

关于 Banach 空间上对称乘积映射的不动点

设 X^n 为拓扑空间 X 的 n 次笛卡尔积, G 为 n 个元素的全置换群, 对 $g \in G, y = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$, 定义 $g(y) = (x_{g(1)}, x_{g(2)}, \dots, x_{g(n)})$; 则 G 可看作 X^n 上的一个同胚变换群, 称 X^n 在群 G 作用下的轨道空间 X^n/G 为 X 的 n 次对称乘积空间, 记作 $X^{(n)}$.

定义 1 映射 $F: X \rightarrow X^{(n)}$ 称为 X 上的 n 次对称乘积映射, 或简称为 n 映射; 记 $F(X) = \bigcup_{x \in X} F(x)$, 若 $\overline{F(X)}$ 为 $X^{(n)}$ 中紧集, 则称 F 为紧映射, 简记为 nA 映射. 对 X 上的 n 映射 F , 若有 $x \in X$, 使 x 为 $F(x)$ 中某一坐标, 则称 x 为 F 在 X 上的不动点.

Maxwell 于 1957 年首先对紧致多面体上的 n 映射定义了 Lefschetz 数, 并证明了关于紧致多面体上 n 映射的推广的 Lefschetz 定理; Masih 在 1973 年将上述结果推广到紧致 ANR 上. 我们在更广泛的一类空间上推广了 n 映射的 Lefschetz 数 $L(F)$ 的定义.

定义 2 若空间 X 上的任一 n 映射 (nA 映射) 的 Lefschetz 数均有定义, 且当 $L(F) \neq 0$ 时, F 有不动点, 则称 X 为 μ 空间 (μA 空间); 特别, 当空间 X 上任一 n 映射 (nA 映射) 恒有不动点时, 称 X 具有 n 映射 (nA 映射) 不动点性质.

定理 1 Banach 空间的任一开集是 μA 空间.

推论 1 紧致 ANR 是 μ 空间 (即 Masih 的结果).

推论 2 Banach 空间中任一紧凸集具有 n 映射不动点性质 (当 $n=1$ 时即经典的 Schauder 定理).

定理 2 设 X 为下列空间之一: (1) 无限维 Banach 空间 B ; (2) $S(B) = \{u \in B / \|u\| = 1\}$; (3) $D(B) = \{u \in B / \|u\| \leq 1\}$; (4) 空间 B 的一个零调的邻域收缩核. 设 $\{Y_r: r \in \Gamma\}$ (Γ 为指标集) 为 X 中具有下述性质的一个局部有限开集族: (i) 任二开集 $Y_r, Y_{r'}$ 不相交; (ii) 对 $\forall r \in \Gamma, \bar{Y}_r$ 同胚于 $D(E_r)$, 这里 E_r 为某无限维 Banach 空间, 设此同胚为 $h_r: D(E_r) \rightarrow \bar{Y}_r$, 则 h_r 把 $S(E_r)$ 同胚地映满 Y_r 在 X 中的边缘 $\bar{Y}_r = \bar{Y}_r / Y_r$; 记 $X_1 = X - \bigcup_{r \in \Gamma} Y_r$, 则 X_1 为 μA 空间, 且有 nA 映射不动点性质.

当 $n=1$ 时, 定理 1、2 分别为 Browder 关于单值映射不动点的相应结果.

陈大信
(浙江大学数学系)

关于非齐次线性椭圆型方程外部 Dirichlet 问题的一个注记

设 Ω 为 $R^n (n \geq 2)$ 中包含无穷远之一邻域的开区域, 有光滑的内部边界 $\partial\Omega$, 坐标原点不在 $\Omega \cup \partial\Omega$ 中. 考虑线性椭圆型方程的 Dirichlet 外问题:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \\ = f(x), \text{ 于 } \Omega \\ u(x) = \varphi(x), \text{ 于 } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

对 $\varphi \in C(\partial\Omega)$ 求函数 $u \in C^2$ 且满足 (1). 设 a_{ij}, b_i, c, f 在 $\Omega \cup \partial\Omega$ 之任一有界子集上 Hölder 连续;

$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0, \forall x \in \Omega \cup \partial\Omega, \xi \in R^n \setminus \{0\}; c(x) \leq 0, \forall x \in \Omega \cup \partial\Omega$. 记 $r = |x|, \Omega = \frac{1}{r^2} \sum_{i,j=1}^n x_i x_j, a = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_i x_i)$; 设常数 $M > 0$

使 $\partial\Omega \subset \{r < M\}$.

考虑 (1) 的问题 $I_1(x \rightarrow \infty \text{ 时 } u(x) \rightarrow l(l \in R))$ 和问题 $II(u \text{ 在 } \Omega \text{ 中有界})$ 的适定性 (可解性、唯一性).

对 $g(t) \in C([M, \infty))$ 定义 $g(t)$ -Dini 函数类 $\mathcal{D}(g(t)) = \left\{ \delta(t): [0, \infty) \rightarrow R \mid \int_M^\infty \frac{\delta(t)g(t)}{t} dt \text{ 存在且有界} \right\}$. 对实数 k 简记 $\mathcal{D}(t^k)$ 为 $\mathcal{D}(k)$. 记 $\mathcal{D}^+(g(t)) = \{\delta(t) \in \mathcal{D}(g(t)) \mid \delta(t) > 0, \forall t \in [M, \infty)\}$, $J_{\delta(t)}(t) = \exp\left\{-\int_M^t \frac{\delta(s)}{s} ds\right\}$.

我们证明了

定理 1 若 $a \leq k + \varepsilon(r), \frac{|f|}{Q} \leq \frac{\delta(r)}{r^2}$ 其中 k