i 层面. 在点 $P(i, j, k)$ 处的性能指标用如下公式定义:

$$J_{\{i,j,k\}} = \min_{T(i,j,k)} (x_{(i,j,k)}, T_{(i,j,k)}, J_{(i,i+1)}), \quad (27)$$

式中, $J_{\{i,i+1\}}$ 是 i th 和 $(i+1)$ th 间的性能指标.

$$J_{\{i,i+1\}} = \min_{T(i,j,k)} (x_{(i,j,k)}, T_{(i,j,k)}, J_{\{i_1,j_1,k_1\}}), \quad (28)$$

其中, $i_1 = i+1, j_1 = j+1, k_1 = k+1$, 将所有终点的性能指标定义为

$$J_{(N,j,k)} = 0, (j = 1-N, K = 1-N). \quad (29)$$

N 是 i 的最大值(即终点位置), 所以总的性能指标 $J_{\{1,j,k\} \leftarrow (N,j,k)}$ 是最小的:

$$J_{\{1,j,k\} \leftarrow (N,j,k)} = \min_{j,k} [J_{\{1,j,k\}}]. \quad (30)$$

其具体步骤如下.

步骤 1. 在笛卡尔直角坐标系($o-xyz$)中, 按照飞行器的出发点和目标点建立网格坐标系($o-\varphi r\theta$). 网格的大小($\Delta\varphi, \Delta r, \Delta\theta$)是由飞行器的机动能力确定的, 因为发动机的推力大小是受限制的($T \leq T_{\max}$).

步骤 2. 计算飞行器的移动空间(走廊),

$$\begin{cases} \varphi_{\min} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}, \\ r_{\min}(\varphi') \leq r(\varphi') \leq r_{\max}(\varphi'), \\ \theta_{\min}(\varphi') \leq \theta(\varphi') \leq \theta_{\max}(\varphi'). \end{cases} \quad (31)$$

飞行空间走廊越来越大, 因为随着发动机工作时间的增加, 飞行器质量减小, 使得飞行器机动能力增强.

步骤 3. 最小化性能指标 $J_{\{1,j,k\} \leftarrow (N,j,k)}$.

步骤 4. 按照计算步骤 3, 从 $i = i_{\max} = N$ 到 $i = i_{\min} = 1$, 并存储每个点的性能指标 $J_{\{i,j,k\}}$ 及相关参数(飞行器轨迹、控制律、飞行器质量等).

在 $i_{\min}=(1)$ th 的层面上, 从矩阵 $J_{\{1,j,k\}}$ 中寻找最大性能指标的飞行轨道, 输出全部的结果如最优飞行轨道 $(t, x, y, z, V_x, V_y, V_z)|_i$, ($i = 1, 2, \dots, N$), 最优控制律, 飞行器质量及其他参数.

2) 共轭梯度法^[78~80]

基于离散的飞行轨迹 $(t, x, y, z, V_x, V_y, V_z)|_i$, ($i = 1, 2, \dots, N$), 通过采用最优控制原理的两点边值算法, 优化得到精确的飞行轨迹 $(t, x, y, z, V_x, V_y, V_z)$. 第 i th 段的精确最优飞行轨迹 $(t, x, y, z, V_x, V_y, V_z)^*_i$ 的计算是通过两个相邻点 $(t, x, y, z, V_x, V_y, V_z)|_i$ 和 $(t, x, y, z, V_x, V_y, V_z)|_{i+1}$. 第 i th 段的精确最优飞行轨迹 $(t, x, y, z, V_x, V_y, V_z)^*_i$ 可以通过求解以下轨迹优化问题获得.

最小化第 i th 段的精确最优飞行轨迹的性能指标:

$$J_i = \min_{u_i(\eta, \sigma_T, \sigma)} m_f, \quad (32)$$

式中, 下标 i 表示第 i th 段的飞行轨道的数值.

起点与终点位置是

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(t_0) &= (t, x, y, z, V_x, V_y, V_z)|_i, \\ \mathbf{x}_i(t_f) &= (t, x, y, z, V_x, V_y, V_z)|_{i+1}. \end{aligned} \quad (33)$$

由于到目前为止还没有一种真正意义上的全局轨迹优化算法, 该组合算法扬长避短, 首先利用利用动态规划法作为第一阶段寻求满足一定要求的次优解. 然后利用共轭梯度法用来解决两点边值问题, 通过第 N 次计算, N 段的最优飞行轨道可以获得. 整个的最优飞行轨道包括 4-D 最优飞行轨道 $(t, x, y, z, V_x, V_y, V_z)^*$, 控制变量 U^* 及飞行器剩余的质量 m_f . 该组合优化算法对飞行器轨迹优化是全局最优的.

文献[81]以最小燃料消耗量为性能指标, 考虑了多种约束条件(过载、动压、加热率等), 采用了该组合优化方法对空天飞机上升轨迹进行优化. 文献[82]针对小推力深空探测四维轨道优化设计, 采用该组合算法基于二体模型进行了深空探测四维轨道全局优化. 文献[83]对小推力多目标深空探测四维轨道进行了全局优化设计.

5 高超声速飞行器轨迹优化综述

随着高超声速飞行器技术的发展和成熟, 如何利用高超声速飞行器实现远程巡航乃至全球到达成为飞行器航迹规划中一个研究热点. 高超声速飞行器是指飞行马赫数大于或等于 5 的飞行器, 它具有飞行速度快、突防能力强、全球到达、毁伤威力大等独特的优势, 已成为当今世界各国武器研制的热点和焦点^[84].

高超声速巡航飞行器至少在 4 个方面显示出它重要的发展意义和军事价值^[85].

1) 可以克服亚声速方案在突防能力以及对机动式导弹发射架、加固深埋地下目标摧毁能力上的不足.

2) 和执行同类任务的其他武器相比, 具有体积小、重量轻、成本低、适于多平台发射、攻击方式多、用途广等优点, 因而有更大的军事经济效能.

3) 在 24 km 以上高空、以马赫数 4~8 的高超声速机动飞行, 不仅现有面防空武器和机载拦截武器均难以有效截击, 甚至美国的导弹防御系统也将因截击效率明显下降, 而失去应有的防御能力.

4) 随着超燃冲压发动机技术的日臻成熟和新的碳氢燃料的研制成功, 不仅使超燃冲压发动机在马赫数 3.5~4.0 的飞行速度下就可以点火起动和正常燃烧, 而且也打破了超声速和高超声速飞行的传统界限, 使高超声速飞行的起点从传统的马赫数 $\gg 5$ 下移至马赫数 $\gg 4$. 这一变化将不仅影响到用吸气式发动机作动力系统的导弹的分类原则和标准, 也使超声速和高超声速导弹在设计理念和结构特点上发生重大变化.

在未来高技术信息化战争中, 高超声速巡航飞行器将发挥越来越大的作用, 它将成为进攻作战体系的主体.

由于高超声速飞行器飞行时间长, 航程大, 根据其弹道各段不同的特点把高超声速飞行器在垂直平面的飞行弹道分为上升段、引入段、滑行段、下降段^[86].

上升段轨迹优化是研究高超声速飞行器的重要基础性课题, 它可以最大限度地减少起飞重量或降低成本、或降低对各子系统(推进系统、材料、气动外形等) 要求, 也为各子系统提供必要的数据, 有着十分重要的理论及工程意义. 飞行轨迹数学模型描述如下^[87]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, I_{sp}, m, t), \quad (34)$$

式中, $\mathbf{x} = [V, \theta, \psi, x, h, z]$, $\mathbf{u} = [\alpha, \sigma, P]$, V 为飞行器速度, θ 为弹道倾角, ψ 为偏航角, x 、 h 和 z 分别为飞行横向、高度与侧向距离; α 和 σ 分别为作为控制变量的攻角与滚转角, P 为单位重量的推力, I_{sp} 为发动机比冲, m 为飞行器的质量.

边界条件与性能指标如下.

1) 初始边界

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (35)$$

2) 终端边界

$$h(t_f) = h_f, \quad \theta(t_f) = \theta_f. \quad (36)$$

3) 攻角和攻角变化率约束

$$|\alpha(t)| \leq \alpha_{\max}, \quad |\dot{\alpha}(t)| \leq \dot{\alpha}_{\max}. \quad (37)$$

4) 以终端总能量最大作为最优性能指标

$$J = - \left[\frac{V^2}{2g} + h \right]. \quad (38)$$

在 20 世纪 90 年代, Calise 等人^[88]和 Schmidt 等人^[89]对高超声速飞行器上升轨迹进行过研究, 他们将飞行器建模为质点, 应用奇异摄动法, 将飞行动态分为快时变和慢时变, 得到最省燃料的次优轨迹, 该方法的局限在于不能很有效地解决状态约束问题. Lu 等人^[90]和 Dukeman^[91]也在近几年对上升段制导进行了研究. 针对以火箭为动力的飞行器, Lu 讨论了 RLV 在大气层内的最优上升制导问题, 而 Dukeman 通过近似简化状态方程, 采用多点打靶法求解两点边值问题. 李惠峰等人^[92]针对高超声速飞行器的特点, 提出了求解最优上升轨迹的一种可行方案. 在零侧滑角和力矩瞬间平衡假设下对上升段飞行问题进行最优建模, 将质量引入为状态量, 以最省燃料为指标, 以推力方向为最优控制量, 根据极大值原理推导一阶最优条件. 为数值求解两点边值问题, 以解析解作为初始猜想, 应用经典的有限差分方法和改进的牛顿法, 在满足攻角过程约束下, 通过同伦算法迭代求解最优轨迹. 仿真在给定的初始约束和终端约束下进行. 马广富等人^[93]建立了大气层内高超声速飞行器轨迹优

化无因次数学模型, 提出了一种求解最优两点边值问题的改进型伴随方法, 并证明其算法收敛性, 将其用于以固体火箭发动机为动力的高超声速飞行器稠密大气层内上升段轨迹优化问题中, 在有弯曲力矩约束的前提下, 间接得到一组平滑控制量.

引入段就是从最后一级助推段结束到滑行段开始之间的这段弹道. 这段要求在无动力飞行的情况下将弹道引入到滑行段的初始高度、速度和弹道倾角, 并使速度损失最小, 同时保证热流和过载约束. 引入段数学描述如下.

给定初始的高度 h_0 、马赫数 Ma_0 、弹道倾角 θ_0 , 末端高度 t_f 、弹道倾角 h_f ; 寻找一个控制(攻角 α) 的过程使得末端速度最大. 同时保证气动加热率 $\dot{Q} < \dot{Q}_{\max}$ 及过载 $n < n_{\max}$.

周浩等人对高超声速滑翔飞行器引入段弹道优化进行了研究, 将此弹道问题转化成最优控制问题, 通过极大值原理得到最优弹道的一阶必要条件. 采用遗传算法求解了此两点边值问题. 首先从次优化弹道得到攻角的变化规律, 然后由从次优化弹道估计出的攻角范围推导出初始伴随变量的变化范围, 再用遗传算法在此范围内优化初始伴随变量得到了全局最优弹道和相应的初始伴随变量^[94].

滑行段是引入段的下一段. 定义滑行为飞行器在关闭发动机的情况下以一定的马赫数以零弹道倾角开始的一种飞行, 对终端时刻的高度和速度都有要求, 同时保证热流和过载约束. 滑行段数学描述如下.

给定初始的高度 h_{g0} , 初始的马赫数 Ma_{g0} , 初始弹道倾角 θ_{g0} , 末端高度 h_{gf} , 末端弹道倾角 θ_{gf} , 末端马赫数 Ma_{gf} ; 寻找一个控制(攻角 α) 的过程使得滑行航程最大. 同时保证气动加热率 $\dot{Q} < \dot{Q}_{\max}$ 及过载 $n < n_{\max}$.

滑行轨迹所需的参考弹道通常可采用在线或者离线两种方法生成. 离线弹道规划法可在发射前根据所给路径约束与终端约束, 通过大量弹道优化设计与工程计算, 规划出一条合理的最优参考弹道. 但在在线实施时, 由于飞行环境不确定性与非线性动力学特性的存在, 单纯依靠倾侧角控制气动力难以准确跟踪参考弹道, 造成了纵程、横程与航向角误差较大. 因而, 这种方法难以应对不确定因素, 灵活性较差, 且跟踪精度不高. 在线参考弹道规划法可依据滑翔飞行器当前飞行状态, 通过一定的简化弹道规

划策略缩短弹道生成时间, 实时规划出一条满足所有约束的参考弹道, 并用以跟踪控制. 相比离线弹道规划法, 在线导弹规划法更加灵活、实时、且自适应性更强.

通常情况下, 标准弹道制导法可按纵向与侧向分别进行制导, 以纵向制导为主. 纵向制导跟踪高度-速度(H - V)剖面, 并根据飞行状态以及作战任务要求实时调整升力以满足任务要求. 侧向制导基于航向角误差走廊或者横程偏差等调节倾侧角符号以保证航向角精度. 一般情况下, 航天飞机等滑翔飞行器可采用航向角误差走廊法以实现大横程条件下侧向控制, 其末端航向角误差较大, 制导精度较低. 可重复使用运载器(RLV)等可采用偏差距离法进行小横程下侧向控制, 其末端航向角误差较小. 采用前一种方法进行侧向控制时, 必须先通过大量的数值试验或工程试验确定航向角误差走廊, 计算量大, 且不易移植. 后一种方法却仅适合于小横程控制, 不能解决滑翔弹头面临的大横程控制. 因此, 王威结合滑翔弹头的大横程特点, 提出了一种改进的自适应侧向控制策略. 文献[84]针对高超声速飞行器滑行段非线性程度高的特点, 提出了逐步细分的参数法优化策略, 采用序列二次规划(SQP)算法得到了问题的次优解. 在此基础上, 构建了原系统的等价系统, 并给出了两个系统协态变量之间的关系, 提出了沿次优弹道的分段打靶法, 求解等价系统的两点边值问题(TPBVP)后, 经转化得到了最优解^[95].

下降段就是指滑行段结束开始通过控制在一定空间跨度使弹道达到某一倾角, 并使飞行时间最短, 同时保证热流和过载约束. 下降段数学描述如下.

给定初始的高度 h_{d0} , 初始的马赫数 Ma_{d0} , 初始弹道倾角 θ_{d0} , 末端高度 h_d , 末端弹道倾角 θ_d ; 寻找一个控制(攻角 α)的过程使得飞行时间最短. 同时保证气动加热率 $\dot{Q} < \dot{Q}_{\max}$ 及过载 $n < n_{\max}$.

雍恩米等基于一种求解最优控制问题的新方法—Gauss 伪谱法(Gauss Pseudo Spectral Method, GPM), 研究了高超声速飞行器滑翔式再入的快速轨迹优化问题. 针对远程多约束条件下滑翔式再入轨迹优化问题的难点, 提出了基于 GPM 的串行分段优化策略, 包括 3 个方面: 1) 构造了设计变量初值生成器, 获得近似最优解作为优化初值; 2) 提出从可行解到最优

解的串行优化策略; 3) 引入平衡滑翔条件构造动态分段点, 将再入轨迹分为初始下降段和滑翔段分别求解^[96]. 刘运鹏等人^[97]采用遗传算法以及惩罚函数的策略, 对高超声速飞行器高空再入减速段攻角进行优化设计, 使得在满足各项过程约束以及终端平飞约束条件下, 末端速度达到最大. 董建中等人^[98]为满足高超声速巡航飞行器下滑段在线航迹规划的实时性要求, 提出了一种快速航迹规划方法. 在数学模型的基础上, 采用了分层规划的方法. 先将弹道约束和准平衡约束转化为安全走廊, 再根据终端约束和中心线原则在安全走廊内规划出基准航迹, 并以基准航迹对应的控制序列为基础, 利用 PRP (Polak-Ribiere-Polyak) 共轭梯度法对基准航迹进行优化从而得到了最优航迹, 并对最大航程和时间最短航迹进行了仿真. 谢富强等人^[99]提出将粒子群优化算法(PSO)应用于飞行器再入轨迹优化. 以最小控制能量高超声速飞行器再入轨迹优化为例, 对飞行器运动模型进行简化和控制量参数化, 粒子群算法采用自适应权重值, 并充分利用飞行器再入时的运动特性来设置 PSO 算法初始参数, 分析比较仿真步数对结果的影响. 文献[100]基于物理规划方法研究了滑翔式再入最优飞行轨迹. 首先介绍物理规划方法求解多目标优化问题的数学模型, 然后将考虑射程最大、热载最小、热流密度峰值最小和弹道最稳定 4 个目标的再入最优轨迹问题纳入物理规划的框架求解. 以某带翼锥形再入飞行器为例, 通过计算并分析单目标优化结果, 确定具体的偏好结构, 采用遗传算法求解了考虑热流、过载、动压和终端条件约束的多目标最优轨迹.

此外, 冲跃飞行是高超声速飞行器的典型飞行方式, 该飞行方式给飞行器综合性能和设计技术带来了许多潜在优势. 姚宗信^[101]以重量最小、飞行距离最长为优化目标, 通过分析飞行器的受力状态和飞行过程, 以功能原理结合微积分概念为基础, 建立了冲跃飞行轨迹优化方法, 并开展了仿真研究. 赵钧等人^[102]以高超声速临近空间飞行器的连续跳跃飞行作为研究对象, 建立了其纵平面运动模型和弹道优化模型, 在考虑攻角值、攻角变化率、法向过载、动压、热流及落地条件等约束下, 利用遗传算法对一个飞行周期的跳跃飞行轨迹进行优化, 并给出了燃料消耗率最小的飞行轨迹.

6 众多飞行器协同规划轨迹优化综述

众多飞行器协同规划是一个多约束、强耦合的复杂多目标优化与决策问题,能有效提高作战效能.众多飞行器协同规划的目的是为各飞行器生成航路保证飞行器能同时或按照一定的时间完成指定的飞行任务,到达各自的目标点,并且尽量回避威胁区.这样生成的航路对每个单一的飞行器来说,不一定是最优的,但对于整个飞行器编队来说,一定是全局最优的或次优的^[103].

众多飞行器协同作战系统的开发的主要性能指标,归纳起来,主要有以下几点:

1. 提高众多飞行器的突防能力;
2. 提高众多飞行器的拦截能力;
3. 提高众多飞行器的电子对抗能力;
4. 提高众多飞行器对运动目标的搜捕能力和跟踪精度;
5. 减少众多飞行器的发射数量;
6. 提高众多飞行器的综合作战效能;

以上协同作战的主要性能指标包括了未来飞行器武器系统的主要作战方式,可减少作战费用、提高任务实现可靠性、增强武器快速反应能力和综合作战效能,协同目标跟踪、信息共享、智能决策、软杀伤对抗.

众多飞行器轨迹一体化全局优化设计算法,具体包括两大步:①攻防对抗飞行器的最佳全局组织任务分配;②攻防对抗飞行器的轨迹一体化全局优化.

6.1 组织任务分配

针对 n_T 个被攻击的目标与 n_A 个攻击型飞行器,每一个(静态或机动)目标与其被跟踪打击的攻击飞行器的剩余飞行时间大小 t_{go_ij} (i 为目标的编号, j 为攻击飞行器的编号, $i \leq n_T$, $j \leq n_A$) 的所有的组合为

$$T_{go} = \begin{bmatrix} t_{go_11} & t_{go_21} & \cdots & t_{go_n_T 1} \\ t_{go_12} & t_{go_22} & \cdots & t_{go_n_T 2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{go_1n_A} & t_{go_2n_A} & \cdots & t_{go_n_T n_A} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

全部攻击飞行器的剩余飞行时间大小 t_{go_ij} 的总值的最小为

$$T_{go}^* = \min_{1 \leq j_i \leq n_A, 1 \leq k \leq n_T} \sum_{j_i=1}^{n_A} \sum_{k=1}^{n_T} t_{go_j_i k}^* \Rightarrow i^* = t_{go_ij, \min}(i^*, j). \quad (40)$$

按照最小总值剩余飞行时间的结果,确定各攻击飞行器 j 对(静态或机动)目标飞行器 i^* 的分工攻击.在计算剩余飞行时间 t_{go_ij} 时,如果某目标不在攻击飞行器 j 的可攻击区域内,该剩余飞行时间 t_{go_ij} 为无效的.

6.2 众多飞行器轨迹一体化全局优化算法

双方均在复杂(双方对未来均未知)的环境中,众多飞行器群体攻防对抗全局一体化最优系统战仿真,总体计算步骤如下.

1) 攻防双方(为各自飞行器)基于组合优化算法进行一体化航迹规划,并将全部的航迹规划对策指令信息发送到各自每一个(飞行器)单元.基于双方状况,在攻防双方各自的决策系统计算机上进行完成.

a) 进攻突防方全部飞行器的任务分配;相应的进攻方各飞行器的路径规划,以及对地面目标的攻击指令.

b) 防御方全部飞行器的任务分配;相应的防御方各飞行器的路径规划,以及对突防方的攻击指令,地面防御系统的拦截指令.

2) 基于双方的飞行状态与环境的全部信息,以及双方的攻防对策与规划的路径,攻防双方的飞行与对抗系统战仿真.

关于攻防双方众多飞行器的一体化航迹规划算法,从国外公开的对多航迹的协同规划进行的一些文献[104~110]来看,其涉及的多航迹协同规划问题大多是属于民用或者商用领域,如多个飞行器对未知地形区域的协同侦测,多个飞行器编队协同进行资源供应,等.而很少提及军事打击领域的多航迹协同规划方法.国内在多航迹协同规划方面的研究较少,在航迹轨迹时有两类方法经常被使用,一类是基于人工智能领域的进化算法而设计的规划方法,另一类是基于直观路径搜索的规划方法.其中,前者适合进行理论分析,但难以表达各类规划约束信息,在实际使用中算法的收敛速度难以控制,后者更容易结合各类规划约束信息,但同时面临着组合爆炸等问题.采用基于路径搜索的航迹规划方法,并同时设计各种消减搜索空间的条件,在一定程度上可以很好地应对组合爆炸问题.

潘哲^[111]研究了在常值风作用下,为了使多架反舰飞行器能实施高度协同的攻击,基于遗传算法提出了一种常值风作用下的多弹协同航路规划算法.首先,分析了常值风对飞行器地速及航路飞行耗时

的影响;其次,重点讨论了航路的评价问题,采用了随种群进化而变化的时间协同度评价策略,并设计了相应的遗传算子;最后,通过仿真算例验证了该协同航路规划算法在常值风作用下仍能生成高度协同的航路,而且同时可以很好地规避威胁.马向玲等人^[112]以领弹/攻击弹等新概念作战方式为例,讨论基于 C^4ISR 系统下的众多飞行器协同作战的总体框架,对信息融合系统、态势评估系统、任务规划系统、战毁评估系统及数据链系统等进行了分析,并对任务规划的主要算法,如 Voronoi 图法等进行了分析比较,最后设计了任务规划系统的硬件体系框架和软件结构模块.毛云云^[113]为解决多航迹规划中的避撞与协同问题,提出一种三维环境下的多航迹协同规划方法.该方法设计了一种规划框架,分别在航迹搜索前与搜索过程中考虑多航迹的协同问题.在航迹搜索过程中,不但结合单条航迹原有的约束条件,同时还进行了航迹间的碰撞检测,并且通过航迹的协同违背量等因素来进行启发式搜索.李柯^[114]研究了对多架无人机协同攻击同一目标问题,提出了一种航路规划方法.首先根据已知的飞行器、雷达等威胁的位置,通过 Voronoi 图建立初始进入航路,并利用 B 样条曲线修正初始航路产生无人机可飞航路,然后对多架无人机的航路进行协同修正以满足协同攻击要求.最后对无人机的退出航路规划进行了研究分析,并结合具体问题进行了仿真检验.张同法等人^[115]提出了一种协调多架无人机的编队同时到达目标的航路规划方法.首先根据敌方防御区域内雷达、飞行器等威胁阵地的具体分布情况,采用划分 Voronoi 多边形的方法制定初始航路,然后通过叠加定长线段到初始航路上对初始航路进行离散化,最后采用动态链类比法调整航路并对航路进行光顺优化处理,使航路安全可飞.张大巧等人^[116]针对支持数据链通信的巡航飞行器因协同作战而预规划多条飞行航迹的特点,提出了基于多路径标号更正算法的选飞航迹规划方法.该算法在传统算法标号更正算法的基础上引入节点禁忌扩展策略,从而实现航迹的转弯控制和航迹间隔控制,保证了求取的路径满足飞行器的飞行约束;通过在赋权图中引入数字地形高程信息和威胁信息,实现了该规划方法三维规划能力和威胁规避能力.给出了选飞航迹的规划步骤.肖支才等人^[117]在进行协同任务规划时应同时考虑协同航路规划和任务分配这两个问题,合理选择进攻目标、确

定攻击航路以及分配恰当的突击力量于突击目标.针对这一问题提出了目标分配及协同航路选择的优化模型,并且给出了编码结构;针对遗传算法存在的不足,提出了一些改进;然后采用改进的遗传算法对协同任务规划模型进行了仿真验证.马培蓓等人^[103]研究了具有不同探测距离和威胁度的禁/避飞区、威胁区等战场环境下的多飞行器协同航迹规划和目标分配问题.首先建立了具有战场环境约束的 Voronoi 图,并结合改进的 Dijkstra 算法取得了代价最小的航迹;进一步采用基于视线的航迹缩短算法和航迹平滑算法对初始航迹进行动态优化处理,产生了既节省燃料又满足飞行器机动性能的可飞行轨迹;最后采用基于 MMKP (Multi-Dimensional, Multi-choice Knapsack Problem) 的协同目标分配算法实现了多飞行器协同攻击多目标,并且获得了综合代价最小的多飞行器协同航迹.

在研究群体攻防对抗时,群体攻防对抗的双方均同时采用全局一体化优化,即当进攻方采用(轨迹与各子系统控制)全局一体化最优策略时,对抗方也是采用考虑全局的轨迹与控制的全局一体化优化;另外,对抗双方均需考虑各种多维未知的随机干扰因素.

7 结论

本文首先简单阐述了众多种类的常用轨迹优化方法的基本原理,特点及应用;然后介绍了近几年来出现的几种常用的智能算法及组合算法;最后再对众多飞行器协同规划轨迹优化与高超声速飞行器轨迹优化进行了综述.

今后应当以未来飞行器系统为轨迹优化与控制理论与工程研究背景,大力推进计算飞行力学的发展,使飞行轨迹优化数值算法实现以下功能.

- 1) 能够对飞行轨迹进行多目标函数的全局优化,即在满足全部的各种约束条件下综合使得全部的各种可能的性能指标均达到最优.
- 2) 能够同时对众多飞行器群体对抗飞行轨迹进行全局一体化优化,该群体攻防对抗优化设计是指攻防双方均同时采用一体化全局最优的多维策略.
- 3) 实时在线性:众多飞行轨迹全局一体化优化,可以在几秒钟或毫秒级之内完成,可以在飞行器自带的计算机上实时使用.
- 4) 高精度:能给出 7 自由度飞行轨迹的优化数

值计算的结果以及相应各相关子系统的全部精确信息, 并且满足相应系统的精度要求。

5) 能够考虑各种随时间与位置而未知的、不同

概念的随机干扰的作用。

6) 同时综合具有以上全部功能的飞行轨迹优化数值算法。

参考文献

- 1 陈聪, 关成启, 史宏亮. 飞行器轨迹优化的直接数值解法综述. 战术导弹控制技术, 2009, 31(2): 33–40
- 2 南英, 陈士橹, 严辉. 航天器轨迹优化的通用数值方法. 飞行力学, 1996, 14(3): 20–26
- 3 雍恩米, 陈磊, 唐国金. 飞行器轨迹优化数值方法综述. 宇航学报, 2008, 29(2): 397–406
- 4 Betts J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization. J Guid Control Dyn, 1998, 21(2): 193–206
- 5 Bryson E. Applied Optimal Control, Optimization, Estimation, & Control. New York: Hemisphere, 1969
- 6 Stryk O V, Bulirsch R. Direct and indirect methods for trajectory optimization. Ann Operat Res, 1992, 37: 335–354
- 7 王华, 唐国金, 雷勇军. 有限推力轨迹优化问题的直接打靶法研究. 中国空间科学技术, 2005, (3): 51–56
- 8 David H. Conversion of optimal control problems into parameter optimization problems. J Guid Control Dyn, 1997, 20: 57–60
- 9 屈香菊. 直接多重打靶法在轨迹优化方面的应用. 飞行力学, 1992, 10: 16–21
- 10 陈功, 傅瑜, 郭继峰. 飞行器轨迹优化方法综述. 飞行力学, 2011, 29: 1–5
- 11 Lu P. Inverse dynamics approach to trajectory optimization for an aerospace plane (in Chinese). J Guid Control Dyn, 1993, 16(4): 726–732
- 12 Varin J. Interior point algorithm for the optimization of a space shuttle reentry trajectory. VII French-Latin American Congress on Applied Mathematics. Santiago, 2005
- 13 Bonnans J. Large scale direct optimal control applied to reentry problem. Inria, 1994, No. 2402
- 14 康炳南, 唐硕. 基于非线性规划的高超声速滑翔轨迹优化. 飞行力学, 2008, 26(3): 49–52
- 15 陈今求, 李新国. 混合遗传算法求解高超音速飞行器弹道优化. 计算机仿真, 2008, 25(1): 54–57
- 16 万松. 可重复使用运载器上升段轨道优化方法研究. 硕士学位论文. 西安: 西北工业大学, 2007
- 17 张永军, 夏智勋. 跳跃式导弹弹道设计与优化. 固体火箭技术, 2006, 29(5): 313–316
- 18 孙军伟, 乔栋, 崔平远. 基于 SQP 方法的常推力月球软着陆轨道优化方法. 宇航学报, 2006, 27(1): 99–102
- 19 Kang W, Bedrossian N. Pseudospectral optimal control theory makes debut flight, saves NASA \$1M in under three hours. SIAM News, 2007, 40(7): 1–3
- 20 Gong Q, Kang W. Pseudospectral optimal control for military and industrial applications. The 46th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, 2007
- 21 汤善同. 飞行器轨道优化与制导规律研究综述. 现代防御技术, 2002, 30(1): 32–37
- 22 王大轶, 李铁寿, 马兴瑞. 月球最优软着陆两点边值问题的数值解法. 航天控制, 2000, (3): 44–49
- 23 周浩, 周韬, 陈万春, 等. 高超声速滑翔飞行器引入段弹道优化. 宇航学报, 2006, 27(5): 970–973
- 24 赵汉元. 飞行器再入动力学和制导. 长沙: 国防科技大学出版社, 1997
- 25 Vinh N X. The Optimal Trajectory of the Flight in the Atmosphere. USA: Aerospace Press, 1980
- 26 Istrate V. Optimal entry into atmosphere with minimum heat and constraints. AIAA Paper 2004-5282, 2004
- 27 Lu P, Vinh N X. Optimal control problems with maximum functional. J Guid, 1991, 14(6): 1215–1223
- 28 吴德隆, 王小军. 航天器气动辅助变轨动力学与最优控制. 北京: 中国宇航出版社, 2006
- 29 袁方. 最优过程理论在飞行轨迹优化计算中的应用. 飞行力学, 2000, 18(3): 50–53
- 30 Bellman R E. Dynamic Programming. Princeton: Princeton University Press, 1957
- 31 张之胚, 李建德. 动态规划及其应用. 北京: 国防工业出版社, 1994
- 32 Luns R. Iterative dynamic programming: From curiosity to a practical optimization procedure. Control Intel Syst, 1998, 26: 1–8
- 33 Bousson K. Single gridpoint dynamic programming for trajectory optimization. In: AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit, San Francisco, 2005. 1–8
- 34 Lavalley S M. Rapidly-exploring random trees: A new tool for path planning. Technical Report TR98-11. Ames: Computer Science Department, Iowa State University, 1998
- 35 朱金辉, 梁明杰, 梁颖驹. 一种自适应加权快速探索随机树算法. 计算机工程, 2010, 23(16): 16–18
- 36 Cheng P, Shen Z, Lavalley S M. RRT-based trajectory design for autonomous automobiles and spacecraft. Arch Control Sci, 2001, 11(3-4): 51–78
- 37 Frazzoli E, Dahleh M A, Feron E. Real-time motion planning for agile autonomous vehicles. J Guid Control Dyn, 2002, 25(1): 116–129

- 38 Mayne D, Rawling J, Rao C, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 1987, 36(6): 789–814
- 39 Bellingham J, Richards A, How J. Receding horizon control of autonomous aerial vehicles. In: *American Control Conference*, Evanston, 2002. 3741–3746
- 40 张胜祥, 裴海龙, 刘保罗. 基于滚动时域优化的无人飞行器轨迹规划. *计算机工程与应用*, 2008, 44(35): 237–239
- 41 Mettler B, Bachelder E. Combining on and offline optimization techniques for efficient autonomous vehicle's trajectory planning. In: *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*. San Francisco, 2005. 1–13
- 42 Kuwata Y, Schouwenaars T, Richards A, et al. Robust constrained receding horizon control for trajectory planning. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. San Francisco, 2005. 1–12
- 43 唐强, 张新国, 刘锡成. 一种用于低空飞行的在线航迹重规划方法. *西北工业大学学报*, 2005, 23(4): 271–275
- 44 高颖. 遗传算法综述. *计算机光盘软件与应用*, 2010, (4): 90–91
- 45 孙天英. 遗传算法及在控制理论中的应用. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2008
- 46 Garald A R, CoverstoneCroll V. Near optimal low-thrust orbit transfers generated by a genetic algorithm. *J Spacecr Rock*, 1996, 33(6): 859–862
- 47 CoverstoneCroll V. Near optimal low-thrust trajectories via micro genetic algorithms. *J Guid Control Dyn*, 1996, 20(1): 196–198
- 48 Krishnakumar K, Goldberg D E. Control system optimization using genetic algorithm. *J Guid Control Dyn*, 1992, 15(3): 735–740
- 49 Larry D D, Menom K K. Low-thrust orbit transfer optimization using genetic search. *AIAA Paper 1999-4151*, 1999
- 50 Jean A D, Sergey P, Sergey T. Application of genetic algorithm to space vehicle reentry trajectory optimization problem. *Inria*, No.3843, 1999
- 51 Rajesh K A. Reentry trajectory optimization: Evolutionary approach. *AIAA Paper 2002-5466*, 2002
- 52 曾国强, 郗晓宁, 任萱. 月球卫星最优小推力变轨研究. *天文学报*, 2000, 41(3): 289–299
- 53 吴美平, 胡小平. 遗传算法在载人飞船返回轨道一体化设计中的应用. *宇航学报*, 2001, 22(3): 99–104
- 54 王劼, 李俊峰, 崔乃刚, 等. 登月飞行器软着陆轨道的遗传算法研究. *清华大学学报(自然科学版)*, 2003, 43(8): 1056–1059
- 55 罗亚中, 唐国金, 周黎妮. 混合遗传算法及其在运载火箭最优上升轨道设计中的应用. *国防科技大学学报*, 2004, 26(2): 5–8
- 56 陈金明, 耿丽娜, 郑志强. 基于遗传算法的制导炸弹最优滑翔弹道研究. *弹箭与制导学报*, 2008, 28(3): 181–188
- 57 马文臻. 深空探测器的轨道设计与优化. 硕士学位论文. 北京: 中国科学院研究生院, 2006
- 58 吴迪, 王峰, 杨晨尧. 基于混沌免疫遗传算法的飞行轨迹优化研究. *武汉理工大学学报*, 2010, 32(20): 147–150
- 59 Colormi A, Dorigo M, Maniezzo V, et al. Distributed optimization by ant colonies. In: *Proceedings of the 1st European Conference on Artificial Life*, Mit Press, 1991. 134–142
- 60 古明家. 蚁群算法优化策略及其应用. 硕士学位论文. 南宁: 广西民族大学, 2009
- 61 Bonabeau E, Dorigo M, Theraulaz G. Inspiration for optimization from social insect behaviour. *Nature*, 2000, 406(6): 39–42
- 62 Katja V, Ann N. Colonies of learning automata. *IEEE Trans Syst Man Cybern (Part B)*, 2002, 32(6): 772–780
- 63 段海滨. 蚁群算法原理及其应用. 北京: 科学出版社, 2005
- 64 段佳佳, 徐世杰, 朱建丰. 基于蚁群算法的月球软着陆轨迹优化. *宇航学报*, 2008, 29(2): 476–488
- 65 王华, 杨存富, 刘恒军. 改进的蚁群算法及其在弹道优化中的应用. *计算机工程与应用*, 2008, 44(28): 217–219
- 66 金飞虎, 洪柄熔, 高庆吉. 基于蚁群算法的自由飞行空间机器人路径规划. *机器人*, 2002, 24(6): 526–529
- 67 Doerner K, Gronalt M, Hartl R F. Savings ants for the vehicle routing problem. *Appl Evoln Comput (S1089-778X)*, 2002, 6(5): 11–20
- 68 叶文, 范洪达. 基于改进蚁群算法的飞机低空突防航路规划. *飞行力学*, 2004, 22(3): 35–38
- 69 段海滨, 王道波, 朱家强. 蚁群算法理论及应用研究的进展. *控制与决策*, 2004, 19(12): 1321–1326
- 70 Marcin L P, Tony W. Using genetic algorithms to optimize ACS-TSP. In: *Proc of 3rd Workshop Ants*, Brussels, 2002. 282–287
- 71 吴庆洪, 张纪会, 徐心和. 具有变异特征的蚁群算法. *计算机研究与发展*, 1999, 36(10): 1240–1245
- 72 洪柄熔, 金飞虎, 高庆吉. 基于蚁群算法的多层前馈神经网络. *哈尔滨工业大学学报*, 2003, 35(7): 823–825
- 73 Isaacs J, Watkins R, Foo S. Evolving ant colony systems in hardware for random number generation. In: *Proc of the 2002 Congress on Evolutionary Computation*, Honolulu, 2002. 1450–1455
- 74 Russell E, James K. A new optimizer using particle swarm theory. In: *The Sixth International Symposium on Micromachine and Human Science*, Nagoya, 1995. 39–43
- 75 James K, Russell E. Particle swarm optimization. In: *IEEE International Conference on Neural Networks*, Perth, 1995. 1942–1948
- 76 胡鹏. 高超声速飞行器单周期冲越飞行轨迹优化研究. 硕士学位论文. 大连: 大连理工大学, 2007
- 77 梁军. 粒子群算法在最优化问题中的研究. 硕士学位论文. 南宁: 广西师范大学, 2008
- 78 吴迪, 胡鹏, 林笑旭. 高超声速飞行器单周期飞行轨迹优化研究. *石油化工高等学校学报*, 2007, 20(3): 37–40

- 79 谢富强, 吴浩, 唐灵灵. 基于粒子群算法的飞行器再入轨迹优化. 计算机技术与自动化, 2008, 27(4): 72–75
- 80 杨希祥, 江振宇, 张为华. 基于粒子群算法的固体运载火箭上升段弹道优化设计研究. 宇航学报, 2010, 31(5): 1304–1308
- 81 黄国强, 南英, 陆宇平. 二级入轨空天飞机上升轨迹优化. 宇航学报, 2010, 31(3): 641–647
- 82 黄国强, 南英, 陆宇平. 小推力深空探测轨道全局优化设计. 航空学报, 2010, 31(7): 1366–1372
- 83 Nan Y, Huang G Q, Lu Y P. Global 4-D trajectory optimization for spacecraft. Sci China Tech Sci, 2010, 53(8): 2097–2102
- 84 李佳峰, 周浩, 陈万春. 高超声速飞行器滑翔段最优弹道的间接算法. 飞行力学, 2009, 27(3): 41–44
- 85 陈金球. 高超声速巡航飞行器弹道优化. 西安: 西北工业大学, 2007
- 86 周浩, 陈万春, 殷兴良. 高超声速飞行器多段弹道优化设计. 宇航学报, 2008, 29(4): 1205–1209
- 87 余智勇, 马广富, 沈作军. 基于间接伴随法的大气层内高超声速飞行器最优上升轨迹研究. 宇航学报, 2010, 31(8): 1951–1957
- 88 Calise A J, Corban J E. Optimal control of two-time scale systems with state-variable inequality constraints. J Guid Control Dyn, 1992, 15(2): 468–476
- 89 Schmidt D K, Velapoldi J. Optimal mission performance and guidance for hypersonic single stage to orbit. J Guid Control Dyn, 1997, 20(6): 1157–1164
- 90 Lu P, Sun H S, Tsai B. Closed-loop endoatmospheric ascent guidance. J Guid Control Dyn, 2003, 26(2): 283–294
- 91 Dukeman G A. Atmospheric ascent guidance for rocket-powered launch vehicles. AIAA 2002-4559, 2002
- 92 李惠峰, 李昭莹. 高超声速飞行器上升段最优制导间接法研究. 宇航学报, 2011, 32(2): 297–302
- 93 马广富, 余智勇. 基于改进型伴随方法的高超声速飞行器上升段轨迹优化. 固体火箭技术, 2011, 34(3): 273–276
- 94 周浩, 周韬, 陈万春. 高超声速滑翔飞行器引入段弹道优化. 宇航学报, 2006, 27(5): 970–973
- 95 王威. 高超声速飞行器滑翔段制导方法研究. 硕士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2010
- 96 雍恩米, 唐国金, 陈磊. 基于 Gauss 伪谱法的高超声速飞行器再入轨迹快速优化. 宇航学报, 2008, 29(6): 1766–1772
- 97 刘运鹏, 李伶. 高超声速导弹高空再入减速段弹道优化设计. 航天控制, 2010, 28(6): 3–6
- 98 董建中, 黄攀峰, 孟中杰. 高超声速巡航飞行器下滑段在线航迹规划方法. 计算机仿真, 2009, 26(11): 76–79
- 99 谢富强, 吴浩, 唐灵灵. 基于粒子群算法的飞行器再入轨迹优化. 计算技术及自动化, 2008, 27(4): 72–75
- 100 雍恩米, 陈磊, 唐国金. 基于物理规划的高超声速飞行器滑翔式再入轨迹优化. 宇航学报, 2008, 29(5): 1091–1097
- 101 姚宗信. 高超声速飞行器冲跃飞行轨迹优化研究. 导弹与航天运载技术, 2007, 29(4): 5–9
- 102 赵钧, 孟令赛. 高超声速临近空间飞行器跳跃飞行轨迹优化. 战术导弹技术, 2010, (5): 32–35
- 103 马培蓓, 纪军, 范作娥. 考虑战场环境约束的多导弹协同任务规划. 电光与控制, 2010, 17(8): 5–10
- 104 Mclain T W, Chandler P R, Pachter M. A decomposition strategy for optimal coordination of unmanned air vehicles. In: Proceeding for the American Control Conference, Chicago, 2000. 369–373
- 105 Sujit P B, Beard R. Cooperative path planning for multiple UAVs exploring an unknown region. In: Proceeding of the 2007 American Control Conference, New York, 2007. 347–352
- 106 Sujit P B, George J M, Beard R W. Multiple UAV coalition formation. In: American Control Conference, Washington DC, 2008. 2010–2015
- 107 Sujit P B, Beard R. Multiple UAV path planning using anytime algorithm. In: American Control Conference, Missouri, 2009. 2978–2983
- 108 Beard R W, Mclain T W. Multiple UAV cooperative search under collision avoidance and limited range. In: Proceeding of IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii, 2003. 25–30
- 109 Beard R W, Mclain T W. Multiple UAV cooperative search under collision avoidance and limited range. In: Proceeding of IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii, 2003. 25–30
- 110 Alighanbair M, Kuwata Y, How J P. Coordination and control of multiple UAVs with timing constraints and loitering. In: Proceeding of the American Control Conference, USA, 2003. 5311–5316
- 111 潘哲. 常值风作用下的反舰导弹多弹协同航路规划. 海军航空工程学院学报, 2011, 26(2): 219–222
- 112 马向玲, 高波, 李国林. 导弹集群协同作战任务规划协同. 飞行力学, 2009, 27(1): 1–5
- 113 毛云云. 多飞行器协同航迹规划算法研究. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2010
- 114 李珂, 王正平. 多架无人机协同攻击航路规划. 航空计算技术, 2006, 36(5): 98–101
- 115 张同法, 于雷, 鲁艺. 多架无人机协同作战的路径规划. 火力与指挥控制, 2009, 34(2): 143–145
- 116 张大巧, 鲜勇, 王明海. 基于多路径算法的选飞航迹规划方法研究. 弹箭与制导学报, 2011, 31(4): 69–72
- 117 肖支才, 程春华. 基于改进遗传算法的反舰导弹协同任务规划. 计算机与数字工程, 2010, 38(5): 22–24