



论 文

基于三次 B 样条逆向细分的自由曲线的多分辨率表示

高敏*, 郑红婵

西北工业大学应用数学系, 西安 710129

* 通信作者. E-mail: average03@126.com

收稿日期: 2012-09-29; 接受日期: 2012-12-16

国家自然科学基金 (批准号: 61070233) 和西北工业大学基础研究基金 (批准号: JC200946) 资助项目

摘要 目前国内外关于逆向细分的研究主要集中于曲面逆向细分, 对大量的特定曲线细分法的逆向细分算法研究较少, 对于基于逆向细分的曲线的多分辨率构造及简化也鲜有研究. 针对三次 B 样条细分法具有几何意义明显、规则简单等特征, 本文从几何角度出发, 推导并给出了基于三次 B 样条细分的逆向细分规则, 在此基础上提出了自由曲线的一种新的多分辨率表示方法, 通过在对自由曲线进行逆向细分时保留细节信息, 最终可以实现自由曲线的多分辨率表示, 并可应用于自由曲线的简化与精确重构中. 文中给出了曲线的多分辨率表示、简化和重构的例子. 该方法几何意义明显, 易于编程实现. 实验表明应用该逆向细分法得到的简化曲线能够更明显地反映原曲线的变化趋势. 本文方法在构造分解矩阵和重构矩阵方面较以往的某些方法简单, 并且在分解和重构曲线时的计算量相较于以往的方法较少.

关键词 逆向细分 曲线细分 多分辨率 简化与重构

1 引言

细分方法是根据初始数据由计算机直接生成曲线曲面或其他几何形体的一类方法, 是 CAGD 曲线曲面造型中的一类很有效的方法, 其处理过程简单快速, 在几何造型中有着广泛的应用. 在细分过程中, 随着细分次数的增加, 控制多边形或控制网格会愈加逼近极限曲线或曲面, 但是曲线或曲面的控制点数也会大大地增加, 这就给如何保存、传输和编辑这些庞大的数据带来了一定的困难, 由此逆向细分的观点应用而生. 逆向细分是细分的逆过程, 因其在自由曲线曲面的多分辨率模型创建、数据压缩与快速传输以及多分辨率编辑等方面应用广泛, 近几年成为人们研究的一个热点.

逆向细分的观点最早由 Samavati 等^[1]于 1999 年提出, 所谓逆向细分就是将已有的曲线和曲面简化回细分前的初始控制多边形或网格的过程. 在曲面逆向细分方面, Samavati 等于 2002 年提出了逆向 Doo 细分法^[2], 并应用该方法生成相应曲面的多分辨率模型. 2003、2006 年, Samavati 等^[3]和 Lanqutin 等^[4]分别提出了关于 Loop 细分和 Catmull-Clark 细分的逆向细分方法. 2006 年, 我国中山大学的马建平提出了关于 Loop 细分的新逆向细分法^[5], 该方法将 Loop 逼近型细分模式作为插值型细分模式进行操作, 避免了通过求解细分矩阵方程来建立曲面简化规则的复杂过程. 2007 年, 上海

交通大学的赵喜明提出了一种新的逆向 Loop 细分法, 应用该方法可以简化并保留曲面的一些尖锐特征 [6]. 2009 年, 马建平等人将逆向细分应用于数据压缩方面 [7]. 在曲线逆向细分方面, Hassan 等提出了逆向 Chaikin 细分法 [8], 应用该逆向细分法实现了曲线的多分辨率表示以及编辑. 徐丰等基于几何逆向思想提出了灵活性更高的广义逆向 Chaikin 细分法 [9]. 而对于一般的曲线细分法, Samavati 等将多分辨率、小波及最小二乘思想引进逆向细分, 提出了基于全局及局部最小二乘法的逆向细分法, 并将其应用于曲线的多分辨率表示 [1,10]. Olsen 等用约束小波的思想优化了曲线分解与重构矩阵的计算 [11]. Sadeghi 等将曲线能量的观点引入逆向细分中, 提出了光滑逆向细分法 [12].

在多分辨率造型研究方面, Finkelstein 和 Salesin 在 1994 年将小波技术应用到曲线曲面造型领域 [13], 开辟了曲线曲面多分辨率造型的新时代. 自此以后, 国内外出现了大量这方面的文献. 近年来国内有关这方面的文献多集中于基于小波变换的 NURBS 曲线曲面的多分辨率造型 [14,15]、基于边删除的高分辨率三维模型的多分辨率构造 [16] 和基于细分法的曲面的多分辨率造型 [17] 方面. 作为多分辨率造型技术中的两种主要方法, 细分和小波有着很重要的联系. 2007 年, 李松和冼军通过向量细分方程给出了紧支撑双正交多重小波的一般性构造方法 [18], Wang 和 Ma 提出了基于插值 $\sqrt{2}$ 细分法的双正交小波的构造方法 [19].

对于上述已有的曲线逆向细分方法, Samavati 等提出的基于多分辨率、小波及全局最小二乘思想的逆向细分算法虽然实现了曲线的多分辨率表示, 但是没有具体给出分解矩阵 A, B . Olsen 等以及 Sadeghi 等提出的逆向细分法几何意义不明显, 而且目前国内外对特定曲线细分法的逆向细分算法研究较少, 对于基于逆向细分的曲线多分辨率构造也鲜有研究. 鉴于前述这些不足, 本文针对三次 B 样条细分法具有几何意义明显、规则简单等特征, 推导并给出了其相应的逆向细分规则, 在此基础上提出了基于三次 B 样条逆向细分的自由曲线多分辨率表示方法, 可应用于自由曲线的简化与精确重构中, 并给出了几个自由曲线简化和重构的例子.

2 三次 B 样条细分法及其逆向细分法

在本部分, 我们首先简单回顾一下三次 B 样条细分法, 然后在分析和观察的基础上, 推导出其相应的逆向细分法.

2.1 三次 B 样条细分法

给定初始有序控制顶点集 $C^0 = \{C_j^0\}_{j=0}^{n+2}$, $C_j^0 \in R^d$, 设 $C^k = \{C_j^k\}_{j=0}^{n+2}$ 为第 k 次细分后的有序控制顶点集, 递归定义 $C^{k+1} = \{C_j^{k+1}\}_{j=0}^{n+2}$ 如下:

$$\begin{cases} C_{2i}^{k+1} = \frac{1}{2}C_i^k + \frac{1}{2}C_{i+1}^k, & 0 \leq i \leq 2^k n + 1, \\ C_{2i+1}^{k+1} = \frac{1}{8}C_i^k + \frac{3}{4}C_{i+1}^k + \frac{1}{8}C_{i+2}^k, & 0 \leq i \leq 2^k n. \end{cases} \quad (1)$$

该细分法的几何意义如图 1 所示, 易知其几何意义实际上是图中的虚线部分对实线部分的折线割角.

为了我们后续方便讨论和推导, 我们也可以将细分规则 (1) 表示为如下形式:

$$\begin{cases} C_{2i}^{k+1} = \frac{1}{2}(C_i^k + C_{i+1}^k), & 0 \leq i \leq 2^k n + 1, \\ C_{2i+1}^{k+1} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [C_i^k + C_{i+1}^k] + \frac{1}{2} [C_{i+1}^k + \frac{1}{2}(C_{i+1}^k + C_{i+2}^k)] \right\}, & 0 \leq i \leq 2^k n. \end{cases} \quad (2)$$

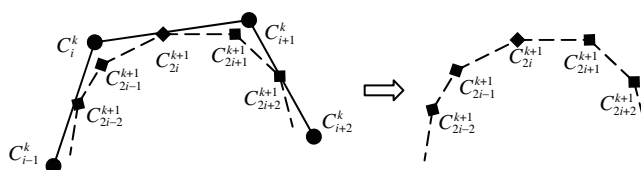


图 1 三次 B 样条细分示意图

Figure 1 The geometric interpretation of subdivision of B-spline of degree three

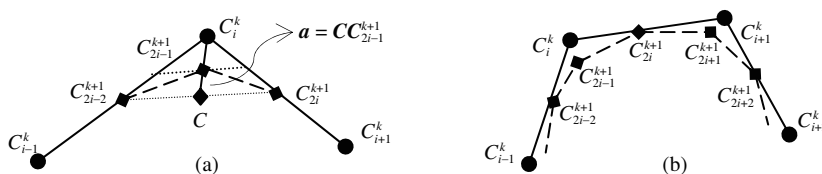


图 2 三次 B 样条逆向细分法示意图

Figure 2 The interpretation of reverse subdivision of subdivision of B-spline of degree three. (a) The deduction of reverse subdivision; (b) the geometrical meaning of reverse subdivision

2.2 三次 B 样条逆向细分法

下面研究三次 B 样条细分的逆向细分, 即我们知道细分后的控制顶点集 $C^{k+1} = \{C_i^{k+1}\}_{i=0}^n$, 想推导计算出细分前的控制顶点集 $C^k = \{C_i^k\}_{i=0}^m$ (其中 $m < n$). 观察图 1 中三次 B 样条细分中新顶点产生的示意图, 我们聚焦于顶点 C_{2i-1}^{k+1} , 来推导顶点 C_i^k 的生成.

如图 2(a) 所示, 我们取点 C 为点 C_{2i-2}^{k+1} 和 C_{2i}^{k+1} 的中点, 即 $C = \frac{1}{2}(C_{2i-2}^{k+1} + C_{2i}^{k+1})$, 则由三次 B 样条细分规则 (1) 的等价表示 (2) 易知, 点 C_{2i-1}^{k+1} 位于线段 CC_i^k 的中点处, 从而向量

$$a = CC_{2i-1}^{k+1} = C_{2i-1}^{k+1}C_i^k = C_{2i-1}^{k+1} - C = C_{2i-1}^{k+1} - \frac{1}{2}(C_{2i-2}^{k+1} + C_{2i}^{k+1}),$$

故我们容易推知

$$C_i^k = C_{2i-1}^{k+1} + a = -\frac{1}{2}C_{2i-2}^{k+1} + 2C_{2i-1}^{k+1} - \frac{1}{2}C_{2i}^{k+1},$$

即有

$$C_i^k = -\frac{1}{2}C_{2i-2}^{k+1} + 2C_{2i-1}^{k+1} - \frac{1}{2}C_{2i}^{k+1}. \quad (3)$$

式 (3) 即为三次 B 样条逆向细分规则. 相对于正向三次 B 样条细分法, 其相应的逆向细分法也具有明显的几何意义, 如图 2(b) 所示. 由图易知三次 B 样条逆向细分法的几何意义实际上是折线补角.

3 基于三次 B 样条逆向细分的自由曲线的多分辨率表示

在本部分, 我们首先简单介绍一下曲线的多分辨率理论, 再将上述的逆向三次 B 样条细分法应用于自由曲线的简化中, 在简化过程中建立细节信息并结合正向三次 B 样条细分, 可以实现自由曲线的多分辨率表示及精确重构.

3.1 曲线的多分辨率表示理论

根据曲线的多分辨率理论^[20], 假设已提取出一条自由曲线上的 n 个有序加密控制点, 用向量 C^{k+1} (n 点构成的列分块向量, 下文也表示采样得到的自由曲线) 表示, 我们称其为曲线的高分辨率模式. 利用分解矩阵 $A^{k+1}(m \times n)$ 、 $B^{k+1}((n-m) \times n)$, 可以得到相对粗化的向量 C^k (m 点构成的列分块向量), $C^k = A^{k+1}C^{k+1}$, 和分解过程中丢失的细节信息 D^k ($(n-m)$ 个元素构成的列分块向量), $D^k = B^{k+1}C^{k+1}$. 称向量 C^k 为向量 C^{k+1} 的低阶分辨率模式, 需要注意的是, D^k 的元素均是自由向量, 也可以看作是偏移量.

上述的过程即为曲线的分解过程, 而与其相反的过程称为曲线的合成过程, 即利用合成矩阵 $P^{k+1}(n \times m)$ 、 $Q^{k+1}(n \times (n-m))$, 我们可以重建高分辨率向量 $C^{k+1} = P^{k+1}C^k + Q^{k+1}D^k$.

由于在不同分辨率模式下, 曲线点集所对应的分解矩阵及合成矩阵的阶数均是不同的, 故在这里为了我们方便表示, 我们将合成矩阵记为 P, Q , 分解矩阵记为 A, B , 且我们指出合成矩阵 P, Q 与分解矩阵 A, B 需要满足双正交条件^[20]

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP & AQ \\ BP & BQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中 l_1 与 l_2 为单位矩阵.

3.2 基于三次 B 样条逆向细分的分解矩阵与合成矩阵的构造

由 3.1 小节知, 要想实现对自由曲线 C^{k+1} 的多分辨率表示, 关键是要找出分解矩阵 A, B 与合成矩阵 P, Q , 在这里我们将 2.2 小节中提出的三次 B 样条逆向细分法应用于自由曲线的简化中.

我们将式 (1) 与式 (3) 分别用矩阵的形式写出来, 便可以得到合成矩阵中的 P 与分解矩阵中的 A 如下:

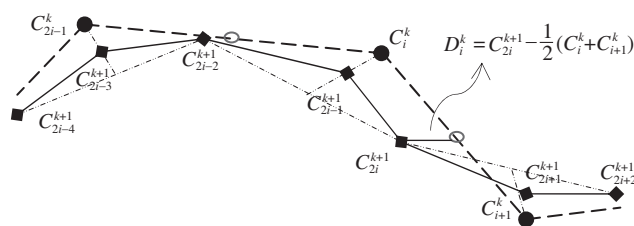
$$P = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & & \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & \frac{-1}{2} & 2 & \frac{-1}{2} & & \\ & & \frac{-1}{2} & 2 & \frac{-1}{2} & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

接下来关键是构造分解矩阵中的 B 与合成矩阵中的 Q , 下面我们给出具体的构造过程.

对 C^{k+1} 应用三次 B 样条逆向细分规则 (3) 便得到 C^k . 聚焦于 C^k 中的点 C_i^k 与 C_{i+1}^k , 由三次 B 样条细分规则 (1) 知, $C_i^k, C_{2i}^{k+1}, C_{i+1}^k$ 在同一条直线上, 且 C_{2i}^{k+1} 是线段 $C_i^k C_{i+1}^k$ 的中点, 即

$$C_{2i}^{k+1} = \frac{1}{2}(C_i^k + C_{i+1}^k). \quad (5)$$

若 C^{k+1} 本身是应用三次 B 样条细分法得到的, 则式 (5) 一定成立, 即对 C^{k+1} 应用逆向细分规则 (3) 可以精确得到细分前的控制多边形 C^k . 若 C^{k+1} 只是通过其他方法提取得到的, 则式 (5) 可能会不成立, 且 $C_i^k, C_{2i}^{k+1}, C_{i+1}^k$ 可能会不在一条直线上. 如图 3 所示, 方实心点是逆向细分前的控制

图 3 细节信息 D_i^k 示意图Figure 3 The interpretation of error vector D_i^k

点, 圆实心点是逆向细分后的控制点, 空心圆点是其所在线段的中点, 点划线大体示意逆向细分中圆实心点的生成过程. 从图中可知, $C_{i-1}^k, C_{2i-2}^{k+1}, C_i^k$ 虽然在一条直线上, 但很明显 C_{2i-2}^{k+1} 不是线段 $C_{i-1}^k C_i^k$ 的中点, 而 $C_i^k, C_{2i}^{k+1}, C_{i+1}^k$ 三点更不在一条直线上. 由此, 为了能够精确重构原曲线, 在每次进行逆向细分时要保留一些细节信息, 结合式 (3), 记 $D_i^k = C_{2i}^{k+1} - \frac{1}{2}(C_i^k + C_{i+1}^k)$, 即

$$D_i^k = \frac{1}{4}C_{2i-2}^{k+1} - C_{2i-1}^{k+1} + \frac{3}{2}C_{2i}^{k+1} - C_{2i+1}^{k+1} + \frac{1}{4}C_{2i+2}^{k+1}. \quad (6)$$

在应用正向三次 B 样条细分法重建逆向细分前的曲线时, 需要应用上述的细节信息进行一定的补偿, 结合式 (2) 整理可得

$$\begin{cases} C_{2i}^{k+1} = \frac{1}{2}(C_i^k + C_{i+1}^k) + D_i^k, \\ C_{2i+1}^{k+1} = \frac{1}{8}C_i^k + \frac{3}{4}C_{i+1}^k + \frac{1}{8}C_{i+2}^k + \frac{1}{4}D_i^k + \frac{1}{4}D_{i+1}^k. \end{cases} \quad (7)$$

我们将式 (6) 和 (7) 写成矩阵的形式即可得到分解矩阵中的 B 和合成矩阵中的 Q , 即有

$$B = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & \frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{4} \\ & & & \ddots & & & \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \end{pmatrix}.$$

上述的推导都是针对封闭曲线的, 利用类似的推导, 我们同样可以构造出针对开曲线的合成矩阵与分解矩阵, 具体过程在这里我们就不再赘述.

至此, 我们已经完成了基于三次 B 样条逆向细分的合成矩阵 P, Q 与分解矩阵 A, B 的构造. 我们指出, 这些合成矩阵与分解矩阵满足双正交条件. 这是因为, 以封闭曲线为例, 如式 (8) 式 (9) 所示, AP 的第 i 行、第 i 列元素的值为: $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$, 该行的其他元素的值均为 0, 而 BQ 的第 j 行、第 j 列的值为: $-1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot 1 - 1 \cdot \frac{1}{4} = 1$, 该行的其他元素的值也均为 0. 用同样的方法, 我们也可以推知 AQ, BP 均为零矩阵, 故由式 (4) 知基于三次 B 样条逆向细分的合成矩阵 P, Q 与

分解矩阵 A, B 满足双正交条件.

$$AP = \begin{matrix} i \\ \dots \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & & & & \\ & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & & \\ \hline & & & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ & & & & & \ddots \end{array} \right) \begin{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & & & & \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & & \\ \hline & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \\ & & & & \ddots & \end{array} \right) \begin{matrix} 2i-1 \\ \dots \end{matrix} \end{matrix} \quad (8)$$

3.3 基于三次 B 样条逆向细分的自由曲线的多分辨率表示及应用

$$BQ = \begin{matrix} j \\ \dots \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & & & & \\ & \frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{4} \\ \hline & & & \frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{4} \\ & & & & & & & \ddots \end{array} \right) \begin{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & & & & \\ & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ & & & & & \ddots \end{array} \right) \begin{matrix} 2j \\ \dots \end{matrix} \end{matrix} \quad (9)$$

由曲线的多分辨率理论^[20], 应用上述得到的分解矩阵 A, B 与合成矩阵 P, Q , 可以实现对自由曲线的多分辨率表示.

首先, 我们给出基于三次 B 样条逆向细分的自由曲线的多分辨率表示的算法, 具体如下:

第 1 步: 获取自由曲线采样点向量, 记为 C^{k+1} , 并统计其点数, 记为 n .

第 2 步: 判断曲线是否封闭, 并判断向量 C^{k+1} 的点数 n 是否满足要求. 对于封闭曲线, 要满足条件: $\text{mod}(n, 2)=0$ (其中 $\text{mod}(n, 2)$ 表示对 n 关于 2 求余); 对于开曲线, 要满足条件: $\text{mod}(n, 2) \neq 0$. 若不满足要求, 则复制尾节点, 并令 $n = n + 1$.

第 3 步: 根据曲线是否封闭并结合曲线的点数 n , 正确选择并生成 3.2 小节中给出的分解矩阵 A, B , 则可得到 $C^k = A^{k+1}C^{k+1}$ 和 $D^k = B^{k+1}C^{k+1}$.

第 4 步: 在下列的三个选项中选择. (1) 继续对曲线进行简化, 则进入第 1 步. (2) 在现有简化曲线 C^l 及细节信息 $D^l, D^{l+1}, \dots, D^k$ (其中 $l < k+1$) 的基础上得到曲线较高的分辨率模式, 则进入第 5 步. (3) 结束对曲线的处理, 则结束程序, 退出.

第 5 步: 获取 C^l 的点数, 并根据曲线是否封闭, 正确选择并生成 3.2 小节中给出的合成矩阵 P, Q , 则可得到 $C^{l+1} = P^{l+1}C^l + Q^{l+1}D^l$. 判断 C^{l+1} 末尾两节点是否相等, 若相等则删除尾节点, 进入第 4 步.

关于上述算法, 有几点要说明. 首先, 我们指出, 应用上述的算法, 可以实现曲线在不同分辨率模式下的自由切换. 其次, 在对开曲线进行简化时, 曲线两端端点需要保留. 再其次, 由于分解矩是基于

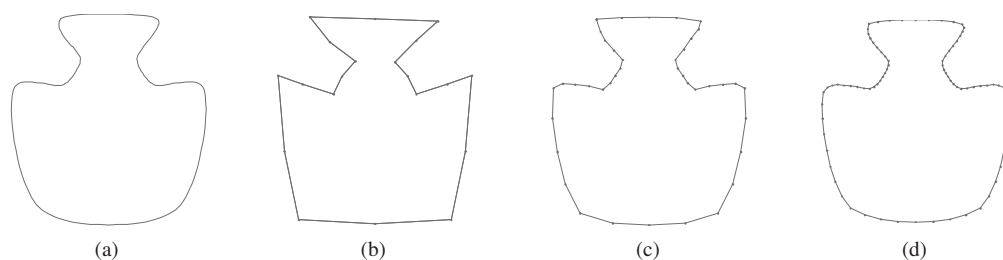


图 4 自由曲线的多分辨率表示示意图

Figure 4 The interpretation of multiresolution representation of freedom curves. (a) The profilogram of a vase; (b) the simplified profilogram; (c) the lower resolution of the profilogram; (d) the low resolution of the profilogram

阵三次 B 样条逆向细分的, 即是基于式 (3) 和式 (6) 的, 从而在进行曲线分解时, 其点数需要满足条件: 对于封闭曲线, $\text{mod}(n, 2) = 0$, 对于开曲线, $\text{mod}(n, 2) \neq 0$, 否则通过复制尾节点来使其点数满足要求. 最后, 由于在曲线简化时会有复制尾节点的情况发生, 故在每次重建曲线较高一阶分辨率模式后, 都要判断末尾两节点是否相等, 若相等则删除尾节点 (第 5 步), 因为只有这样才能保证真正得到上一层的曲线节点.

下面我们给出 1 个实例. 取 1 个包含 160 个顶点的花瓶轮廓曲线 $C^3 = \{C_i^3\}_{i=1}^{160}$, 如图 4(a) 所示. 应用上述算法, 经过 3 次逆向后, 我们最终得到关于原曲线的简化曲线 $C^0 = \{C_i^0\}_{i=1}^{20}$ 及一些细节信息 D^0, D^1, D^2 . 逆向后得到的简化曲线 $C^0 = \{C_i^0\}_{i=1}^{20}$ 如图 4(b) 所示. 同样利用上述算法, 我们可以实现原曲线的不同分辨率模式表示. 图 4(b), (c), (d) 分别为原曲线在不同分辨率模式下的曲线. 具体简化及合成过程如下所示:

$$\begin{aligned}
 C^3 \xrightarrow[B_{80 \times 160}]{A_{80 \times 160}} C^2 = \{C_i^2\}_{i=1}^{80}, D^2 = \{D_i^2\}_{i=1}^{80}, \quad C^0, D^0 \xrightarrow[Q_{40 \times 20}]{P_{40 \times 20}} C^1 = \{C_i^1\}_{i=1}^{40}, \\
 \xrightarrow[B_{40 \times 80}]{A_{40 \times 80}} C^1 = \{C_i^1\}_{i=1}^{40}, D^1 = \{D_i^1\}_{i=1}^{40}, \quad C^1, D^1 \xrightarrow[Q_{80 \times 40}]{P_{80 \times 40}} C^2 = \{C_i^2\}_{i=1}^{80}, \\
 \xrightarrow[B_{20 \times 40}]{A_{20 \times 40}} C^0 = \{C_i^0\}_{i=1}^{20}, D^0 = \{D_i^0\}_{i=1}^{20}, \quad C^2, D^2 \xrightarrow[Q_{160 \times 80}]{P_{160 \times 80}} C^3 = \{C_i^3\}_{i=1}^{160}.
 \end{aligned}$$

4 结果分析与应用实例

在本部分中, 我们首先分析本文与文献 [1,9,10] 中的合成矩阵及分解矩阵的一些特殊结构, 然后在此基础上分析利用本文与文献 [1,9,10] 中的合成矩阵及分解矩阵在对曲线进行分解与重构过程中计算量的差别. 最后我们给出一些应用本文提出的方法和前人方法进行曲线简化和重构对比的实例.

利用现有的基于逆向细分的曲线简化方法和本文提出的曲线简化方法, 都可以对曲线进行简化. 然而, 应用文献 [1] 中的方法得到的分解矩阵通常含有大量的非零元素. 而应用本文与文献 [9,10] 中的方法得到的合成矩阵及分解矩阵均有一些类似的特殊结构. 即对于封闭曲线, 其相应的合成矩阵的每一列均由一些固定的非零元素组成, 分解矩阵的每一行也均由一些固定的非零元素组成; 对于开曲线, 其相应的合成矩阵与分解矩阵, 除开头与结尾的行列比较特殊外, 其余均与封闭曲线一样. 由此易知, 本文与文献 [9,10] 中的合成矩阵及分解矩阵中含有大量的零元素. 故利用本文及文献 [9,10] 中的方法在对曲线进行简化时的速度比利用文献 [1] 中的方法更快一些.



图 5 应用本文方法与其他方法对封闭曲线的简化效果对比图

Figure 5 The comparison of simplification of closed curves by different methods. (a) The original curve and the simplified curve using this article; (b) the simplified curves using this article and generalized reverse Chaikin subdivision respectively; (c) the simplified curves using this article and reversing subdivision rules by least-squares data fitting respectively; (d) the simplified curves using this article and reversing subdivision rules by local least-squares data fitting respectively

对于 1 条含有 n 个顶点的自由曲线 C^{k+1} , 应用本文及文献 [9,10] 中的分解矩阵对其进行 1 次逆向时, 需要进行的乘除运算及加减运算均为 n 的线性函数, 即 $T(n) = O(n)$, 且应用本文与文献 [9] 中的方法运算量相同, 均比应用文献 [10] 中方法的运算量小. 而应用文献 [1] 中的方法, 需要进行的乘除运算及加减运算均为 n 的二次函数, 即 $T(n) = O(n^2)$. 在重构原曲线方面, 应用本文及文献 [1,9,10] 中的合成矩阵需要进行的乘除运算及加减运算都为 n 的线性函数, 即 $T(n) = O(n)$, 且应用本文与文献 [9] 中的方法计算量均比应用文献 [1,10] 中方法的计算量小.

下面我们给出一些曲线简化和重构的实例.

在第 1 个例子中, 我们取 1 个鸽子的轮廓曲线点集 (如图 5(a) 中光滑曲线所示), 包含 496 个顶点, 经过 3 次逆向细分简化后仅含有 62 个顶点 (如图 5(a) 中实心点所连曲线所示). 图 5(b), (c), (d) 中实心点所连曲线也均为应用本文方法经过 3 次逆向细分简化后得到的曲线, 而空心点所连曲线的分别为应用广义逆向 Chaikin 细分法^[9]和基于全局及局部最小二乘数据拟合^[1,10]的逆向三次 B 样条细分法对原闭曲线分别进行 3 次逆向简化的结果. 从图 5 中我们可以看到, 应用本文提出的方法对自由曲线进行简化后, 得到的控制多边形和应用广义逆向 Chaikin 细分法得到的相比, 能够更为明显地反映出原曲线的变化起伏; 应用本文方法得到的简化曲线与应用基于全局最小二乘数据拟合的逆向三次 B 样条细分法得到的简化曲线更为相似.

在第 2 个例子中, 我们取 1 条开曲线 (如图 6(a) 中光滑曲线所示), 包含 127 个顶点, 经过 3 次逆向细分简化后仅含有 17 个顶点, 如图 6(a) 中实心点所连曲线所示. 同样图 6(b), (c), (d) 中实心点所连曲线均为利用本文方法经过 3 次逆向细分简化得到的曲线, 空心点所连曲线分别为应用文献

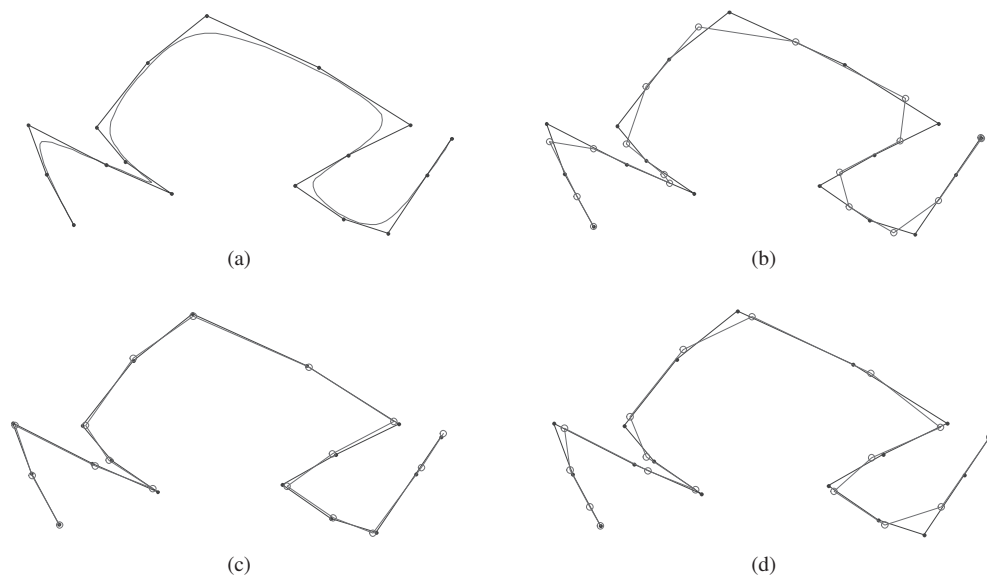


图 6 应用本文方法与其他方法对开曲线的简化效果对比图

Figure 6 Figure 6 The comparison of simplification of open curves by different methods. (a) The original curve and the simplified curve using this article; (b) the simplified curves using this article and generalized reverse Chaikin subdivision respectively; (c) the simplified curves using this article and reversing subdivision rules by least-squares data fitting respectively; (d) the simplified curves using this article and reversing subdivision rules by local least-squares data fitting respectively

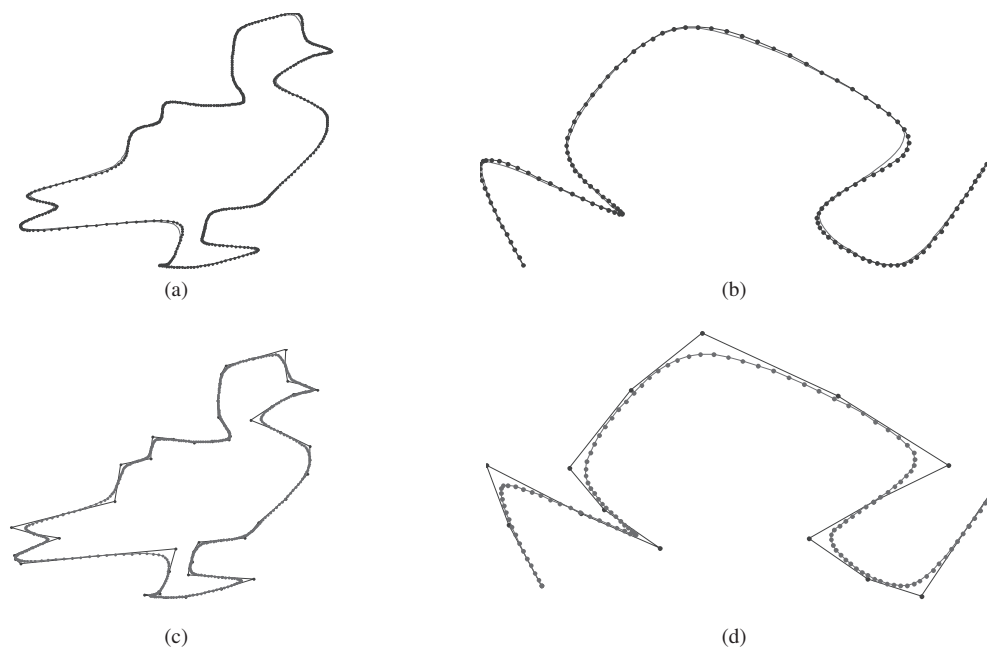


图 7 不加细节信息重构与精确重构的效果对比图

Figure 7 The comparison of reconstruction of closed curves without details and the exact reconstruction of freedom curves using this article. (a), (b) The original curve and the reconstructed curve without details; (c), (d) the exact reconstruction of freedom curve

[9,1,10] 的方法对原开曲线分别进行 3 次逆向简化的结果. 观察图 6(d), (e), (f), 我们依然可以看到, 应用本文提出的方法对自由曲线进行简化后, 得到的控制多边形能够更为明显地反映出原曲线的变化起伏; 应用本文方法得到的简化曲线与应用基于全局最小二乘数据拟合的逆向三次 B 样条细分法得到的简化曲线更为相似.

在第 3 个例子中, 我们应用本文方法的方法, 对其相应简化后的封闭曲线及开曲线进行不加细节信息的重构, 图 7(a),(b) 中实心点所连曲线为不加细节信息的重构图. 观察图 7(a), (b) 我们发现, 在重构曲线时若不加细节信息, 得到的重构曲线与原曲线基本吻合, 但仍有一定的差异. 故要想精确重构原曲线, 在进行逆向细分简化曲线时, 保留细节信息是有必要的. 图 7(c), (d) 即为利用本文的方法对其相应简化后的封闭曲线及开曲线进行精确重构, 在重构的过程中逐步加入了细节信息.

5 结束语

本文针对三次 B 样条细分法, 建立了其相应的逆向细分模式, 推导出了分解矩阵 A, B 与合成矩阵 P, Q , 实现了基于三次 B 样条逆向细分的自由曲线多分辨率表示, 并将所得结果应用于自由曲线的简化与重构. 与已有的逆向细分模式相比, 本文中的逆向细分模式几何意义明显, 特别是将其应用于自由曲线的多分辨率表示中时, 在构造分解矩阵及合成矩阵上简单、直接、易于编程实践.

未来工作可以考虑在现有的研究基础上, 研究基于逆向细分与细分的曲线简化与重构的速度与精度问题. 这个问题在数据压缩与传输中有着重要的意义.

参考文献

- 1 Smavati F, Bartels R. Multiresolution curve and surface representation: reversing subdivision rules by least-squares data fitting. *Comput Graph Forum*, 1999, 18: 97–119
- 2 Samavati F, Mahdavi-Amiri N, Bartels R. Multiresolution surfaces having arbitrary topologies by a reverse Doo subdivision method. *Comput Graph Forum*, 2002, 21: 121–136
- 3 Samavati F, Pakdel H R, Smith C, et al. Reverse loop subdivision. Technical Report, University of Calgary, 2003
- 4 Sandrine L, Marc N. Reverse Catmull-Clark subdivision. In: *Proceedings of the 14th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision*, 2006. 319–326
- 5 Ma J P, Luo X N, Ling R T, et al. Progressive mesh generation based on reverse subdivision. In: *Proceedings of the 13th National Conference on Image and Graphics*. Beijing: Tsinghua University, 2006. 590–596 [马建平, 罗笑南, 凌若天, 等. 一种基于逆向细分的渐进网格生成算法. 见: 第 13 届全国图象图形学学术会议. 北京: 清华大学出版社, 2006. 590–596]
- 6 Zhao M X, Ma L Z, Mao Z H, et al. Reverse loop subdivision with sharp features. *High Technol Lett*, 2006, 12: 113–118
- 7 Ma J P, Luo X N, Chen B, et al. Triangle mesh compression based on reverse subdivision for mobile terminals. *J Softw*, 2009, 20: 2607–2615 [马建平, 罗笑南, 陈渤, 等. 面向移动终端的三角网格逆细分压缩算法. *软件学报*, 2009, 20: 2607–2615]
- 8 Hassan M F, Dodgson N A. Reverse subdivision. In: *Advances in Multiresolution for Geometric Modeling*. New York, 2005. 271–283
- 9 Xu F, Zheng H C, Peng G H, et al. Decomposition and reconstruction of freedom curve based on reverse subdivision schem. *App Res Comput*, 2011, 28: 356–359 [徐丰, 郑红婵, 彭国华, 等. 基于逆细分的自由曲线分解与重建. *计算机应用研究*, 2011, 28: 356–359]
- 10 Bartels R, Samavati F. Reverse subdivision rules: local linear conditions and observations on inner products. *J Comput Appl Math*, 2000, 119: 29–67

- 11 Olsen L, Samavati F, Bartels R H. Multiresolution for curves and surfaces based on constraining wavelets. *Comput Graph*, 2007, 31: 449–462
- 12 Sadeghi J, Samavati F. Smooth reverse subdivision. *Comput Graph*, 2009, 33: 217–225
- 13 Finkelstein A, Salesin D H. Multiresolution curves. In: Schweitzer D, Glassner A, Keeler M, eds. *Proceedings of the ACM Conference on Computer Graphics*. New York: ACM Press, 1994. 217–231
- 14 Gao X S. Wavelet analysis and reconstruction of NURBS curves and surfaces. Ph.D. dissertation. Harbin: Harbin University of Science and Technology, 2009 [高晓爽. NURBS 曲线曲面的小波分解与重构. 博士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2009]
- 15 Li A M, Fang Z D. Mutiresolution geometric modeling for NURBS curves and surfaces. *J Comput-Aided Design Comput Graph*, 2010, 22: 1339–1343 [李爱民, 方宗德. NURBS 曲线曲面多分辨率几何建模. 计算机辅助设计与图形学学报, 2010, 22: 1339–1343]
- 16 Yang B S, Li Q Q, Gong J Y. Robust algorithm of creation and transmission of three-dimensional model multiresolution. *Chinese Sci Bull*, 2006, 51: 1589–1594 [杨必胜, 李清泉, 龚健雅. 一种快速生成和传输多分辨率三维模型的稳健算法. 科学通报, 2006, 51: 1589–1594]
- 17 He L X, Xu G, Wu C M. A method for reconstructing multi-resolution surface from scattered data points. *Comput Appl Softw*, 2010, 27: 257–260 [贺凌轩, 徐刚, 吴昌明. 一种散乱数据点的多分辨率曲面重构方法. 计算机应用, 2010, 27: 257–260]
- 18 Li S, Xian J. Biorthogonal wavelets created by vector subdivision equations. *Sci China Ser A-Math*, 2007, 37: 549–558 [李松, 洗军. 由向量细分方程生成的双正交多重小波. 中国科学, A 辑, 2007, 37: 549–558]
- 19 Wang H, Ma W. Biorthogonal wavelets based on interpolatory subdivision. *Comput Graph Forum*, 2009, 28: 1572–1585
- 20 Stollnitz E, Deroose T, Salesin D. Wavelets for computer graphics: a primer, part2. *IEEE Comput Graph Appl*, 1995, 15: 76–84

Multiresolution representation of freedom curves based on reverse B-spline of degree three subdivision scheme

GAO Min* & ZHENG HongChan

Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China

*E-mail: average03@126.com

Abstract The study of reverse subdivision mainly concentrates on the surfaces, and the study of reverse subdivision for the particular curve subdivision is relatively rare. Studies about the multiresolution representation and simplification of freedom curves based on reverse subdivision are also rare. According to the facts that the geometric meaning and the rules of B-spline of degree three are obvious and simple, we present the reverse B-spline of degree three subdivision rules, and on the basis of that we introduce a new method of multiresolution representation of freedom curves. By establishing the error vectors when decomposing the freedom curves and combining the B-spline of degree three subdivision rules, we can achieve decomposition and exact reconstruction of freedom curves. We offer examples of multiresolution representation, decomposition and reconstruction of freedom curves using our method. The presented method is easy to be programmed, and more obvious in geometrical meaning than some existing methods. The experiments suggest that the decomposed curves which are generated by our reverse rules can match the shape of the primary curves. The structure of decomposition and reconstruction filters is very brief, and the amount of computations of decomposition and reconstruction of the curves using our method is less than that using some previous methods.

Keywords reverse subdivision, subdivision curves, multiresolution, decomposition and reconstruction



GAO Min was born in 1986. She is a Master's degree candidate at Northwestern Polytechnical University. Her research interests include Computer Graphics, etc.



ZHENG HongChan was born in 1971. She received the Ph.D. degree in applied mathematics from Northwestern Polytechnical University in 2006. She is a professor and M.S. supervisor at Northwestern Polytechnical University. Her research interests include Computer Graphics, etc.