

一种刚柔统一的并联机构构型综合方法

于靖军*, 李守忠, 裴旭, 毕树生, 宗光华

北京航空航天大学机器人研究所, 北京 100191

* E-mail: jjyu@buaa.edu.cn

收稿日期: 2010-01-20; 接受日期: 2011-01-24

国家自然科学基金资助项目(批准号: 50875008, 50905005)

摘要 刚、柔两类机构的构型综合问题一直是机构学领域的研究热点, 但统一构型综合的问题尚未提及及讨论. 基于对当前刚柔两类机构构型综合方法研究的现状分析, 指出了可统一实现刚柔机构构型综合的可行性, 并提出了一种以旋量系理论为理论框架, 基于数学、物理与机械模块分层映射的机构构型综合思想. 该方法的核心在于建立几何模块、运动(约束)模块与机械模块三者之间的映射关系, 优点在于简单、可视化. 基于所提出的模块分层映射方法, 通过实例初步验证了该方法对刚、柔两类机构构型综合的有效性, 为系统构筑可视化的刚柔机构统一构型综合(或概念设计)的算法及软件提供了理论支撑.

关键词
构型综合
柔性机构
并联机构
旋量系
模块

进入 21 世纪以来, 有关刚性机器人机构构型综合理论与方法的研究已成为国际机构学界的一个热点, 尤其体现在少自由度并联机构的构型综合. 经过不断完善, 逐渐形成了 3 种相对比较成熟的理论体系: 基于旋量系理论的方法、基于位移子群/子流形的方法和基于单开链的方法. 杨廷力教授对这 3 种方法进行了详细的分析和总结^[1], 这里不再赘述. 当前机构学界一致的看法是将旋量法作为约束构型综合理论, 而将基于位移子群/子流形的方法和基于单开链的方法视为运动构型综合理论; 而根据它们的瞬时性和连续性, 又将前者视为瞬时构型综合理论, 而后者为非瞬时构型综合理论. 总之, 由于 3 种方法的出发点不同, 所依赖的数学工具不同, 都以独立的理论体系著称, 因此视为 3 种不同的综合方法. 不过, 3 种方法中的共同点在于都有共同的数学工具来支撑, 那就是集合论, 其中旋量理论更为特殊些, 还遵守线性运算法则. 表 1 给出了 3 种方法的主要特点及共同点.

表 1 机构构型综合方法的基本思想和主要特点

Approach	Screw system theory	Displacement subgroup/submanifold	SOC theory
Structural elements	general kinematic pair screws	displacement subgroup/submanifold and their mechanical generators	kinematic modules
Common characteristics	1) Follow some rules of set theory 2) Invariance in geometry		

位移群/流形方法与单开链方法的关联: 位移群/流形方法由 Herve^[2]最先提出, 他给出了 12 种刚体位移子群及其对应的机械生成元, 由此组成的运动联接构成了具有非瞬时运动学及与机构运动位置无关特性的运动链. 而后发现此方法几何条件限制较强, 而综合出的机构类型相对有限, Angeles^[3], Li 和 Huang^[4, 5], Rico^[6], Meng 等人^[7]引入了位移子流形及其机械生成元, 从而大大丰富了机构类型. 单开链方法由杨廷力教授^[8-10]最先提出, 他定义了由运动副和若干尺度型组成的多个运动单元, 并基于集合论建立了相关运算法则. 此中发现: 两种方法关联性极为密切, 因为

前者中低维位移子群和位移子流形的机械生成元正好可以和后者的运动单元相互对应. 综合出的机构类型自然殊途同归. 从技术路线来看: 前者是从数学(Lie 群和位移流形)出发, 再考虑机械元素与之对应; 而后者正好相反, 先从机械元素(各种运动单元或模块)出发, 再引入数学工具(集合论)建立运算规则.

位移群/流形方法与旋量系方法的关联: 黄真教授最早系统性地将旋量系理论用于机构的构型综合^[11~14], 而后 Kong 和 Gosselin^[15], Fang 和 Tsai^[16]等学者相继从不同的角度出发(Kong 提出了虚拟链方法、Fang 给出了严谨的解析推演方法), 丰富和完善了此方法, 并逐渐将此方法体系化. Ball^[17]在其经典的旋量理论论著中给出了运动(副)与约束的互逆旋量系表达, 从而抓到了机构自由度构型综合的本质. 与位移群和流形方法的几何不变特性一样, 旋量系与其反旋量系之间的互逆关系也满足几何不变特性, 而它们之间的互逆关系可以通过线性代数甚至几何法得到, 使该综合方法变得更为简单、直观. 该方法的不如意之处在于由于综合得到的机构可能具有瞬时性, 因此还需给出非瞬时运动的条件或者进一步作瞬时性的判断. 事实上, 旋量系方法与位移群/流形方法也有着十分密切的联系. 数学上已经明确给出了 Lie 群和 Lie 代数之间的微分关系, 两者之间可以相互映射, 而位移群(规则流形)和旋量(系)之间也正好满足这样的关系. 从运动学角度, 前者代表位移, 而后者代表瞬时速度. 通过求一阶导数, 前者可以导出后者; 而基于指数映射和左不变移动特性, 后者又可以导出前者^[18, 19].

旋量系方法与单开链方法的关联: 两种看似无关的方法实际上拥有一个共同特性, 都是从运动副的轴线出发, 前者体现在运动副旋量(系)上, 而后者体现的是运动单元(也包括运动副本身). 本质上都是从机构学的角度出发, 而非将数学工具作为出发点.

从集合(通过每种综合方法得到的机构数量, 包括瞬时机构)的角度来考虑, 应满足如图 1 所示的关系.

总之, 从以上 3 种方法中所得到的共同启示是: 通过在机构元素与数学工具之间建立起有机的联系, 可以有效地利用数学工具系统完成对复杂机构的构型综合.

下面再来讨论一下柔性机构(这里主要指精密柔性机构)的构型综合问题.

柔性机构的构型综合与刚性机构有所不同. 当

前主要有 3 种系统化方法: 基于运动的等效刚体替代法(典型的为伪刚体法)、约束综合法以及基于能量等指标的拓扑综合法(见图 2).

传统意义上, 柔性机构的拓扑往往源于刚性机构的构型, 一种最为简单的方法便是采用替换法: 将原机构中的运动副分别用相对应的柔性铰链所替代. 目前许多柔性机构在概念设计时都采用这种方法. 反过来, 对该类机构的分析正好可以采用伪刚体模型(或等效刚体模型)法^[20]. 但该方法大大限制了柔性机构的构型种类, 毕竟刚是柔的一种特例; 另一方面, 复杂柔性机构尤其大行程机构的性能很难得到保证.

柔性机构拓扑综合法是一种基于集构型及尺度于一体的综合方法^[21~24]. 在设计过程中, 它需要的先知条件较少, 因此很多时候设计出来的机构难以加工和组装. 而且拓扑综合法一般用来设计平面机构, 很难实现多轴或空间运动.

柔性机构约束综合法的主要思想是基于 Maxwell 的自由度与对偶约束原理^[25], 通过柔性理想约束作为基本单元来实现柔性机构的设计. Blanding^[26]、Hale^[27]等人先后采用约束设计方法用于柔性机构的构型综合. 尤其, Blanding 提出了自由度线与约束线之间应遵循对偶准则(以后简称 Blanding 法则), 即系统的所有自由线都应与其所有约束线相交. 不过基于约束设计法需要长期的知识和经验积累, 难以上手.

例如如图 3 所示的刚体受到 5 条线约束(细线所

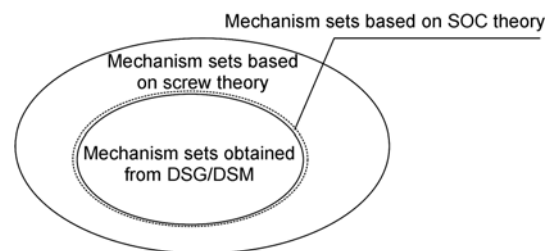


图 1 集合图示

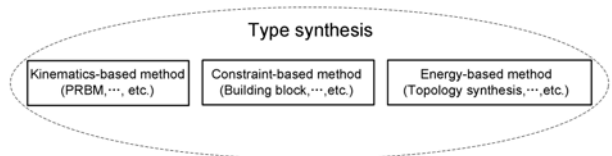


图 2 3 种构型综合方法

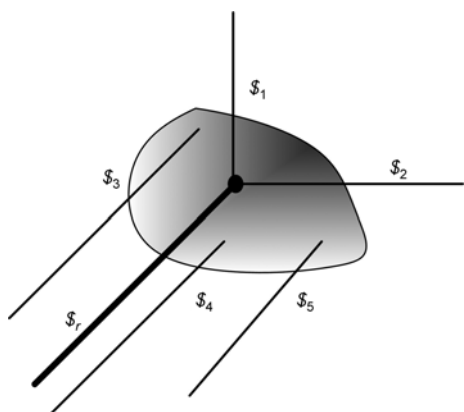


图3 应用 Blanding 法则进行机构的自由度分析

示)的作用, 根据 Blanding 法则很容易找到允许该刚体运动的一条转轴位置(粗线所示), 而且仅此一条. 该法则确实提供了一种非常简单实用的机构自由度分析方法. 但反过来如果将此法用于机构构型综合中就不那么容易了, 例如将此例反过来.

可以看到, 相对于刚性机构的构型综合, 柔性机构的构型综合要复杂得多. 因为后者要考虑的因素要远远多于前者. 尽管 Maxwell 的约束与自由度对偶原理仍然适用于柔性系统, 但由于产生运动的元机构(即柔性单元)远比刚性机构丰富, 这从自然界中所呈现的多种生物形态上可以充分反映出来. 因此说通过寻找一种有效的理论和方法, 来实现对刚性机构那样系统完全的型综合对柔性机构而言基本是不可能完成的任务. 尤其, 柔性机构的构型综合往往又和尺度综合、刚度综合密不可分. 目前柔性机构构型综合方面的研究基本反映了这一现实. 但不可否认的是, 数学作为一种强大的工具, 如果应用得当也可以有效地指导柔性机构的构型综合, 进而大大丰富柔性机构的机型. 问题的关键是能否找到这样合适的数学工具.

问题还不仅如此, 能否想象可以利用同一种工具或者方法同时实现刚柔两类机构的构型综合呢?

1 建立统一构型综合方法的可行性

目前, 数学中的图论、李群、旋量理论(李代数)等已在机构构型综合中得到普遍的应用. 图论提供了数学推演的符号表达, 但物理意义不明确; 而约束不是群, 因此不能应用群的概念. 最有可能的是旋量理论, 因为它可以很好地诠释自由度与约束之间的

对偶关系, 同时也能表征能量. 下面就具体讨论一下基于旋量理论实现刚柔两类机构构型综合的可行性.

在前面已经详细讨论了刚性机构构型综合的旋量法以及给出了与其他方法之间的有机联系. 旋量方法在刚性机构综合中表现的主要缺点是需要判断机构运动的瞬时性. 而对于柔性精微机构, 瞬时运动是完全可以接受的. 另外, Blanding 利用其所提出的法则实现了一类柔性机构(以单自由度线约束为单元的柔性机构)的构型综合问题. 而通过深入剖析 Blanding 法则可以发现: Blanding 法则完全可以从旋量理论中推演得到; 换句话说旋量理论可以作为其理论依据. 正基于此, Hopkins^[28]提出了利用自由度和约束拓扑(FACT)方法来综合多自由度并联柔性机构. 综合的过程如下: 首先根据应用需要确定机构的运动模式, 然后选择对应的自由度空间(FS), 根据对偶旋量系理论(自由度空间与约束空间(CS)构成线性无关的六维空间), 将其映射到约束空间, 接着在约束空间库中选择满足条件的甚至最优的约束配置, 最终以物理实体实现即可. 这种方法的优点在于物理含义清晰、过程简单, 在旋量理论的指导下, 得到的构型具有一定程度的完备性.

这样, 基于已有刚柔两种不同类型机构构型综合的成果, 我们很自然地考虑将旋量系理论作为理论基础来统一实现刚柔机构构型综合是可行的.

2 基于旋量系理论的模块分层映射法

旋量系理论提供了刚柔统一构型综合的理论可行性, 但还需要诸多技术层面的考虑. 例如刚性机构的构型综合过程中, 基于旋量理论综合得到的机构需要验证瞬时性, 而基于位移群/流形方法无需验证瞬时性, 而且后者的理论体系也较为成熟. 因此最好直接利用后者. 同时还注意到: 约束法设计得到的柔性机构总是与模块组合密切相关, 其约束设计的理念主要体现在对模块的各类约束上.

有鉴于此, 同时受 Merlet^[29]以及 Hopkins^[28]等人研究工作的启发, 这里提出一种建立在旋量系理论框架下的基于不同模块分层映射的刚柔机构统一构型综合方法. 具体首先从射影几何(包含线几何)出发, 基于旋量空间的概念构建一系列具有明确物理意义的几何模块(GBB), 此为数学层面的模块; 进而通过旋量系理论将其各自映射成运动模块(KBB)或约

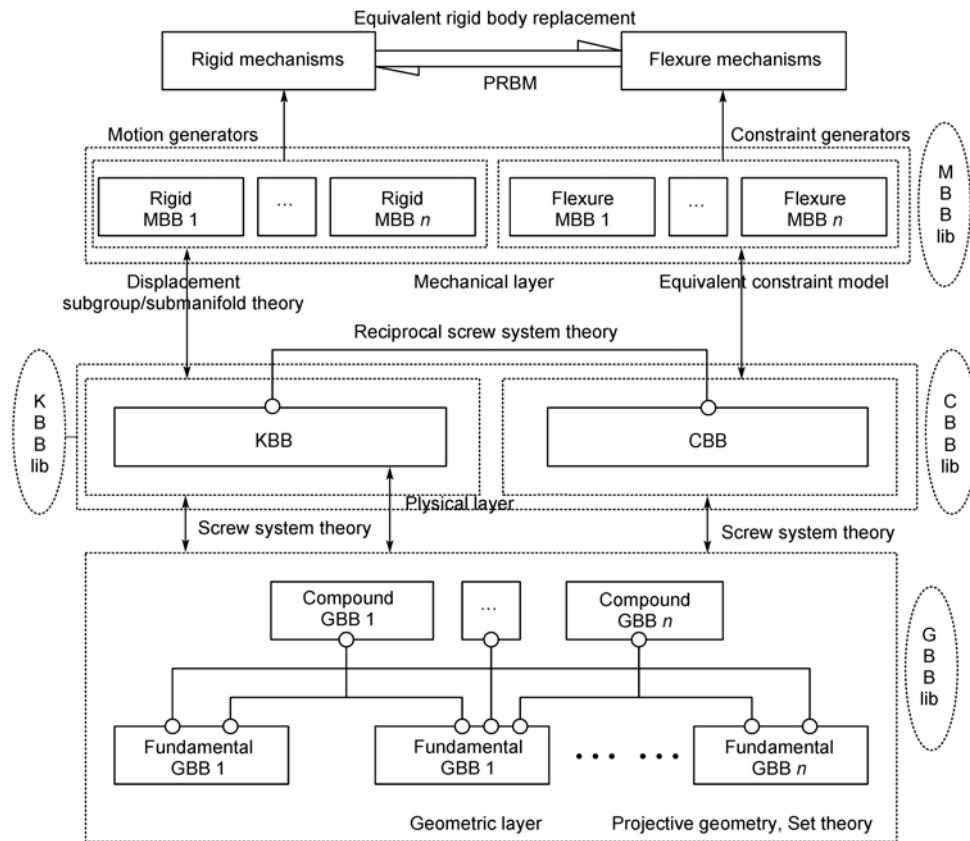


图 4 机构构型综合的模块分层法理论框架

束模块(CBB)，此为物理层面上的模块。由于运动与约束之间满足对偶关系，可以已知一方来确定另一方，即很容易建立起双方的映射；然后借用位移群/流形理论的做法(对柔性机构需建立柔性模块的等效约束或运动模型)，再将其映射成机械模块(MBB)，此为机械层面上的模块；最后基于集合论和某些特殊的几何约束完成基于机械模块组合的机构构型综合。

反映该构型综合方法的整体框架如图 4 所示。

1) 基于旋量系与旋量空间的概念构建几何模块

由于旋量系本质上是由 1~6 个旋量组成的线性集合，因此可以在其空间内定义若干能够形成特定维数的子集合。例如空间平行的所有线矢量构成一类三维子集(如图 5(a)所示)，空间汇交共点的所有线矢量构成另一类三维子集(如图 5(b)所示)，而平面汇交共点的所有线矢量则构成一类二维子集(如图 5(c)所示)，等等，依次类推。每类子集都构成特定维数的旋量空间，这里将每一类旋量空间称为几何模块。为充分利用集合运算法则，这里又将其分为基本型和

组合型两类，其中基本型限定在 1~3 维(如表 2 所示)，而组合型几何模块可通过两个或若干个基本型几何模块组合而成。本文为图示方便，暂不考虑一般旋量的情况。另外，为方便集合运算，表 2 还给出了基本型旋量空间的集合符号表达。

图 6 给出了基本型几何模块的分层结构框图。

对以上基本型几何模块(两两)枚举式求并(包括同类几何模块，也包括对满足某种特殊条件下的多个几何模块求并)，可以得到数以百计的组合型几何模块。通过这种方式可以得到各种类型的高维几何模块。

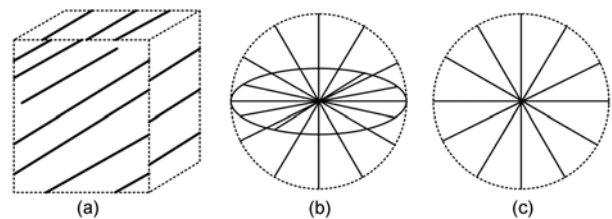
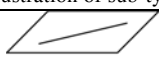
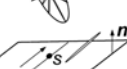
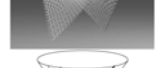
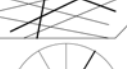


图 5 基本型几何模块

表 2 基本型几何模块

Dimension	Illustration of sub-type	Symbol representation
1		$R(N, u)$
		$P(s)$
		$U(N, n)$
2		$F_2(N, u, n) \ (u \cdot n = 0)$
		$N_2(u, v) \text{ or } N_2(n)$
		$T_2(n)$
		$C(N, s)$
		$N(n)$
		$N(u, v, w)$
3		$L(N, n)$
		$S(N)$
		$F(u)$
		T
		

例如: 由两平面二维平行基本型几何模块可组合成一个三维几何模块, 见图 7. 用集合符号表示

$$F_2(N, u, n) \cup F_2(N', u', n).$$

考虑到

$$F_2(N, u, n) \cap F_2(N', u', n) = P(n),$$

根据维数定理得到

$$\text{Dim}(F_2(N, u, n) \cup F_2(N', u', n)) = 3.$$

再如, 两平行基本型几何模块可组合成一个四维几何模块, 如图 8 所示.

2) 基于自由度空间与约束空间的概念建立运动模块(或约束模块)与几何模块之间的映射, 进而确定与每个几何模块相对应的运动模块(或约束模块)

由于旋量系和旋量空间都有明确的物理意义, 既可以表示运动也可以表示约束. 同样上述定义的几何模块也是如此. 每一类几何模块都既可以表示特定维数的自由度也可以表示特定维数的约束. 因此, 通过赋予每一类几何模块物理意义就可以将其映射为 Hopkins 所定义的自由度空间(对应运动模块)和约束空间(对应约束模块), 相应的几何模块同样可以映射为运动模块和约束模块.

这里以几何模块向运动模块映射为例. 图 9 给出了 1~3 维位移子群及其子流形的分层结构图示. 对比图 6 和图 9 发现如果建立合适的映射, 后者可以看作是前者的子集. 事实上, 如果赋予每个几何模块以物理意义, 例如表示瞬时运动(自由度), 则每一个几何模块都可以表示一个李代数(旋量或旋量系), 再通过指数映射可以与每一个位移子群或子流形相对应. 相应的, 位移子群与子流形之间的运算法则也完全可以适用, 详见文献[7]. 由此在几何模块与运动模块之间建立起了有机联系.

对由几何模块向约束模块映射同样如此, 这里不再赘述. 需要指出的是, 不像几何模块向运动模块(位移群/流形)映射那样, 约束模块中包含了图 6 所示所有的元素.

3) 基于运动与约束对偶原理(可由互逆旋量系理论导出)建立起运动模块与约束模块之间的映射关系, 可以利用纯几何图谱方式来表达

每一类运动模块实际上都有约束模块与之对应. 互逆旋量系理论完美地诠释了运动与约束之间的对偶关系, 并且得到了广泛的应用. 为实现两者之间的互求, 除了基于线性代数的解析推演法之外, 其几何不变量的特性更是使得包括 Blanding, Hale, Hopkins 等人在内的学者发展了一种几何计算方法. 例如根据 Blanding 法则很容易得到如图 10 所示的几何图谱. 其中粗线表示一维瞬时转轴或者一维线约束, 而细线分别表示五维瞬时线约束或者五维瞬时自由度.

总之, 总可以建立起任一运动模块与约束模块之间的一一对偶映射关系^[30]. 需要指出的是与几何模块一样, 运动模块与约束模块也有基本型和组合型两类, 就像位移子群和位移子流形那样.

4) 构造与运动模块(或约束模块)对应的机械模块(又称运动生成元或约束生成元), 并建立起二者之间的映射联系

机构最终要通过机械元素(运动副、杆件等)体现

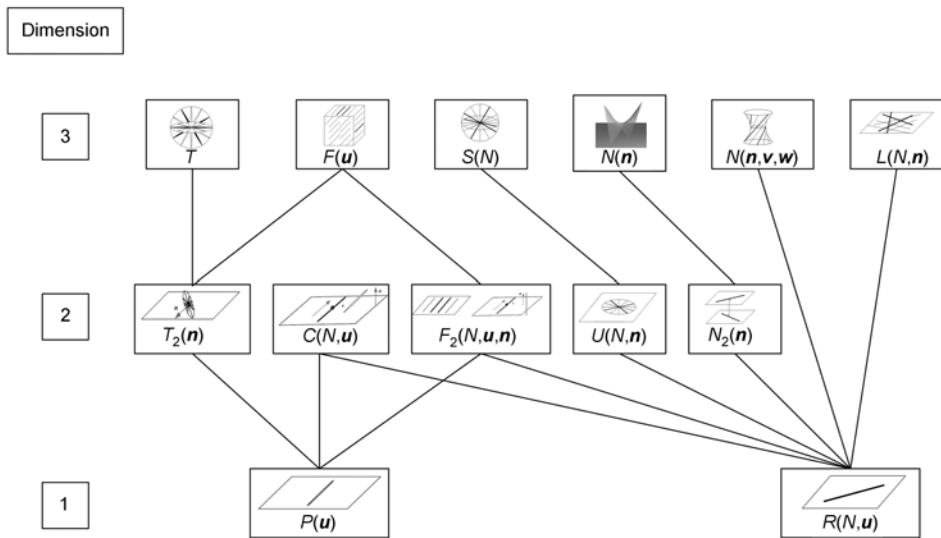


图 6 基本型几何模块结构分层图示

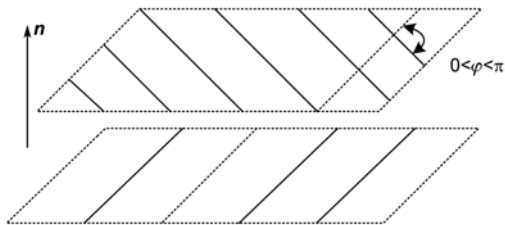
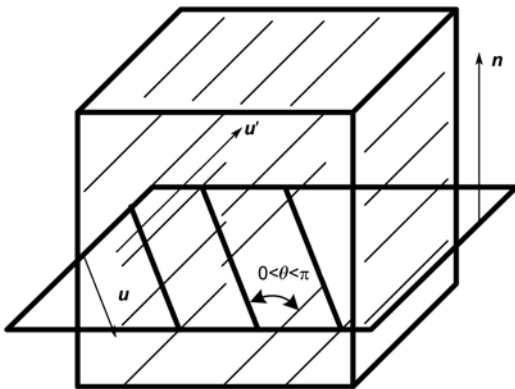
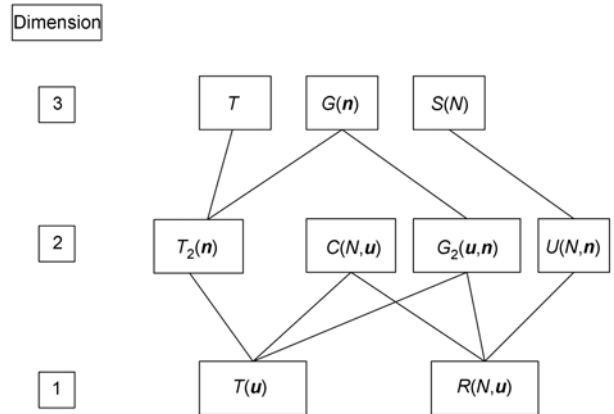
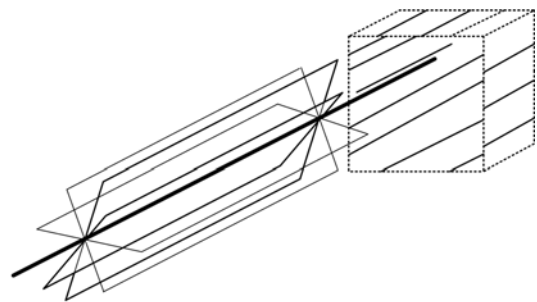
图 7 $F_2(N, u, n) \cup F_2(N', u', n)$ 图 8 $F(u) \cup F_2(N, v, n)$ 图 9 基本型位移子群与子流形^[7]

图 10 运动与约束对偶关系的几何图示

出来, 因此一个完整的机构构型综合过程必须考虑物理上的可实现性. 例如刚性机构中, 通常有转动副、球副、平面副等, 有时还可以通过机构来实现如等效球面机构、等效平面副机构等. 对柔性机构也是如此, 真正可以实施约束的机械模块比如板簧、柔性杆等. 总之需要构造与运动模块(或约束模块)对应的

机械模块(运动生成元或约束生成元), 并且要建立起二者之间的映射联系.

这样, 在几何模块、物理模块与机械模块之间就建立起了一个有机桥梁. 其中几何模块与物理模块

的映射是双射, 物理模块与机械模块的映射的单射(图 11 所示). 表 3 和图 12 分别给出了刚、柔两类机构构型综合中经常用到的最基本型机械模块.

需要注意的是, 机械模块往往与功能结合得很紧密. 这里的功能主要体现在特殊运动方面, 如传统意义上的直线运动机构(或直线导向机构)可以构成直线运动模块. 这样的话, 机械模块在有些情况下会以最基本机械模块的组合体形式出现, 如运动链(单开链、单闭链甚至并联或混联结构), 以至等效机构等.

显而易见的是, 同一运动模块(或约束模块)可以通过不同的机械模块来实现, 即存在不同机械模块的运动(或约束)等效性问题, 从而导致构型的多样性. 这也是进行构型综合的重要意义所在. 需要指出的是: 基于几何模块的集合本质特性, 利用集合间的等效运算是构造多种机械模块的有效途径.

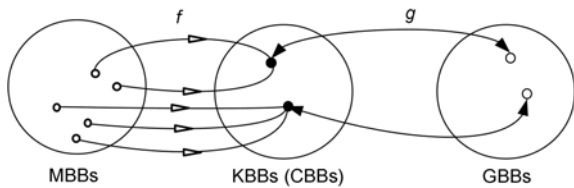


图 11 模块分层映射关系图

表 3 常见刚性运动副的类型及其代表符号^[31]

Type	Symbol	Illustration	Corresponding GBB
Revolute joint	R		$R(N, u)$
Prismatic joint	P		$P(u)$
Universal joint	U		$U(N, u, v)$
Cylindrical joint	C		$C(N, u)$
Planar joint	E		$L(N, n)$
Spherical joint	S		$S(N)$

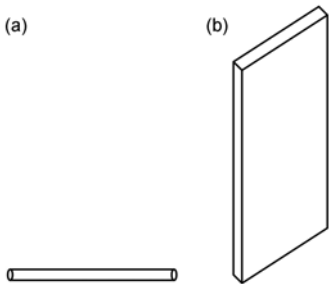


图 12 常见柔性基本约束模块的类型

(a) 细杆; (b) 板簧

例如, 通过集合运算可以得到以下一系列等式.

$$\begin{aligned} T \cup R(N, u) &= T_2(u) \cup C(N, u) \\ &= P(u) \cup F(u) \\ &= F_2(N, u, n) \cup C(M, u) \\ &= F_2(N, u, n) \cup T_2(n) \\ &= T \cup C(N, u) \\ &= T_2(n) \cup F(u) \\ &= F(u) \cup C(M, u) \\ &= F_2(N, u, n) \cup T \\ &= T \cup F(u). \end{aligned}$$

每个等号后面虽然可代表不同的机械模块, 但都可以实现同样效果的运动或约束.

5) 基于集合论(如群论、运动与对偶约束原理等), 通过模块之间的组合实现对刚(或柔)性机构的构型综合. 不过有时需要考虑组合过程中应遵循的特殊几何条件.

此过程通常与前面的几个步骤混杂在一起. 这里是为了突出模块化思想和集合论才人为分开的. 不过应该说明的是, 有时简单地利用集合运算是无法实现复杂机构的构型综合的. 必须考虑组合过程中应遵循的特殊几何条件, 而这需要具体问题具体分析.

至此给出了一种刚柔统一构型综合方法的整体框架. 下面就来通过具体实例来说明在此框架下实施两类机构的构型综合是完全可行的.

3 构型综合实例

3.1 柔性一维转动机构(或柔性转动副)的构型综合

在前面已经提到, 相对于刚性机构的构型综合, 柔性机构的构型综合要复杂得多. 通过寻找一种有

效的理论和方法, 来实现对刚性机构那样系统完全的型综合对柔性机构而言基本是项不可能完成的任务. 因此本节的研究主要偏重于对这一问题的探索和尝试. 具体基于上节所给的模块分层方法, 探讨该方法的可实施性, 以期找到更多的柔性一维转动模块和机构, 为高性能的柔性机构(铰链)设计打下良好的物质基础. 相对刚性机构的有限运动而言, 由于柔性机构可以做瞬时运动. 这样根据图 1 所示, 其构型所选择的余地将比同类的刚性机构更为广泛.

1) 基本柔性单元的等效约束(或运动)模型(机械模块向物理模块的映射)

梁(Beam)是最基本的柔性单元, 因此它的性能令人关注. 这里主要关注简单的均质梁结构.

几个世纪前伯努利—欧拉就给出了均质悬臂梁结构的弹性力学模型及公式, 后人则利用旋量方法导出了同样的结果^[32].

这里直接给出均质悬臂梁相对其质心的柔性矩阵表达式(所建立的坐标系如图 13 所示).

$$C = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{12EI_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{12EI_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l}{EI_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{GI} \end{bmatrix},$$

式中, E 为柔性单元的弹性模量, G 为柔性单元的剪切模量, A 为截面积, I_x 为柔性单元 x 轴截面惯性矩, I_y 表示 y 轴截面惯性矩, I 表示截面极惯性矩.

下面考虑 3 种特殊情况.

a) 圆截面的细杆结构(杆长与直径比近似为 10:1), 其参数满足

$$A = \pi r^2, \quad I_x = I_y = \pi r^4/4, \quad I = I_x + I_y = \pi r^4/2,$$

$$\frac{c_x}{c_z} = \frac{c_y}{c_z} = \frac{l^3}{12EI_y} \bigg/ \frac{l}{EA} = \frac{1}{3} \left(\frac{l}{r} \right)^2 \doteq 150,$$

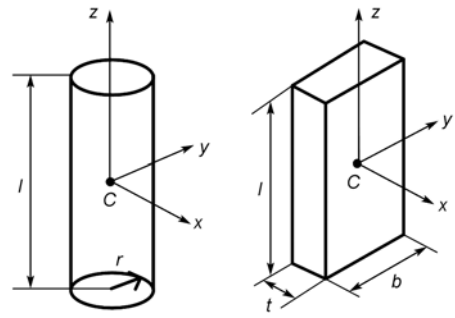


图 13 均质悬臂梁结构的弹性力学模型

$$\frac{c_{\theta_x} l^2}{c_z} = \frac{c_{\theta_y} l^2}{c_z} = \frac{c_{\theta_z} l^2}{c_z} \doteq 1000-2000.$$

因此, 圆截面的细杆结构的等效理想约束模型是线约束(z).

b) 矩形截面的薄板结构(长 l : 宽 b : 厚 t 比值近似为 100:60:1)——板簧, 其参数满足

$$A = tb, \quad I_x = tb^3/12, \quad I_y = bt^3/12,$$

$$I = I_x + I_y = tb(t^2 + b^2)/12,$$

$$\frac{c_x}{c_z} = \frac{l^3}{12EI_y} \bigg/ \frac{l}{EA} = \left(\frac{l}{t} \right)^2 \doteq 10000,$$

$$\frac{c_y}{c_z} = \frac{l^3}{12EI_x} \bigg/ \frac{l}{EA} = \left(\frac{l}{b} \right)^2 \doteq 3,$$

$$\frac{c_{\theta_y}}{c_{\theta_x}} = \left(\frac{b}{t} \right)^2 \doteq 3600, \quad \frac{c_{\theta_z}}{c_{\theta_x}} > 3600.$$

因此, 该矩形截面的薄板结构的等效理想约束模型是平面约束(y, z, θ_x).

c) 矩形截面的薄板结构(长 l : 宽 b : 厚 t 比值近似为 100:10:1)——板条, 其参数满足

$$A = tb, \quad I_x = tb^3/12, \quad I_y = bt^3/12,$$

$$I = I_x + I_y = tb(t^2 + b^2)/12,$$

$$\frac{c_x}{c_z} = \frac{l^3}{12EI_y} \bigg/ \frac{l}{EA} = \left(\frac{l}{t} \right)^2 \doteq 10000,$$

$$\frac{c_y}{c_z} = \frac{l^3}{12EI_x} \bigg/ \frac{l}{EA} = \left(\frac{l}{b} \right)^2 \doteq 100,$$

$$\frac{c_{\theta_y}}{c_{\theta_x}} = \left(\frac{b}{t} \right)^2 \doteq 100, \quad \frac{c_{\theta_z}}{c_{\theta_x}} > 100.$$

因此, 该矩形截面的薄板结构的等效理想约束模型是平面平行约束(z, θ_x).

基于以上讨论的结果, 表 4 总结了 3 种典型柔性模块对应的等效约束模型。

从柔度计算结果来看, 板簧完全可以看作是平面约束; 另一方面, 板簧也可以看作是由分布同一平面的无数多个细长杆组成, 每个细长杆都可以提供一个线约束, 如图 14 所示。根据约束空间理论, 平面内只要有 3 个不同轴、平行、共点汇交的线约束即可构成平面三维约束, 即约束整个平面, 其他约束均构成冗余约束。因此从线约束空间的角度来看, 板簧可以看作是无数个柔性杆组成的平面约束, 只是进行了柔度均质化(Elastic Average)。而板条则近似为平面二维平行线约束。

采用与前面类似的方法可以得到与其他类型柔性单元(机械模块)对应的等效自由度模型(物理模块), 具体如表 5 所示。

2) 现有柔性一维转动模块的分类综合

现有柔性一维转动模块多以柔性铰链或单自由度的柔性机构形式出现。但这些模块的最初提出多带有偶然性和发明者的奇思妙想。实际上通过前面所给出的模块化思想, 很容易将现有模块进行分类综合。

下面再来阐述一下该方法的思路。首先给出与柔性转动副(机械模块)对应的运动模块及约束模块,

表 4 3 种柔性模块对应的等效约束模型

Flexure element	Equivalent constraint model		GBBs
	illustration	dimension	
		1	$R(N, n)$
		2	$F_2(N, u, n)$
		3	$L(N, n)$

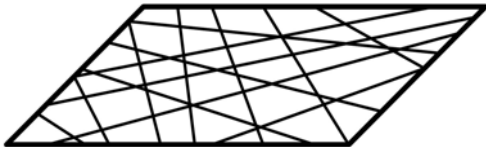


图 14 平面约束

表 5 3 种柔性模块对应的等效约束模型

Flexure element	Equivalent freedom model		GBBs
	illustration	dimension	
		3	$S(N)$
		5	$S(N) \cap S(N')$
		3	$S(N)$

并且运动模块与约束模块应满足对偶关系, 具体可通过 Blanding 法则求得(如图 10 所示, 粗线表示运动模块, 细线表示约束模块)。

根据图 10 可知, 五维约束空间中含有两种基本型三维约束(还包含更多的二维约束): 三维平面约束和三维空间平行约束。每种约束都可以分别映射成一种几何模块 $L(N, n)$ 和 $F(u)$, 其本质是集合。因此, 与五维约束空间对应的组合型几何模块可以基于基本型几何模块的组合来表达。具体利用集合交、并等运算法则可找到各种形式的等效约束模块。表 6 中给出了该五维约束空间中包含的部分等效约束模块。

a) 由两个板簧单元组成(每个板簧提供平面三维约束)的转动副: 包括车轮型、交叉簧片型等, 如图 15 所示。这种情况下, 满足表 6 中的类型 III。

b) 由 3 个或 3 个以上板簧单元组成(每个板簧提供平面三维约束)的转动副, 满足表 6 中的类型 IV, 此类型提供了冗余约束(见图 16)。

c) 由板条和板簧单元组成(每个板簧提供平面三维约束, 板条提供平面二维约束)的转动副, 满足表 6 中的类型 I 或 II, 如图 17 所示。理论上不提供冗余约束, 但为方便配置, 通常采用 2 个共面板条加 1 个板簧的组合配置, 这样可以提供冗余约束。

3) 柔性一维转动机构的新构型综合

到目前为止, 还没有发现含以细长杆结构(每个杆只提供一维线约束)作为柔性单元的柔性一维转动机构, 这主要可能是基于刚度或精度等方面的考虑。但考虑转动模块作为更为广泛的应用如转动机构等, 因此可以考虑基于细长杆单元(或者与板簧及板条的组合)来构建。这时可以产生更多种类的新的一维转动模块或机构。

表 7 给出了更多形式的等效约束模块, 其中的元

表 6 五维约束空间中包含的部分等效约束模块(I)

Pattern	Set A	Set B	$A \cap B$	Geometric conditions	Illustration
I	$F_2(N, \mathbf{u}, \mathbf{n})$	$L(N', \mathbf{n}')$	$\emptyset$	$\mathbf{n} = \mathbf{n}'$ $\overline{NN'} \cdot \mathbf{n} \neq 0$	
II	$F_2(N, \mathbf{u}, \mathbf{n})$	$L(N', \mathbf{n}')$	$\emptyset$	$\mathbf{n} \neq \mathbf{n}'$ $\mathbf{u} \neq \mathbf{n} \times \mathbf{n}'$	
III	$L(N, \mathbf{n})$	$L(N', \mathbf{n}')$	$R(N, \mathbf{u}) \quad (\mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{n}')$	$\mathbf{n} \neq \mathbf{n}'$ $\overline{NN'} \cdot \mathbf{n} \neq 0$	
IV	$L(N, \mathbf{n})$	$L(N', \mathbf{n}') \cup L(N'', \mathbf{n}'') \cup \dots$	$R(N, \overline{NN'})$	$\mathbf{n} \neq \mathbf{n}' \neq \mathbf{n}'' \neq \dots$ NN' is the common intersection line	

表 7 五维约束空间中包含的部分等效约束模块(II)

Pattern	Set A	Set B	$A \cap B$	Geometric conditions	Illustration
I	$F_2(N, \mathbf{u}, \mathbf{n})$	$F(\mathbf{u}')$	$\emptyset$	$\mathbf{u} \neq \mathbf{u}'$ $\mathbf{u} \times \mathbf{u}' \neq \mathbf{n}$	
II	$U(N, \mathbf{n})$	$F(\mathbf{u}')$	$\emptyset$	$\mathbf{u}' = \mathbf{n}$	
III	$F_2(N, \mathbf{u}, \mathbf{n})$	$S(N')$	$\emptyset$	$\overline{NN'} \cdot \mathbf{n} \neq 0$	
IV	$U(N, \mathbf{n})$	$L(N', \mathbf{n}')$	$\emptyset$	$\mathbf{n} \neq \mathbf{n}'$ $\overline{NN'} \cdot \mathbf{n} \neq 0$	
V	$U(N, \mathbf{n})$	$S(N')$	$\emptyset$	$N \neq N'$ $\overline{NN'} \cdot \mathbf{n} \neq 0$	
VI	$F(\mathbf{u})$	$S(N)$	$R(N, \mathbf{u})$		
VII	$F(\mathbf{u})$	$S(N) \cup S(N') \cup \dots$	$R(N, \mathbf{u})$		
VIII	$S(N)$	$S(N')$	$R(N, \overline{NN'})$	$N \neq N'$	
IX	$S(N)$	$S(N') \cup S(N'') \cup \dots$	$R(N, \overline{NN'})$	$NN'N'' \dots$ are collinear	

素都可以表示成线约束的形式.

下面举一个简单例子, 来说明整个构型综合的过程.

a) 第 1 步, 设计一维转动机构输出件的形状, 同时确定转动轴线的位置, 见图 18.

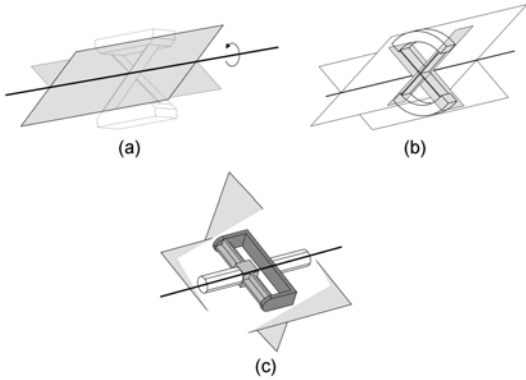


图 15 $L(N, n) \cup L(N', n')$ ^[33]

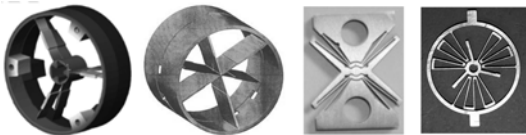


图 16 $L(N, n) \cup L(N', n') \cup L(N'', n'') \cup \dots$



图 17 $F_2(N, u, n) \cup L(N', n')$

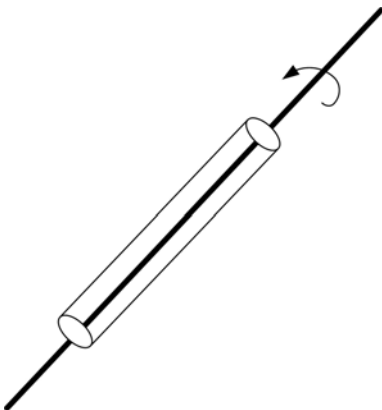


图 18 VCM 轴线的位置

b) 第 2 步, 在表 6 中为转动机构选择合适的约束空间. 从表 7 中的 9 种选择一种集合组合类型, 这里不妨选择类型 IV.

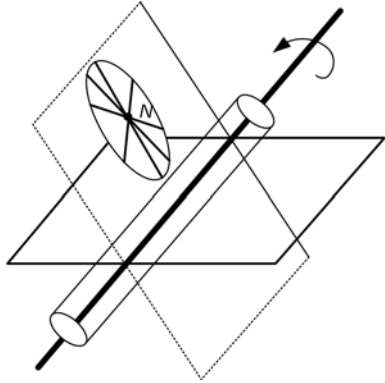


图 19 选择合适的约束空间

c) 第 3 步, 在约束空间内为机构选择合适的约束. 这里选用两种不同的约束类型, 在 $U(N, n)$ 空间内选择用线约束(物理模块对应细杆或细板条), 而在 $L(N, n)$ 空间内则选用平面约束(物理模块对应板簧), 如图 20 所示.

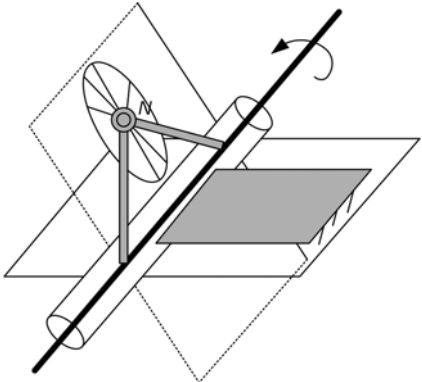


图 20 选择合适的物理约束

d) 第 4 步, 为机构配置冗余约束. 考虑到约束应尽可能分散和对称, 尤其考虑到线约束的刚性较差, 故对所有线约束均配置冗余约束, 具体如图 21 所示.

e) 第 5 步, 重复步骤 2~4, 综合出其他类型的柔性一维转动机构, 部分如图 22 所示.

至此完成了新型柔性一维转动模块或机构的构型综合.

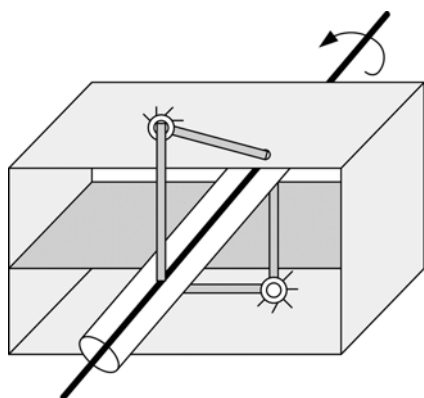


图 21 配置冗余约束

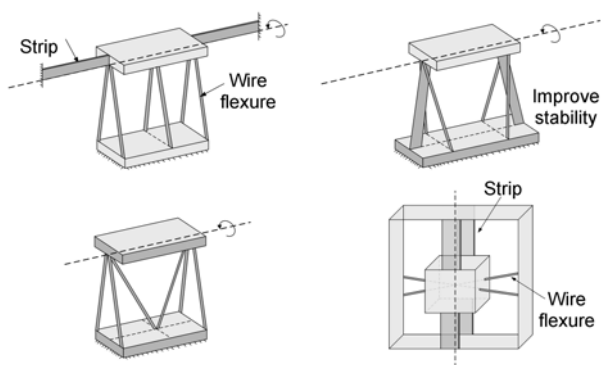


图 22 4 种新型柔性一维转动机构

3.2 刚、柔 3DOF(2R1T) 并联机构的构型综合

下面以 3DOF(2R1T) 并联机构为例, 给出刚柔两类机构构型综合的一般步骤。

a) 第 1 步, 根据机构的自由度特征确定该机构末端运动平台的自由度空间, 进而根据对偶性(利用几何法)确定其约束空间。

该类机构末端运动平台的自由度空间与约束空间如表 8 所示, 可以看出两个空间是相同的, 而且它们都与三维线约束空间 $L(N, n)$ 等效。

b) 第 2 步, 对约束空间进行分解, 即根据约束空间中各约束的分布特性为各支链合理配置约束, 从而得到每个支链的约束空间, 支链约束空间为平台约束空间的子空间。

表 8 2R1T 机构的自由度约束空间

Freedom space	Constraint space	symbol
		$L(N, n)$

如果只考虑该机构中有 3 个支链分布和非过约束的情况, 则每个支链中都只受 1 条约束线作用, 且它们总是分布在同一平面内(但彼此之间不能共线、共点、平行)。

c) 第 3 步, 然后再通过自由度与约束对偶原理求得与支链约束空间对偶的自由度空间。

由于每条支链所受的约束都是一维直线, 因此与其对偶的自由度空间(包含运动副信息)中的各元素特征都是一样的。具体如图 23 所示。

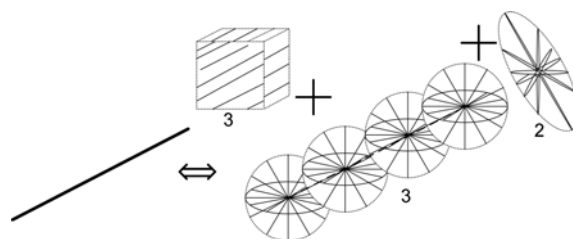


图 23 一维线空间及其对偶空间

对比图 23 与图 10 发现, 前者增加了一个二维偶量子空间。实际上两者是完全等效的。另外该例子与前面柔性机构的例子在空间分布上完全一致(只是自由度空间与约束空间相互颠倒), 因此表 6 和表 7 所示的图谱对此例仍然有效, 此外为更有效地配置运动副, 还可考虑有偶量元素存在的情况。

d) 第 4 步, 根据本文前面的几何、物理与机械模块相互映射的原则在支链自由度空间内选择合适的运动副配置。

如图 23 或表 7 所示, 如果选用 3 种不同的运动副类型, 我们可以很容易地配置出支链的运动副分布。可选择的支链结构包括 PPS(两个 P 副不能平行)、RPS(R 副与 P 副不能平行)、RRS(两个 R 副必须平行)、PCU 等, 并且运动副之间没有顺序的限制。这样可以综合出 [PP]S 类机构^[34]的全部类型, 如图 24 所示。

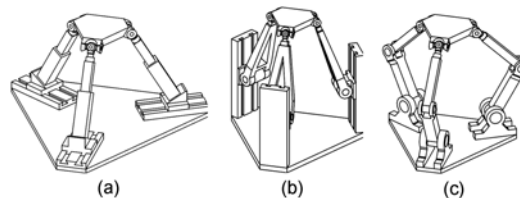


图 24 3 种 [PP]S 类刚性并联机构

(a) 3-PPS; (b) 3-PRS; (c) 3-RRS

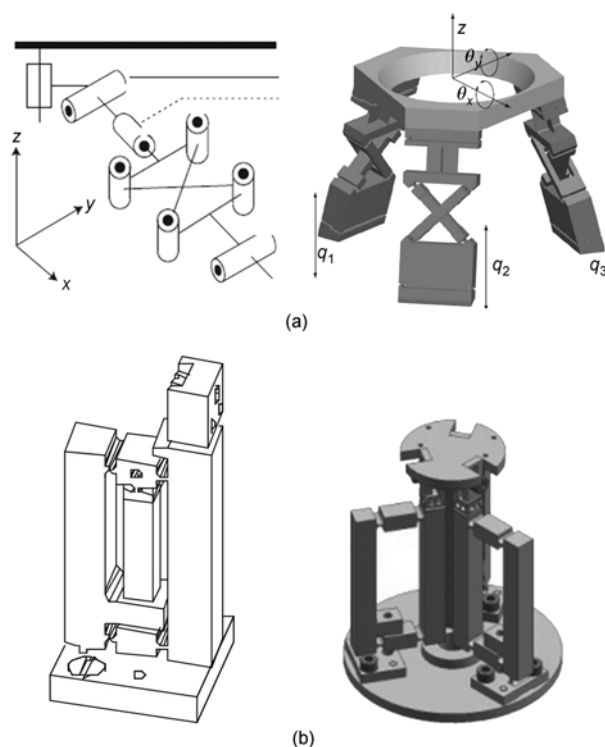


图 25 2 种[PP]S 类柔性并联机构
(a) 3-PRS (Pham^[35]); (b) 3-RPS (Chao^[36])

采用等效刚体替换法(即用柔性铰链代替刚性铰链)可以得到相应的柔性并联机构. 例如图 25 所示的 3-RPS 和 3-PRS 机构.

4 结论

基于对当前刚柔两类机构构型综合方法研究的现状分析, 指出了可统一实现刚柔机构构型综合的可行性, 并提出了一种以旋量理论为理论框架, 基于数学、物理与机械三类模块分层映射的机构构型综合思想. 该方法的核心在于建立几何模块、运动(约束)

模块与机械模块三者之间的映射关系. 其优点在于简单、可视化.

基于所提出的模块分层映射方法, 通过实例验证了该方法对刚、柔两类机构构型综合的有效性. 在柔性机构的实例综合中, 首先对现有柔性一维转动模块从等效约束的角度进行了分类归纳与分析, 为构型创新提供了新的思路; 然后以一种柔性转动机构的构型综合为例, 详细给出了模块分层映射法进行并联式柔性机构构型综合的具体过程. 刚柔机构的统一综合则以一类应用甚广的 $2R1T$ 并联机构为例, 利用本文所给的模块法得到了[PP]S 类并联机构的全部构型.

参考文献

- 1 Yang T L, Liu A X, Luo Y F, et al. Comparison study on three approaches for type synthesis of robot mechanisms. Proceedings of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences, San Diego, California, USA, MECH-86107, 2009
- 2 Hervé J M. Analyses structurelle des mecanismes par groupe des replacements. Mech Mach Theory, 1978, 13: 437–450
- 3 Angeles J. The qualitative synthesis of parallel manipulators. ASME J Mech Design, 2004, 126(3): 617–623
- 4 Li Q C, Huang Z, Hervé J M. Type synthesis of 3R2T 5-DOF parallel mechanisms using the Lie group of displacements. IEEE Trans Rob Autom, 2004, 20: 173–180
- 5 Li Q C, Huang Z, Hervé J M. Displacement manifold method for type synthesis of lower-mobility parallel mechanisms. Sci China Ser E-Tech Sci, 2004, 47(6): 641–650

- 6 Rico J M, Cervantes-Sanchez J J, Tadeo-Chavez A, et al. A Comprehensive theory of type synthesis of fully parallel platforms. Proc of ASME 2006 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, 2006, DETC2006-99070
- 7 Meng J, Liu G F, Li Z X. A geometric theory for synthesis and analysis of sub-6 DoF parallel manipulators. IEEE Trans Rob, 2007, 23(4): 625–649
- 8 Jin Q, Yang T L. Structure synthesis of parallel manipulators with three-dimensional translation and one dimensional rotation. Proc of the ASME Design Engineering Technical Conference, Montreal, Canada, MECH-34307, 2002
- 9 Jin Q, Yang T L. Theory for topology synthesis of parallel manipulators and its application to three-dimension-translation parallel manipulators. ASME J Mech Design, 2004, 126(4): 625–639
- 10 杨廷力. 机器人机构拓扑结构学. 北京: 机械工业出版社, 2004
- 11 Huang Z, Li Q C. On the type synthesis of lower-mobility parallel manipulators. Proceeding of the workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators, Quebec, Canada, 2002. 272–283
- 12 Huang Z, Li Q C. General Methodology for the type synthesis of lower-mobility symmetrical parallel manipulators and several novel manipulators. Int J Rob Res, 2002, 21(2): 131–145
- 13 Huang Z, Li Q C. Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using the constraint synthesis method. Intl J Rob Res, 2003, 22(1): 59–79
- 14 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学. 北京: 高等教育出版社, 2006
- 15 Kong X, Gosselin C M. Type Synthesis of Parallel Mechanisms. Heidelberg: Springer-Verlag, 2007
- 16 Fang Y F, Tsai L W. Structure synthesis of a class of 4-DoF and 5-DoF parallel manipulators with identical limb structures. Intl J Rob Res, 2002, 21(9): 799–810
- 17 Ball R S. The Theory of Screws. Cambridge: Cambridge University Press, 1998
- 18 Murray R, Li Z X, Sastry S. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation. Boca Raton: CRC Press, 1994
- 19 Selig J M. Geometrical Methods in Robotics. Heidelberg: Springer-Verlag, 1996
- 20 Howell L L. Compliant Mechanisms. New York: Wiley Interscience, 2001
- 21 Frecker M I, Ananthasuresh G K, Nishiwaki S, et al. Topological synthesis of compliant mechanisms using multi-criteria optimization. ASME J Mech Design, 1997, 119(2): 238–245
- 22 Hetrick J A, Kota S. An energy formulation for parametric size and shape optimization of compliant mechanisms. ASME J Mech Design, 1999, 121(2): 229–234
- 23 Wang M Y, Chen S, Wang X, et al. Design of multimaterial compliant mechanisms using level-set methods. ASME J Mech Design, 2005, 127(5): 941–956
- 24 Zhou H, Ting K L. Topological synthesis of compliant mechanisms using spanning tree theory. ASME J Mech Design, 2005, 127(4): 753–759
- 25 Maxwell J C, Niven W D. General Considerations Concerning Scientific Apparatus. New York: Courier Dover Publications, 1890
- 26 Blanding D L. Exact Constraint: Machine Design Using Kinematic Principle. New York: ASME Press, 1999
- 27 Hale L C. Principles and Techniques for Designing Precision Machines. Dissertation of Doctoral Degree. Cambridge MA: Massachusetts Institute of Technology, 1999
- 28 Hopkins J B. Design of Parallel Flexure System Via Freedom and Constraint Topologies (FACT). Master Thesis. Cambridge MA: Massachusetts Institute of Technology, 2007
- 29 Merlet J P. Singular configurations of parallel manipulators and Grassmann geometry. Int J Rob Res, 1989, 8(5): 45–56
- 30 Li S Z, Yu J J, Pei X, et al. Type synthesis principle and practice of flexure systems in the framework of screw theory part, iii: Numerations and type synthesis of flexure mechanism. 2010 ASME International Design Engineering Conference, Aug. 15–18, 2010, Montreal, Canada. New York: ASME, DETC2010-28963, 2010
- 31 于靖军. 机器人机构学的数学基础. 北京: 机械工业出版社, 2008
- 32 Selig J M, Ding X L. A screw theory of static beams. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Hawaii, USA, 2001. 312–317
- 33 Moon Y M, Trease B, Kota S. Design of large displacement compliant joints. Proceedings of DETC 2002, 27th Biannual Mechanisms and Robotics Conference, DETC2002/MECH-34207, 2002
- 34 Liu X J, Bonev I A. Orientation capability, error analysis, and dimensional optimization of two articulated tool heads with parallel kinematics. J Manuf Sci Eng-Trans ASME, 2008, 130(1): 011015
- 35 Pham P. Design of Hybrid-kinematic Mechanisms for Machine Tools. Dissertation of Doctoral Degree. Lausanne: Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2009
- 36 Chao D, Zong G, Liu R. Design of a 6-DOF compliant manipulator based on serial-parallel architecture. Proceeding of the 2005 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, Monterey, California, USA, 2005. 765–770