AR- 箭图的构造和矩阵双模问题

献给刘绍学教授 90 华诞

张英伯

北京师范大学数学科学学院, 北京 100875

E-mail: zhangyb@bnu.edu.cn

收稿日期: 2017-10-20; 接受日期: 2018-06-20; 网络出版日期: 2018-10-25

国家自然科学基金 (批准号: 210100165) 资助项目

摘要 本文简要介绍了 Artin 代数表示理论中的下述内容: Auslander-Reiten 箭图 (简称 AR- 箭图) 稳定分支的结构, 野型遗传代数稳定分支的性质, 代数闭域上有限维代数 Λ 引出的矩阵双模问题、对偶的余双模问题及其相伴的具有余代数结构的双模 (简称 box), $\text{mod}\Lambda$ 、 $P_1(\Lambda)$ 及相伴 box 的表示范畴之间几乎可列序列的几乎一一对应, 驯顺代数 Λ 上任意两个模之间态射集的维数和性质; 最后介绍了代数的驯顺性与其模范畴的齐性.

关键词 AR- 箭图的稳定分支 代数的表示型 矩阵双模问题 box 约化

MSC (2010) 主题分类 15A21, 16G20, 16G60, 16G70

为了庆贺我的导师刘绍学先生 90 华诞, 谨将我从硕士、博士研究生期间以及在北京师范大学任教期间的研究论文给出一个综述, 作为向导师的汇报. 这些工作都是从考取先生的研究生开始的.

1 稳定分支的结构

在 Artin 代数的表示理论中, Auslander-Reiten 箭图 (简称 AR- 箭图) 是一个重要的概念, 它可以用图形和组合的方法刻画代数的模范畴.

在 20 世纪七八十年代, 对于有限表示型自入射代数的 AR- 箭图, Reidtmann^[1] 给出了很好的结果, 无限驯顺表示型代数 AR- 箭图稳定分支的刻画则由 Happel 等^[2] 给出. 而野型 Artin 代数模范畴的 AR- 箭图则鲜有结果.

20 世纪 80 年代末, 读书期间, 我的德国导师 Claus M. Ringel 将这个问题作为我的论文题目. 事实上, 这个问题是针对稳定赋值变换箭图进行讨论的. 下面对此问题做一个简要的介绍, 参见文献 [3].

英文引用格式: Zhang Y B. The structure of AR-quivers and matrix bimodule problems (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1651–1664, doi: 10.1360/N012017-00231

定义 1.1 一个箭图 $Q = (V, A, s, t)$ 由两个集合 V 和 A 及两个映射 $s, t: A \rightarrow V$ 构成, 其中 V 的元素称为箭图的顶点, A 的元素称为箭图的箭向. 如果 $\alpha \in A$, 则 $s(\alpha)$ 称作箭向 α 的始点, 而 $t(\alpha)$ 称作它的终点, 并记 $\alpha: s(\alpha) \rightarrow t(\alpha)$.

任取 $x \in V$, 用 x^+ 表示所有始于 x 的箭向的终点集; 用 x^- 表示所有终于 x 的箭向的始点集.

如果 $\forall x \in V$, 两个集合 x^+ 和 x^- 都是有限集, 那么称箭图 $Q = (V, A, s, t)$ 为局部有限的.

如果对于任意顶点对 $x, y \in V$, 最多只有一个从 x 到 y 的箭向, 那么称箭图 Q 没有重箭.

设 (V, A, s, t) 是一个没有重箭的箭图, 并且存在两个映射: $d, d': A \rightarrow \mathbb{Z}^+$, 则称 $\mathcal{Q} = (V, A, s, t, d, d')$ 是一个赋值箭图.

如果 $\forall \alpha \in A, d(\alpha) = 1 = d'(\alpha)$, 那么称 $\mathcal{Q}$ 带有平凡赋值. 我们可以将任意的箭图 Q 看作一个带有平凡赋值的箭图. 如果 $\alpha: x \mapsto y$, 我们有时记 $d_{xy} = d(\alpha), d'_{xy} = d'(\alpha)$.

设 $Q = (V, A, s, t)$ 是一个局部有限且没有重箭的箭图. 如果存在一一映射 $\tau: V \rightarrow V$, 满足下述条件: $\forall z \in V, \tau(z)^+ = z^-$, 那么称 $\bar{Q} = (V, A, s, t, \tau)$ 是一个稳定平移箭图.

注意, 在定义 1.1 中, 箭向可以取圈, 即始点和终点可以重合. 给定箭向 $\alpha: y \mapsto z$, 将 τ 确定的唯一箭向记作 $\sigma(\alpha): \tau(z) \mapsto y$.

定义 1.2 $\Omega = (V, A, s, t, \tau, d, d')$ 称为一个稳定平移赋值箭图, 如果 (V, A, s, t, d, d') 是赋值箭图, 而 (A, V, s, t, τ) 是稳定平移箭图, 并且 $\forall \alpha \in A, d(\alpha) = d'(\tau(\alpha)), d'(\alpha) = d(\tau(\alpha))$.

令 Ω 一个稳定平移赋值箭图, 如果 $V \neq \emptyset$, 而且 Ω 不能分解成两个稳定平移赋值箭图的不交并, 那么称 Ω 是连通的.

令 Ω 一个连通的稳定平移赋值箭图, $x \in V$. 如果存在正整数 t , 使得 $\tau^t(x) = x$, 则称 x 为循环的. 注意到, 如果 Ω 中有一个循环点, 那么所有的点都是循环的, Ω 也称作循环的, 否则称作非循环的 [2].

令 Ω 一个连通的稳定平移赋值箭图, 如果它的赋值是平凡的, 并且 $\forall x \in V, x^+$ 恰有两个点, 那么 Ω 称作光滑的.

连通稳定平移赋值箭图上的一个半加法函数 l 定义为

$$l: V \rightarrow \mathbb{Z}^+, \quad l(z) + l(\tau(z)) \geq \sum_{y \in z^-} d'_{yz} l(y), \quad \forall z \in V.$$

如果定义中的等号永远成立, 则称其为 Ω 上的加法函数.

给定一个赋值箭图 $\mathcal{S} = (V, A, s, t, d, d')$, 我们可以如下构造一个稳定平移赋值箭图 $\mathbb{Z}\mathcal{S}$: 令 $V_{\mathbb{Z}\mathcal{S}} = \mathbb{Z} \times V$, 如果 $\mathcal{S}$ 中有一个箭向 $\alpha: x \rightarrow y$, 那么对于任意的 $i \in \mathbb{Z}$, 定义箭向 $(i, \alpha): (i, x) \rightarrow (i, y)$ 并且 $\sigma(i, \alpha): (i-1, y) \rightarrow (i, x)$; 变换 τ 定义为 $\tau(i, x) = (i-1, x)$; 赋值定义为 $d_{\mathbb{Z}\mathcal{S}}(i, \alpha) = d(\alpha), d'_{\mathbb{Z}\mathcal{S}}(i, \alpha) = d'(\alpha)$ (参见文献 [1]).

定理 1.1 令 Ω 是一个非循环连通的稳定平移赋值箭图, 带有一个取值于非负整数集的非零半加法函数 l , 则 Ω 或者是光滑的, 且 l 是有界加法函数; 或者存在赋值箭图 $\mathcal{S}$, 使得 $\Omega = \mathbb{Z}\mathcal{S}$.

在定理中的第一种情形下, 稳定平移赋值箭图形如 Π_{st} , 其中 $-s < t < 0$. 这里叙述第二种情形 $\Omega = \mathbb{Z}\mathcal{S}$ 的一个重要性质.

设 Ω 是一个稳定平移赋值箭图, $n \in \mathbb{Z}^+$. Ω 中箭向集 $\{x | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n | y\}$ 称为一条始于 x 、终于 y 的路, 如果 $s(\alpha_1) = x, s(\alpha_i) = t(\alpha_{i-1}), \forall 2 \leq i \leq n, t(\alpha_n) = y$.

当 $x = y$ 时, 称之为循环路.

引理 1.1 令 $\mathcal{S}$ 是一个赋值图, 则 $\mathbb{Z}\mathcal{S}$ 中的任意循环路都是一个截面. 如果 $\mathcal{S}$ 中没有循环路, 那么 $\mathbb{Z}\mathcal{S}$ 中也没有循环路.

证明 取 $x, y \in V, i, j \in \mathbb{Z}$, 使得 $i > j$, 那么在 $\mathbb{Z}\mathcal{S}$ 中, 不存在从 (i, x) 到 (j, y) 的路. 所以, $\mathbb{Z}\mathcal{S}$ 的循环路中仅包含形如 (i, α) 的箭向, 其中 $\alpha \in A, i \in \mathbb{Z}$, 这只能是由 $\mathcal{S}$ 的循环路得到的截面. $\square$

推论 1.1 设 Ω 是 Artin 代数 Λ 的稳定模范畴的 AR- 箭图中一个非循环稳定分支, 则 $\Omega = \mathbb{Z}\mathcal{S}$, 其中 $\mathcal{S}$ 没有循环路, 于是, Ω 也没有循环路.

证明 注意到 Ω 是非循环的连通稳定赋值箭图^[2], 长度函数 l 是取值于正整数集的半加法函数. 这时 Ω 是代数 Λ 的 AR- 箭图的一个完全分支, 从而 l 是加法无界的. 根据 Auslander^[4] 的一个定理可知, Ω 不是有限的. 这表明存在某个赋值箭图 $\mathcal{S}$, 使得 $\Omega = \mathbb{Z}\mathcal{S}$.

因为 $\mathcal{S}$ 中的任意循环路都能够导出 Ω 的循环路, 根据 Batista 和 Smalø^[5] 的一个定理, 这是不可能的. 再根据引理 1.1, 得到最后一个论断. $\square$

Artin 代数稳定 AR- 箭图的结构已经被 Happel 等^[2] 确定. 特别地, 我们看到, Artin 代数 AR- 箭图的正则分支或者是稳定管, 或者形如 $\mathbb{Z}\mathcal{S}$, 其中 $\mathcal{S}$ 是一个赋值箭图.

2 野型遗传代数的 AR- 箭图

关于野型遗传代数 AR- 箭图稳定分支的性质, 参见文献 [6, 7].

令 Λ 是一个连通的基 (即 $\Lambda/\text{rad}(\Lambda)$ 是互不同构的单模的直和) 遗传 Artin 代数, 则 Λ 的中心是一个域 k , Λ 是 k 上的有限维代数. 我们来考察有限维左模范畴 $\text{mod}\Lambda$. 记 $P_1, \dots, P_n$ 是 Λ 上不可分解投射模的完全集, $I_1, \dots, I_n$ 是不可分解入射模的完全集. 设 $F_i = \text{End}_\Lambda(P_i) = \text{End}_\Lambda(I_i)$, $f_i = \dim_k(F_i)$, $F = \text{diag}(f_1, \dots, f_n)$ 是一个对角矩阵.

令 $C = (c_{ij})$ 是 Λ 的 Cartan 矩阵, 则 $c_{ij} = \dim_{F_i} \text{Hom}_\Lambda(P_i, P_j)$. 令 $B = (b_{ij})$ 使得

$$b_{ij} = \dim_{F_j} \text{Hom}_\Lambda(I_i, I_j),$$

因为 $\text{Hom}_\Lambda(P_i, P_j) \simeq \text{Hom}_\Lambda(I_i, I_j)$, 所以有 $FC = BF$. 如果 $M, N \in \text{mod}\Lambda$, 维数向量为 $\underline{m}$ 和 $\underline{n}$, 则可以定义 $K_0(\Lambda)$ 上的双线性函数:

$$\langle \underline{m}, \underline{n} \rangle = \dim_k(M, N) - \dim_k \text{Ext}_\Lambda^1(M, N).$$

设 $\phi = -C^{-1}B$ 是 Coxeter 变换, 则 $\langle \underline{m}\phi, \underline{n}\phi \rangle = \langle \underline{m}, \underline{n} \rangle$.

令 $\mathcal{Q} = (V, A, s, t, d, d')$ 是代数 Λ 的 Gabriel 箭图, 见定义 1.1 赋值箭图. $\forall i, j \in A$, 记 $d'_{ij} = d_{ji}$, 我们得到 Cartan 矩阵

$$C^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -d_{12} & \cdots & -d_{1n} \\ -d_{21} & 2 & \cdots & -d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_{n1} & -d_{n2} & \cdots & 2 \end{pmatrix}.$$

运用 Coxeter 函子和 Cartan 矩阵, 不难证明下述定理.

定理 2.1 野型遗传 Artin 代数的任意 AR- 分支的模被它们的合成因子唯一确定.

推论 2.1 在野型遗传 Artin 代数的任意一个 AR- 分支中, 维数不超过给定正整数 d 的模个数有限.

设 K 是 Artin 代数 Λ 的中心, 任取 $M \in \text{mod}\Lambda$, 记 $l(M)$ 为 M 的 K 长度. 基于对 Coxeter 变换特征值的计算, 我们给出下述定义.

定义 2.1 设 M 是一个 Λ 模, 称上极限 $\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \sqrt[s]{l(DTr^s M)}$ 为 M 的左生长数, 记作 ρ_M^L ; $\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \sqrt[s]{l(TrD^s M)}$ 为 M 的右生长数, 记作 ρ_M^R .

引理 2.1 令 Ω 是 Artin 代数 Λ 的 AR- 箭图中的一个稳定非循环分支, 则 $\rho_M^L = \rho_N^L, \rho_M^R = \rho_N^R$ 对任意 $M, N \in \Omega$ 成立.

定义 2.2 令 Ω 是 Artin 代数 Λ 的 AR- 箭图中的一个稳定非循环分支, $M \in \Omega$, 则 M 的左、右生长数, 也叫作分支 Ω 的左、右生长数, 分别记作 ρ_Ω^L 和 ρ_Ω^R .

定理 2.2 令 Ω 是 Artin 代数 Λ 的 AR- 箭图中的一个树无限的稳定非循环分支. 如果 Ω 的生长数

$$\rho_\Omega^L, \rho_\Omega^R < \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{108}}},$$

那么 Ω 形如 $\mathbb{Z}A_\infty, \mathbb{Z}A_\infty^\infty, \mathbb{Z}B_\infty, \mathbb{Z}C_\infty$ 或 $\mathbb{Z}D_\infty$.

3 矩阵双模问题及其具有余代数结构的双模

有限维代数的一些问题有时无法从代数本身找到答案, 如表示型问题, 这时需要转化成找到与之相关的其他代数结构. 本节的内容包含在文献 [8] 的前半部分中.

令 k 是一个代数闭域, Λ 是有限维基本 (basic) k - 代数, $J = \text{rad}(\Lambda)$ 是 Λ 的幂零根, 幂零指数为 m , 记 $\text{top}(\Lambda) = S = \Lambda/J$. 设 $\{e_1, \dots, e_h\}$ 是 Λ 的一个正交本原幂等元的完全集. 取向量空间 $e_i(J^l/J^{l+1})e_j$ 的一组 k - 基, 考虑基在典范投影 $J^l \rightarrow J^l/J^{l+1}$ 之下的原像, 并规定它们的高度为 l . 当取 $l = m, \dots, 1$ 时, 我们就得到了 J 的一组有序基 (参见文献 [9, 6.1]). 我们可以利用上述 Λ 的 k - 基:

$$(a_n, \dots, a_2, a_1, e_1, \dots, e_h)$$

构造代数 Λ 的一个左正则表示 $\bar{\Lambda}$. 如果规定幂等元的高度为 0, 基按照高度从大到小的顺序排列.

记 $t = n + h$, 即矩阵 $\bar{\Lambda}$ 的阶数, 或代数 Λ 的维数, 集合 $T = \{1, 2, \dots, t\}$. 另一个集合 $\mathcal{T} = \{X_1, \dots, X_h\}$ 是代数 Λ 顶点集的个数. 令

$$\mathcal{P}_1(\Lambda) = \{P \xrightarrow{\alpha} Q \mid P, Q \in \text{proj}(\Lambda), \alpha(P) \subseteq \text{rad}(Q)\}, \quad (3.1)$$

则 $\mathcal{P}_1(\Lambda)$ 构成一个范畴, 像元为映射模同态 α , 如果 $P' \xrightarrow{\beta} Q'$ 也是一个像元, 射元为模同态对 (f_1, f_2) , 使得 $f_2\alpha = \beta f_1$, 其中 $f_1: P \rightarrow P', f_2: Q \rightarrow Q'$.

这是一个与代数 Λ 相关的范畴, 是研究模范畴 $\text{mod}(\Lambda)$ 的有力工具. 为此, 我们来定义一般的概念: 矩阵双模问题.

令 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1$ 是一个顶点集, 其中子集 $\mathcal{T}_0$ 由平凡点构成, 即 $\forall X \in \mathcal{T}_0$, 存在一个 k - 代数 $R_X \simeq k$ 带有单位元 1_X . $\mathcal{T}_1$ 由非平凡点组成, 即 $\forall X \in \mathcal{T}_1$, 存在一个多项式环 $k[x]$ 的局部代数 $R_X \simeq k[x, \phi_X(x)^{-1}]$, 以 1_X 为单位元, 其中 x 称作属于 $X \in \mathcal{T}_1$ 的参数.

称 k - 代数 $R = \prod_{X \in \mathcal{T}} R_X$ 为 $\mathcal{T}$ 上的极小代数, 带有正交本原幂等元集 $\{1_X \mid X \in \mathcal{T}\}$, 且

$$1_R = \sum_{X \in \mathcal{T}} 1_X.$$

令 $\Delta_1 = R \otimes_k R$ 是一个 R - R -双模, 其左、右模作用分别为 $u \cdot (r_1 \otimes_k r_2) = (ur_1) \otimes_k r_2$ 和 $(r_1 \otimes_k r_2) \cdot u = r_1 \otimes_k (r_2 u)$, $\forall u \in R, r_1 \otimes_k r_2 \in \Delta_1$.

定义 3.1 Δ_1 在 R 上生成一个分次代数 $\Delta = T_R(\Delta_1)$:

$$\Delta = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Delta_p, \text{ 其中 } \Delta_0 = R, \quad \Delta_p = R^{\otimes(p+1)} = \underbrace{R \otimes_k \cdots \otimes_k R}_{p+1}, \quad \bar{\Delta} = \bigoplus_{p=1}^{\infty} \Delta_p.$$

代数的乘法运算为 $\forall \alpha = r_1 \otimes_k \cdots \otimes_k r_{p+1} \in \Delta_p, \beta = s_1 \otimes_k \cdots \otimes_k s_{q+1} \in \Delta_q$,

$$\alpha\beta = \alpha \otimes_R \beta = r_1 \otimes_k \cdots \otimes_k (r_{p+1}s_1) \otimes_k s_2 \cdots \otimes_k s_{q+1} \in \Delta_{p+q}.$$

令正整数集 $T = \{1, 2, \dots, t\}$, 顶点集 $\mathcal{T}$ 定义如上. 存在 T 的一个 $\mathcal{T}$ -划分, 及其划分映射:

$$b: T \rightarrow \mathcal{T}, \quad T = \bigsqcup_{X \in \mathcal{T}} T_X, \quad T_X = b^{-1}(X), \quad \forall X \in \mathcal{T}. \quad (3.2)$$

考虑 $\mathbb{M}_t(\Delta)$ 的子集:

$$\mathbb{M}_{(T, \mathcal{T})} = \bigoplus_{(X, Y) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}} \mathbb{M}_{XY}, \quad (3.3)$$

$$\mathbb{M}_{XY} = \{(g_{ij}) \mid g_{ij} \in 1_X \Delta 1_Y, \forall i \in T_X, j \in T_Y, \text{ 在其他情形下取 } 0\}.$$

$\mathbb{M}_{(T, \mathcal{T})}$ 是 $\mathbb{M}_t(\Delta)$ 的子代数, 使得 $\mathbb{M}_{XY} \mathbb{M}_{YZ} \subseteq \mathbb{M}_{XZ}$, $\mathbb{M}_{XY} \mathbb{M}_{Y'Z} = \{0\}$, $\forall Y \neq Y'$. 记 $\mathcal{E}_{ij} \in \mathbb{M}_t(\Delta)$ 为矩阵单位, 它在 (i, j) 位置的元素为 1_R , 其他为 0. 令

$$E_X = \sum_{i \in T_X} 1_X \mathcal{E}_{ii}, \quad E_I = \sum_{X \in \mathcal{T}} E_X, \quad (3.4)$$

则 $\{E_X \mid X \in \mathcal{T}\}$ 是代数 $\mathbb{M}_{(T, \mathcal{T})}$ 中本原幂等元的完全集, E_I 是恒等元.

定义 3.2 四元组 $\mathfrak{A} = (R, \mathcal{K}, \mathcal{M}, H)$ 称为 $(T, \mathcal{T})$ 上的一个矩阵双模问题, 如果

(i) R 是一个顶点集为 $\mathcal{T}$ 的极小代数;

(ii) $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \oplus \bar{\Delta} \cdot \mathcal{K}_1$, 其中 $\mathcal{K}_0 \simeq R$ 是对角矩阵代数; $\mathcal{K}_1$ 是严格上三角、拟自由 Δ_1 -双模, 带有一组拟自由基 $\mathcal{V} = \bigcup_{X, Y \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}} \mathcal{V}_{XY}$, 使得 $\forall V \in \mathcal{V}_{XY}, 1_X V 1_Y = V$, 并且 $\mathcal{K}$ 是 Δ 上的一个 $t \times t$ 上三角矩阵代数, 乘法由映射 $\mu_{11}: \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$ 诱导.

(iii) $\mathcal{M} = \bar{\Delta} \cdot \mathcal{M}_1$, 其中 $\mathcal{M}_1$ 是拟自由 Δ -双模, 带有一组平凡 (即矩阵元素取自基础域的) 正规化的拟自由基 $\mathcal{A} = \bigcup_{X, Y \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}} \mathcal{A}_{XY}$, 使得 $\forall A \in \mathcal{A}_{XY}, 1_A 1_Y = A$. 并且 $\mathcal{M}$ 是 Δ 上的一个 $t \times t$ 阶 $\mathcal{K}$ - $\mathcal{K}$ -矩阵双模, 左、右模运算分别由映射 $\rho_{11}: \mathcal{K}_1 \times \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ 和 $\tau_{11}: \mathcal{M}_1 \times \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ 诱导.

(iv) H 是 R 上的 $t \times t$ 矩阵, 它确定一个导子 $d: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M}$, 分别由映射 $d_0 = 0: \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{M}_0$ 和 $d_1: \mathcal{V}_i \mapsto \mathcal{V}_i H - H \mathcal{V}_i (\forall \mathcal{V}_i \in \mathcal{V})$ 所诱导.

现在来定义矩阵双模问题 $\mathfrak{A}$ 的表示范畴 $R(\mathfrak{A})$.

$(T, \mathcal{T})$ 上的非负整数向量 $\underline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_t)$ 称作一个尺寸向量, 如果当 $i, j \in T_X$ 时, $m_i = m_j$. 这时 $\underline{m}$ 确定了 $\mathcal{T}$ 上的一个维数向量 $\underline{d} = \{d_X = d_i \mid i \in T_X, \forall X \in \mathcal{T}\}$. 反之易见, 任意维数向量也唯一确定一个尺寸向量.

定义 3.3 (i) 设域 k 上的 Jordan 矩阵 $J(\lambda) = J_d(\lambda)^{e_d} \oplus J_{r-1}(\lambda)^{e_{r-1}} \oplus \cdots \oplus J_1(\lambda)^{e_1}$, 其中 e_i 是非负整数. 记 $m_j = e_r + e_{r-1} + \cdots + e_j, j = 1, \dots, r$, 则 k 上相似于 $J(\lambda)$ 的分块矩阵 $W(\lambda)$ 称为以 λ

为特征值的域 k 上的 Weyr 矩阵:

$$W(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda I_{m_1} & W_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \lambda I_{m_2} & W_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ & & \lambda I_{m_3} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & \lambda I_{m_{r-1}} & W_{r-1,r} \\ & & & & & \lambda I_{m_r} \end{pmatrix}_{r \times r},$$

其中 $W_{j,j+1} = (I_{m_{j+1}} 0)^T$ 是一个 $m_j \times m_{j+1}$ 长方阵, T 表示转置.

(ii) 具有不同特征值 λ_i 的 Weyr 矩阵的直和 $W = W(\lambda_1) \oplus W(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_s)$ 称作一个 k 上的 Weyr 矩阵.

(iii) 如果对于 $X \in \mathcal{T}_1$, $\phi_X(W)$ 在 k 上可逆, 那么 Weyr 矩阵 W 称为 R_X - 正则的. 对于 $X \in \mathcal{T}_0$, 恒等矩阵 $I = \text{diag}(1, \dots, 1)$ 也称为 R_X - 正则 Weyr 矩阵.

取定 $X \in \mathcal{T}$, $m_X \in \mathbb{Z}^+$, 以及 R_X - 正则 Weyr 矩阵 $W_X \in \mathbb{M}_{m_X}(k)$:

$$\varphi_{W_X} : R_X = k[x]_{\phi_X} \rightarrow \mathbb{M}_{m_X}(k), \quad h(x) \mapsto h(W_X) \quad (3.5)$$

是一个代数同态. 以下记作 “ $\cdot$ ” 的模作用都是由 φ 诱导的.

定义 3.4 设 $\mathfrak{A} = (R, \mathcal{K}, \mathcal{M}, H)$ 是矩阵双模问题, $\underline{m}$ 是 $(T, \mathcal{T})$ 上的尺寸向量. 如果存在 k 上的正则 Weyr 矩阵集 $\{W_X \in \mathbb{M}_{m_X}(k) \mid \forall X \in \mathcal{T}\}$ 和矩阵集 $\{M_i \in \mathbb{M}_{m_s(A_i) \times m_t(A_i)}(k) \mid i = 1, 2, \dots, m\}$, 那么称域 k 上的一个 $\underline{m} \times \underline{m}$ - 分块矩阵 $\bar{M}$ 为 $\mathfrak{A}$ 在 k 上的一个表示:

$$\bar{M} = \sum_{X \in \mathcal{T}} I_{m_X} \cdot H_X + \sum_{i=1}^m M_i \cdot A_i. \quad (3.6)$$

如果 $\bar{N} = \sum_{X \in \mathcal{T}} I_{n_X} \cdot H_X + \sum_{i=1}^m N_i \cdot A_i$ 是尺寸向量 $\underline{n} = (n_1, \dots, n_t)$ 的一个表示, 那么考察由 $f_X \in \mathbb{M}_{m_X \times n_X}(k)$ 和 $f_j \in \mathbb{M}_{m_s(V_j) \times n_t(V_j)}(k)$ 确定的 $\underline{m} \times \underline{n}$ - 矩阵:

$$\bar{f} = \sum_{X \in \mathcal{T}} f_X \cdot E_X + \sum_{j=1}^m f_j \cdot V_j. \quad (3.7)$$

不难定义两个同态的合成. 我们用符号 $R(\mathfrak{A})$ 记矩阵双模问题的表示范畴. 下述的余双模问题直到 box 的引出都是在文章构思和讨论的过程中由韩阳定义并证明的.

因为 $\mathcal{K}_1$ 和 $\mathcal{M}_1$ 都是拟自由 R - R - 双模, 我们可以分别构造它们的 $R \otimes_k R$ - 对偶结构 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{N}_1$, 带有 R - R - 拟基 $\mathcal{V}^*$ 和 $\mathcal{A}^*$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \text{Hom}_{R^{\otimes 2}}(\mathcal{K}_1, R^{\otimes 2}), \quad \mathcal{V}^* = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}, \\ \mathcal{N}_1 &= \text{Hom}_{R^{\otimes 2}}(\mathcal{M}_1, R^{\otimes 2}), \quad \mathcal{A}^* = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

记 $v : X \mapsto Y$ (相应地, $a : X \mapsto Y$), 如果 $V \in \mathcal{V}_{XY}$ (相应地, $A \in \mathcal{A}_{XY}$).

定义 3.5 设 $\mathfrak{A} = (R, \mathcal{K}, \mathcal{M}, H)$ 是一个矩阵双模问题, 四元组 $\mathfrak{C} = (R, \mathcal{C}, \mathcal{N}, \partial)$ 称为一个相伴于 $\mathfrak{A}$ 的余双模问题, 如果

- (i) R 是一个以 $\mathcal{T}$ 为顶点集的极小代数;
- (ii) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \oplus \Delta_1 \cdot \mathcal{C}_1$, 其中 $\mathcal{C}_0 = \text{Hom}_R(\mathcal{K}_0, R) \simeq R$, 带有与 $\mathcal{K}$ 对偶的余代数结构, 余乘由对偶映射 $\mu_{11} : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_1$ 确定;
- (iii) $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cdot \bar{\Delta}$, 带有与 $\mathcal{K}$ - $\mathcal{K}$ - 双模 $\mathcal{M}$ 对偶的余双模结构, 左、右余乘分别由 $\rho_{11} : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{N}_1$ 和 $\tau_{11} : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{C}_1$ 确定;
- (iv) $\underline{d} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ 是与导子 d 对偶的余导子, 由 $\underline{d}_0 = 0 : \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$ 和 $\underline{d}_1 : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1$ 确定.
- 现在将伴随于双模问题 $\mathfrak{A}$ 的余双模问题 $\mathfrak{C} = (R, \mathcal{C}, \mathcal{N}, \partial)$ 转化为更加易于表述和计算的另一种代数结构: box.

因为 $\mathcal{N}$ 是一个 R - R - 双模, 所以, $\mathcal{N}$ 在 R 上生成一个分次代数 $\Gamma = T_R(\mathcal{N})$:

$$\Gamma = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Gamma_p, \quad \text{其中 } \Gamma_0 = R, \quad \Gamma_p = \mathcal{N}^{\otimes p} = \mathcal{N} \otimes_R \cdots \otimes_R \mathcal{N}, \quad \forall p \geq 1.$$

定义一个 Γ - Γ - 双模 $\Xi = \Gamma \otimes_R \mathcal{C} \otimes_R \Gamma$, 带有一个由 $R \hookrightarrow \Gamma$ 诱导的余代数结构, 记作 $(\Xi, \mu_\Xi, \varepsilon_\Xi)$. 定义下述由左、右余模的余乘法及余导子给出的 R - R - 双模映射:

$$\begin{aligned} \kappa_1 : \mathcal{N} &\xrightarrow{\iota} \mathcal{C} \otimes_R \mathcal{N} \xrightarrow{\cong} R \otimes_R \mathcal{C} \otimes_R \mathcal{N} \hookrightarrow \Gamma \otimes_R \mathcal{C} \otimes_R \Gamma, \\ \kappa_2 : \mathcal{N} &\xrightarrow{\tau} \mathcal{N} \otimes_R \mathcal{C} \xrightarrow{\cong} \mathcal{N} \otimes_R \mathcal{C} \otimes_R R \hookrightarrow \Gamma \otimes_R \mathcal{C} \otimes_R \Gamma, \\ \kappa_3 : \mathcal{N} &\xrightarrow{\partial} \mathcal{C} \xrightarrow{\cong} R \otimes_R \mathcal{C} \otimes_R R \hookrightarrow \Gamma \otimes_R \mathcal{C} \otimes_R \Gamma. \end{aligned}$$

引理 3.1 $\Im(\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3)$ 是 Ξ 中的一个 Γ - 余理想. 于是, $\Omega := \Xi / \Im(\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3)$ 是带有余代数结构的 Γ - Γ - 双模.

回顾文献 [9, 10], 如上定义的 $\mathfrak{B} = (\Gamma, \Omega)$ 是一个 box, 带有层:

$$L = (R; \omega; a_1, a_2, \dots, a_n; v_1, v_2, \dots, v_m).$$

记 ε_Ω 和 μ_Ω 为诱导的余单位和余乘法, 则 $\bar{\Omega} = \ker \varepsilon_\Omega$ 是由 $v_1, v_2, \dots, v_m$ 自由生成的 Γ - Γ - 双模, 而双模的直和 $\Omega = \Gamma \oplus \bar{\Omega}$. 由此, 我们得到嵌入: $\mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{N} \otimes \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{N} \hookrightarrow \Gamma \otimes_R (\mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{N} \otimes \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{N}) \otimes_R \Gamma \subset \Omega$; 以及同构 $\bar{\Omega} \otimes_R \bar{\Omega} \simeq \bar{\Omega} \otimes_\Gamma \bar{\Omega}$.

类群映射 $\omega : R \rightarrow \Omega, 1_X \mapsto e_X$ 是 R - R - 双模射. 回顾文献 [9, 定义 3.3], 注意到在 Ω 中, $(\iota_0(a_i) + \iota_1(a_i)) - (\tau_0(a_i) + \tau_1(a_i)) + \underline{d}_1(a_i) = (\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3)(a_i) = 0$, ω 确定的微分为 $\delta_1 : \Gamma \rightarrow \bar{\Omega}$:

$$\begin{aligned} \delta_1(1_X) &= 1_X e_X - e_X 1_X = 0, \quad X \in \mathcal{T}, \\ \delta_1(a_i) &= a_i \otimes_R e_{t(a_i)} - e_{s(a_i)} \otimes_R a_i = \rho_{11}(a_i) - \tau_{11}(a_i) + \underline{d}(a_i), \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$\delta_2 : \bar{\Omega} \mapsto \bar{\Omega} \otimes_\Gamma \bar{\Omega}, \delta_2(v_j) = \mu_{11}(v_j), 1 \leq j \leq m$. 这时, box $\mathfrak{B}$ 称作伴随于矩阵双模问题 $\mathfrak{A}$ 的 box. 将矩阵双模问题及其伴随的 box 记作 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, 或者伴随对 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

特别地, 将 (3.1) 中定义的矩阵双模问题 $\mathcal{P}_1(\Lambda)$ 伴随的 box 称为 Drozd box.

分层 box $\mathfrak{B}$ 的表示是一个维数向量为 $\underline{d}$ 的左 Γ - 模 P :

$$\begin{aligned} \{P_X = k^{d_X} \mid X \in \mathcal{T}\}, \quad \{P(x) : P_X \rightarrow P_X \mid X \in \mathcal{T}\}, \\ \{P(a_i) : k^{d_{X_i}} \rightarrow k^{d_{Y_i}} \mid a_i : X_i \rightarrow Y_i, i = 1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

从表示 P 到 Q 的同态是一个 Γ - 映射 $f: \Omega \otimes_{\Gamma} P \rightarrow Q$. 显然,

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma}(\bar{\Omega} \otimes_{\Gamma} P, Q) \simeq \bigoplus_{j=1}^m \mathrm{Hom}_{\Gamma}(\Gamma 1_{s(v_j)} \otimes_k 1_{t(v_j)} P, Q) \simeq \bigoplus_{j=1}^m \mathrm{Hom}_k(1_{t(v_j)} P, 1_{s(v_j)} Q).$$

将映射写成

$$f = \{f_X; f(v_j) \mid X \in \mathcal{T}, 1 \leq j \leq m\}, \quad (3.11)$$

则文献 [11] 证明了 f 是同态, 当且仅当对于 $a_l \in \mathcal{A}^*, 1 \leq l \leq n$, 有

$$\begin{aligned} P(a_l)f_{Y_l} - f_{X_l}Q(a_l) &= \sum_{j < l, i} \eta_{ijl} \otimes_{R \otimes 3} (f(v_i) \otimes_R Q(a_j)) - \sum_{i < l, j} \sigma_{ijl} \otimes_{R \otimes 3} (P(a_i) \otimes_R f(v_j)) \\ &\quad + \sum_i \zeta_{il} \otimes_{R \otimes 2} f(v_i). \end{aligned} \quad (3.12)$$

运用 (3.12), 可以证明矩阵双模问题 $\mathfrak{A}$ 与伴随 box $\mathfrak{B}$ 的表示范畴是等价的, 即 $R(\mathfrak{A}) \simeq R(\mathfrak{B})$.

box 的最大优势在于存在几种称为约化的算法, 根据这些算法, box $\mathfrak{B}$ 可以约化成一个诱导 box $\mathfrak{B}'$, 并且存在一个表示范畴上的忠实满函子 $\vartheta: R(\mathfrak{B}') \rightarrow R(\mathfrak{B})$. 这使得我们能够从给定的 box 开始, 按照需要一步步地得到一系列诱导 box. 例如, Drozd 在 Tame Wild 定理的讨论中, 给出了野型 box 的两类条件, 并证明了任意不满足这些条件的 box, 对于每一个确定的维数 n , 都可以用约化方法得到有限多个极小 box, 于是可以断定原始的 box 是驯顺型的. 因而, 有限维代数可以划分为驯顺型和野型两大类型.

还有一些问题用 box 不易解决, 但回到产生 box 的矩阵双模问题反而可以保留原始代数更多的信息, 见第 6 节. 为此, 我们定义了矩阵双模问题的约化, 它与伴随 box 的约化一一对应.

本节最后给出一个例子, 说明如何从一个有限维代数得到对应的矩阵双模问题和 box.

例 3.1 ^[12, 13] 令 $Q = a \circlearrowleft \bullet \circlearrowright b$ 是一个箭图, $I = \langle a^2, ba - ab, ab^2, b^3 \rangle$ 是 kQ 的理想, 代数 $\Lambda = kQ/I$. 将元素 e, a 和 b 在 Λ 中的剩余类仍然记作 e, a 和 b . 并记 $c = b^2, d = ab$. 我们得到了 Λ 的一组有序 k -基 $\{d, c, b, a, e\}$, 对应的正则表示为 $\bar{\Lambda}$. 记 A, B, C 和 D 为 $\mathcal{M}_1$ 的 R - R -拟基, a, b, c 和 d 是 $\mathcal{N}_1$ 中的 R - R -对偶基.

我们有时将矩阵双模问题及其 box 的伴随对 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ 写成一个形式方程:

$$\begin{pmatrix} e & 0 & u_1 & u_2 & u_4 \\ & e & u_2 & 0 & u_3 \\ & & e & 0 & u_2 \\ & & & e & u_1 \\ & & & & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b & d \\ & 0 & b & 0 & c \\ & & 0 & 0 & b \\ & & & 0 & a \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b & d \\ & 0 & b & 0 & c \\ & & 0 & 0 & b \\ & & & 0 & a \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 & v_1 & v_2 & v_4 \\ & f & v_2 & 0 & v_3 \\ & & f & 0 & v_2 \\ & & & f & v_1 \\ & & & & f \end{pmatrix},$$

其中 $e = e_X, f = e_Y$. $\mathfrak{A}$ 的伴随 box $\mathfrak{B}$ 有一个分层: $L = (R; \omega; a, b, c, d; u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4)$. $\mathfrak{B}$ 中实箭 $\{a, b, c, d\}$ 的微分可以从形式方程中读出:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} X \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ a \quad b \quad c \quad d \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \bullet \text{---} Y \end{array} \end{array} \quad \begin{cases} \delta(a) = 0, \\ \delta(b) = 0, \\ \delta(c) = u_2b - bv_2, \\ \delta(d) = u_1b + u_2a - bv_1 - av_2. \end{cases}$$

4 几乎可列序列的对应

令 Λ 是代数闭域 k 上的有限维代数, 我们在 (3.1) 中定义了范畴 $\mathcal{P}_1(\Lambda)$. 将 Λ 的单模、投射模和入射模分别记作 S_i 、 P_i 和 I_i , $i = 1, \dots, h$. 进一步, 如果 S_i 不是入射的, 记 $N_i = DTr(S_i)$ 是 S_i 在 AR- 变换下的像.

定义 4.1 设 Λ 是域 k 上的有限维基代数, 使得 $\dim_k(\text{top}(\Lambda)) = h$.

(i) 下述 $2h$ 个 $\mathcal{P}_1(\Lambda)$ 中的像元称为 Ext- 投射的:

$$(0 \rightarrow P_i); \quad (P_i \xrightarrow{\alpha_{N_i}} P_j^{m_{ij}}), \quad i = 1, \dots, h,$$

其中第二式为模 N_i 的极小投射分解, 这里 $N_i = DTr(S_i)$ 是非入射单模 S_i 在 AR- 变换下的像; 或者是入射单模 S_i 自身的极小投射分解, 这时认为 $N_i = S_i$.

(ii) 下述 $2h$ 个 $\mathcal{P}_1(\Lambda)$ 中的像元称为 Ext- 入射的:

$$(P_i \rightarrow 0); \quad (P_j^{m_{ij}} \xrightarrow{\alpha_{S_i}} P_i), \quad i = 1, \dots, h,$$

其中第二式为模 S_i 的极小投射分解.

定义 4.2 $\mathcal{P}_1(\Lambda)$ 中的序列

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \xrightarrow{f_1} & W_1 & \xrightarrow{g_1} & Q_1 \\ \alpha \downarrow & & \gamma \downarrow & & \downarrow \beta \\ P_0 & \xrightarrow{f_0} & W_0 & \xrightarrow{g_0} & Q_0 \end{array}$$

称为几乎可裂的, 如果

- (i) $P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0$ 和 $Q_1 \xrightarrow{\beta} Q_0$ 都是不可分解的;
- (ii) $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- (iii) $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix}$ 是左极小几乎可裂映射, 而 $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_0 \end{pmatrix}$ 是右极小几乎可裂映射.

引理 4.1 令 Λ 是完全域 k 上的有限维代数, 则

(i) 任取 $\mathcal{P}_1(\Lambda)$ 中不可分解的非 Ext- 投射像元 $Q_1 \xrightarrow{\beta} Q_0$, 存在 $\mathcal{P}_1(\Lambda)$ 中的几乎可裂序列终于 $Q_1 \xrightarrow{\beta} Q_0$.

(ii) 任取 $\mathcal{P}_1(\Lambda)$ 中不可分解的非 Ext- 入射像元 $P_1 \xrightarrow{\beta} P_0$, 存在 $\mathcal{P}_1(\Lambda)$ 中的几乎可裂序列始于 $P_1 \xrightarrow{\beta} P_0$.

(iii) $\mathcal{P}_1(\Lambda)$ 中的任意几乎可裂序列都是正合的.

Zeng 和 Zhang^[14] 证明了下述定理.

定理 4.1 令 Λ 是完全域 k 上的有限维代数. 定义 4 个集合:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{\text{mod-}\Lambda \text{ 中始于非单模的几乎可裂序列}\}, \\ \mathcal{D} &= \{\mathcal{P}_1(\Lambda) \text{ 中终于 } \mathcal{P}_2(\Lambda) \text{ 像元的几乎可裂序列}\}, \\ \mathcal{B}_0 &= \{\text{中间项不包含入射直和项的 } \mathcal{B} \text{ 的子集}\}, \\ \mathcal{D}_0 &= \{\mathcal{P}_2(\Lambda) \text{ 中的几乎可裂序列}\}, \end{aligned}$$

则

- (i) $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{B}$ 精确到序列的等价是一一对应的;
- (ii) 在函子 $\text{Cok} : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{B}_0$ 的作用下, $\mathcal{B}_0$ 与 $\mathcal{D}_0$ 精确到序列的等价是一一对应的.

设 $\mathfrak{B}$ 是一个 box, 带有分层 $L = (R; \omega; a_1, \dots, a_n; v_1, \dots, v_m)$. 回顾 (3.11), $R(\mathfrak{B})$ 的态射 $f: M \rightarrow N$ 可以表示为 $f = \{f_X; f(v_j) \mid X \in \mathcal{T}, 1 \leq j \leq m\}$. 记 $f_0 = \{f_X \mid X \in \mathcal{T}\}: M \rightarrow N$ 是向量空间的映射.

定义 4.3 设 $\mathfrak{B}$ 是一个分层 box, 则可以在 $R(\mathfrak{B})$ 中定义下述概念:

- (i) 态射 $f: M \rightarrow N$ 称作真满 (相应地, 真单) 射, 如果 $f_0: M \rightarrow N$ 是满 (相应地, 单) 射.
- (ii) N (相应地, M) $\in R(\mathfrak{B})$ 称为真投 (相应地, 真入) 射的, 如果任意真满 (相应地, 真单) 射 $f: M \rightarrow N$ 是可裂的.
- (iii) 序列 $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ 称作真正合的, 如果序列 $0 \rightarrow M \xrightarrow{f_0} E \xrightarrow{g_0} N \rightarrow 0$ 作为极小代数 R 上的序列是正合的.
- (iv) 一个真正合序列 $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ 称为几乎可裂的, 如果 $M \xrightarrow{f} E$ 是左极小几乎可裂的; $E \xrightarrow{g} N$ 是右极小几乎可裂的.

定理 4.2 设 $\mathfrak{B}$ 是引理 3.1 中由矩阵双模问题 $\mathcal{P}_1(\Lambda)$ 的对偶基结构导出的 Drozd box, 则存在等价函子 $\Sigma: \mathcal{P}_1(\Lambda) \rightarrow R(\mathfrak{B})$, 使得

- (i) $\mathcal{P}_1(\Lambda)$ 的像元 M 是 Ext- 投 (相应地, 入) 射的, 当且仅当 $\Sigma(M)$ 在 $R(\mathfrak{B})$ 中是真投 (相应地, 入) 射的.
- (ii) (e) 是 $\mathcal{P}_1(\Lambda)$ 中的几乎可裂序列, 当且仅当 $\Sigma(e)$ 是 $R(\mathfrak{B})$ 中的几乎可裂序列.

根据定理 4.1 和 4.2 可以得知, 对于代数闭域 k 上的有限维基代数 Λ , 除掉有限多个等价类, $\text{mod}(\Lambda)$ 、 $\mathcal{P}_1(\Lambda)$ 和 $R(\mathfrak{B})$ 三个范畴中的几乎可裂序列精确到等价是一一对应的.

5 驯顺型代数的 Hom 空间

令 k 是代数闭域, Λ 是 k 上的有限维驯顺代数. 在 Λ 的有限维模范畴 $\text{mod}(\Lambda)$ 中, 对于每一个给定的正整数 d , 我们可以刻画几乎所有维数不超过 d 的不可分解 Λ - 模对的态射空间的结构, 并确定空间的维数.

回顾驯顺代数的定义: 代数 Λ 称为驯顺型的, 如果对于任意正整数 d , 都存在有限多个 Λ - $k[x]$ - 双模 $M_1, M_2, \dots, M_n$, 它们作为 $k[x]$ - 模是有限生成的, 使得对于任意维数不超过 d 的不可分解 Λ - 模 N , 都存在某个 $1 \leq i \leq n$, 以及元素 $\lambda \in k$, 使得 $N \simeq M_i \otimes_{k[x]} k[x]/(x - \lambda)$.

根据文献 [15], 对于每一个维数 d , 维数不超过 d 的任意 Λ - 模都可以被有限多个一般 Λ - 模的同构类所 “控制”, 见下面的定理 5.1(i). 人们自然会问, 那么这些模之间的态射集, 即 Hom 集, 是不是也能被这些一般模所控制呢? 回答是肯定的.

定义 5.1 一个左 Λ - 模 G 也可以看成是自同态环 $\text{End}_\Lambda(G)$ 上的左模. 我们将 G 作为 $\text{End}_\Lambda(G)$ 的长度, 称为 G 的自同态 (endo) 长度. G 称作一般模, 如果 G 是不可分解的, 在 k 上的维数无限, 但自同态长度有限.

设 G 是一般模, R 是 k 上有限生成的交换主理想整环, R 的分式域为 K . G 在 R 上的实现是一个有限生成的 Λ - R - 双模 T , 使得 $G \simeq T \otimes_R K$, 并且 $\dim_K(T \otimes_R K)$ 等于 G 的自同态长度.

作为一个例子, 我们来考虑由箭图 Q 确定的 Kronecker 代数 kQ , kQ 上的一般模 G 以及 G 在 $R = k[x]$ 上的实现 T :

$$Q: 1 \xrightleftharpoons[a]{a} 2, \quad G: k(x) \xrightleftharpoons[id]{x} k(x), \quad T: k[x] \xrightleftharpoons[id]{x} k[x].$$

我们用符号 $\Lambda\text{-Mod}$ 表示 Λ -模的全体, $\Lambda\text{-mod}$ 表示有限维模组成的 $\Lambda\text{-Mod}$ 的满子范畴, $\Lambda\text{-ind}$ 表示有限维不可约模组成的 $\Lambda\text{-mod}$ 的满子范畴.

根据文献 [15, 定理 6.2], 如果 Λ 是驯顺表示型的, 那么对于任意的一般 Λ -模 G , 都存在相对于某个极小代数 R 的在下述意义之下的优良实现:

定义 5.2 一般 Λ -模 G 在某个极小代数 R 上的实现称为优良实现, 如果

- (i) T 是自由 R -模;
- (ii) 存在函子 $T \otimes - : R\text{-Mod} \rightarrow \Lambda\text{-Mod}$, 保存同构类和不可分解性;
- (iii) 如果 $p \in R$ 是一个素元, $n \geq 1$, $(e_{p,n})$ 是正合序列:

$$0 \rightarrow R/(p^n) \xrightarrow{(p, \pi)} R/(p^{n+1}) \oplus R/(p^{n-1}) \xrightarrow{(\pi)} R/(p^n) \rightarrow 0,$$

其中 p 是嵌入, π 是典范投射, 那么 $T \otimes_R (e_{p,n})$ 是 $\text{mod-}\Lambda$ 中的几乎可裂序列.

根据文献 [15, 定理 4.6], 如果 G 是一般 Λ -模, 那么 $\text{End}_\Lambda(G) = k(x) \oplus \text{rad}(\text{End}_\Lambda(G))$ 是可裂的. 这一分裂诱导出来 G 的左 $\Lambda^{k(x)} = \Lambda \otimes_k k(x)$ -结构, 称之为允许结构.

Bautista 等 [16] 的目的是证明下述定理.

定理 5.1 令 Λ 是代数闭域 k 上的有限维代数; d 是一个正整数, 大于代数 Λ 在 k 上的维数, 则存在一般 Λ -模 $G_1, G_2, \dots, G_s$, 带有左 $\Lambda^{k(x)}$ -模允许结构, 以及在某些 R_i 上的良好实现 T_i , 其中 R_i 是 $k[x]$ 有限生成的局部化, $i = 1, 2, \dots, s$; 另一方面, 存在维数不超过 t 的 Λ -模 $L_1, L_2, \dots, L_t$, 满足下述性质:

- (i) 如果 M 是一个不可分解左 Λ -模, $\dim_k(M) \leq d$, 那么存在整数 $j \in \{1, \dots, t\}$, 使得 $M \simeq L_j$; 或者存在整数 $i \in \{1, \dots, s\}$, 使得对于某个素元 p 和正整数 m , 有 $M \simeq T_i \otimes_{R_i} R_i/(p^m)$.

特别地, 如果 M 是不可分解的投射模, 入射模或者单模, 那么 $M \simeq L_j$ 属于第一种情形.

- (ii) 如果 $M = T_i \otimes_{R_i} R_i/(p^m)$, $N = T_j \otimes_{R_j} R_j/(q^n)$, 此处 $i, j \in \{1, \dots, s\}$; m 和 n 是正整数; p 和 q 分别是 R_i 和 R_j 中的素元; $L_i^{k(x)} = L_i \otimes_k k(x)$, 那么,

$$\begin{aligned} \dim_k \text{rad}^\infty(\text{Hom}_\Lambda(M, N)) &= m \dim_{k(x)} \text{rad}(\text{Hom}_{\Lambda^{k(x)}}(G_i, G_j)), \\ \dim_k \text{rad}^\infty(\text{Hom}_\Lambda(L, M)) &= m \dim_{k(x)} \text{rad}(\text{Hom}_{\Lambda^{k(x)}}(L^{k(x)}, G_i)), \\ \dim_k \text{rad}^\infty(\text{Hom}_\Lambda(M, L)) &= m \dim_{k(x)} \text{rad}(\text{Hom}_{\Lambda^{k(x)}}(G_i, L^{k(x)})). \end{aligned}$$

- (iii) 如果 $i = j$ 并且 $p = q$, 那么,

$$\text{Hom}_\Lambda(M, N) \simeq \text{Hom}_{R_i}(R_i/(p^m), R_i/(p^n)) \oplus \text{rad}^\infty(\text{Hom}_\Lambda(M, N)).$$

如果 $i \neq j$ 或者 $p \neq q$, 那么,

$$\text{Hom}_\Lambda(M, N) \simeq \text{rad}^\infty(\text{Hom}_\Lambda(M, N)).$$

进一步,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_\Lambda(L_i, M) &\simeq \text{rad}^\infty(\text{Hom}_\Lambda(L_i, M)), \\ \text{Hom}_\Lambda(M, L_i) &\simeq \text{rad}^\infty(\text{Hom}_\Lambda(M, L_i)). \end{aligned}$$

定理的证明划分为几个步骤.

第 1 步 考虑 box 的约化. 给定一个 box $\mathfrak{B}$, 存在下述几种约化算法: 正则化、点的删除、解圈、边约化和局部化. 通过其中任意一种, 我们可以得到一个新的 box $\mathfrak{B}'$, 以及约化函子 $\theta: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$, 使得表示范畴之间的诱导函子 $\theta^*: R(\mathfrak{B}^*) \rightarrow R(\mathfrak{B})$ 是忠实满函子.

第 2 步 根据文献 [9, 12] 的结果, 给定一个维数 d , 驯顺型 box $\mathfrak{B}$ 可以通过一系列约化得到有限多个极小 box $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_s$ 以及诱导函子 $\theta_1^*, \dots, \theta_s^*$, 使得原 box $\mathfrak{B}$ 的任意一个维数不超过 d 的表示 $\bar{N} = \theta_i^*(M_i)$, 其中 $i \in \{1, \dots, s\}$. 极小 box 中的表示之间的态射可以用一般模之间的态射与两个表示之间的虚箭表达出来, 其中后者在无穷根中.

第 3 步 从给定的有限维代数 Λ 构造范畴 $P_1(\Lambda) = \{P \xrightarrow{\alpha} Q \mid P, Q \in \text{proj}(\Lambda), \alpha(P) \subseteq \text{rad}(Q)\}$, 见第 3 节开头. 将第 2 步的结果转化到 $\text{mod-}\Lambda$ 中.

6 模范畴的齐性与代数的驯顺性

在 20 世纪 80 年代后期, Crawley-Boevey^[9] 证明了下述定理: 设 Λ 是代数闭域 k 上的驯顺型有限维代数, 则对于每一个维数 d , 几乎所有 (除掉有限多个同构类) 维数不超过 d 的不可分解模 M 都是齐性的, 即 M 的 AR- 变换 $DTr(M) \simeq M$. 定理是通过 box 的语言给出证明的.

从此, 很多作者试图证明 Crawley-Boevey 定理的逆. 希望仍然用 box 的手段证明: 任何一个野型 box 都不是齐性的.

定义 6.1^[17] 令 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴.

(i) $\mathcal{E}$ 中的一个不可分解像元 M 称为齐性的, 如果存在 $\mathcal{E}$ 中的几乎可裂序列:

$$0 \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0;$$

(ii) 范畴 $\mathcal{E}$ 称为齐性的, 如果对于每一个维数 d , 几乎所有满足 $\dim_k(M) \leq d$ 的不可分解像元 (除有限多个同构类之外) 都是齐性的;

(iii) 范畴 $\mathcal{E}$ 称为强齐性的, 如果每一个维数有限的不可分解像元 M 都是齐性的.

出人预料的是, Zhang 等^[18] 给出了一个野型 box 的例子, 它的表示范畴是强齐性的.

例 6.1 令 $\mathfrak{B}$ 是一个局部 box, 极小代数 $R = k[x, \phi(x)^{-1}]$, 分层 $L = (R; \omega; a; v)$, 微分 $\delta(a) = xv - vx$:

那么表示范畴 $R(\mathfrak{B})$ 是强齐性的.

接着, Bautista 等^[19] 构造了一大类强齐性野型范畴, 特别地, 这种范畴包含例 6.1 中的 box.

定义 6.2 设 k 是一个域, Λ 是有限维 k - 代数. 定义单变元多项式环 $\mathfrak{R} = \Lambda[z]$, 其中变元 z 中心化 Λ . 令 $\mathcal{C}$ 是左 Λ - 模的一个子范畴, 其中的模作为 Λ - 模是有限维投射的.

引理 6.1 如果 Λ 是自入射的, 那么范畴 $\mathcal{C}$ 有几乎可裂序列.

例如, 取 $\Lambda = k$, $\mathfrak{R} = k[z]$ 是域上的多项式代数. 如果 k 是代数闭域, 那么 $\mathcal{C} = \text{mod-}\mathfrak{R}$ 是强齐性的, 这是平凡的典型驯顺型代数.

一个最简单的非平凡例子是, 取 $\Lambda = k[a]/(a^2)$, $\mathfrak{R} = \Lambda[z]$, 这时 $\mathcal{C}$ 是强齐性的.

定理 6.1 令 $\mathfrak{A} = \Lambda[z]$, $\mathcal{C}$ 是定义 6.2 给出的范畴. 如果 Λ 是自入射对称代数, 则 $\mathcal{C}$ 是强齐性的.

上述反例表明, Crawley-Boevey 定理的逆不能用 box 的方法去证明, 必须另辟蹊径. 尽管 box 的约化简单易行, 但是在约化的过程中, 有很多信息未能保存下来.

在这种情形下, Zhang 和 Xu^[8] 返回到原始的矩阵双模问题.

例 6.2 事实上, 从例 3.1 给出的代数所对应的 box 出发, 做一系列约化: $a \mapsto (1)$, $b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, c 和 d 分别变成了 2 阶方阵 $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$. 令 $c_{21} \mapsto (x)$, 然后做三次正则化, 得到 $c_{22} \mapsto \emptyset$, $u_{21}^2 = xv$; $c_{11} \mapsto \emptyset$, $v_{21}^2 = vx$; $c_{12} \mapsto \emptyset$, $u_{11}^2 = v_{22}^2$. 最后得到诱导 box $\mathfrak{B}'$, 其中实箭的微分

$$\begin{cases} \delta(d_{21}) = xv - vx, \\ \delta(d_{22}) = u_{21}^1 + u_{22}^2 - v_{22}^2 - d_{21}v, \\ \delta(d_{11}) = u_{11}^2 - v_{11}^2 - v_{21}^1 + vd_{21}, \\ \delta(d_{12}) = u_{11}^1 + u_{12}^2 - v_{12}^2 - v_{22}^1 - d_{11}v + vd_{22} \end{cases}$$

是一个野型强齐性 box.

为了探索原来的野型代数是否存在一个非齐性子范畴, 我们只能利用产生这个 box 的原始代数的性质. 事实上是利用代数的矩阵双模问题能够保留原始代数更多信息的性质, 在已知强齐性子范畴的基础上构造一个新的诱导矩阵双模问题, 使得它的表示范畴, 或等价地, 相伴诱导 box 的表示范畴是非齐性的. 文献 [8] 的后半部分便是对这个目的的一次尝试.

参考文献

- 1 Riedtmann C. Algebren, darstellungsköcher, ueberlagerungen und zurück. *Comment Math Helv*, 1980, 55: 199–224
- 2 Happel D, Preiser U, Ringel C M. Vinberg's characterization of Dynkin diagrams using subadditive function with application to DTr-periodic modules. In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 832. Berlin: Springer-Verlag, 1980, 280–294
- 3 Zhang Y B. The structure of stable components. *Canad J Math*, 1991, 43: 652–672
- 4 Auslander M. Applications of morphisms determined by objects. In: *Proceedings of Conference on Representation Theory (Philadelphia, 1976)*. New York: Marcel Dekker, 1978, 245–327
- 5 Bautista R, Smalø S O. Nonexistent cycles. *Comm Algebra*, 1983, 11: 1755–1767
- 6 Zhang Y B. The modules in any component of the AR-guiver of a wild hereditary Artin algebra are uniquely determined by their composition factors. *Arch Math*, 1989, 53: 250–251
- 7 Zhang Y B. Eigenvalues of coxeter transformations and the structure of regular components of an auslander-reiten quiver. *Comm Algebra*, 1989, 17: 2347–2362
- 8 Zhang Y B, Xu Y G. Algebras with homogeneous module category are tame. *ArXiv:1407.7576*, 2014
- 9 Crawley-Boevey W W. On tame algebras and bocses. *Proc Lond Math Soc* (3), 1988, 56: 451–483
- 10 Rojter A V. Matrix problems and representations of BOCS's. In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 831. Berlin: Springer-Verlag, 1980, 3–38
- 11 Bautista R, Kleiner M. Almost split sequences for relatively projective modules. *J Algebra*, 1990, 135: 19–56
- 12 Drozd Yu A. On tame and wild matrix problems. *Represent Quadratic Forms*, 1979, 2: 104–114
- 13 Ringel C M. The representation type of local algebras. In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 488. Berlin: Springer-Verlag, 1975, 282–305
- 14 Zeng X, Zhang Y B. A correspondence of almost split sequences between some categories. *Comm Algebra*, 2001, 29: 557–582
- 15 Crawley-Boevey W W. Tame algebras generic modules. *Proc Lond Math Soc* (3), 1991, 63: 241–265
- 16 Bautista R, Drozd A, Zeng X Y, et al. On Hom-spaces of tame algebras. *Cent Eur J Math*, 2007: 215–263

- 17 Dräxler P, Reiten I, Smalø S O, et al. Exact categories and vector space categories. Trans Amer Math Soc, 1999, 351: 647–682
- 18 Zhang Y B, Lei T G, Bautista R. A matrix description of a wild category. Sci China Ser A, 1998, 41: 461–475
- 19 Bautista R, Crawley-Boevey W W, Lei T, et al. On homogeneous exact categories. J Algebra, 2000, 230: 665–675

The structure of AR-quivers and matrix bimodule problems

Yingbo Zhang

Abstract We introduce briefly the following contents on representation of Artin algebras: the structure of stable components of AR-quivers; the property of stable components of wild hereditary algebras; the matrix bimodule problems introduced by finitely dimensional algebras over an algebraically closed field, the dual co-bimodule problems, and associated boxes; almost one-by-one correspondence of almost split sequences between representation categories of $\text{mod}\Lambda$, $P_1(\Lambda)$ and associated box; the dimension and property of Hom-spaces of any two modules over a tame algebra Λ . We also give a brief introduction to the tameness and homogeneous property of Artin algebras.

Keywords the stable component of an AR-quiver, representation type of an algebra, matrix bimodule problem, box, reduction

MSC(2010) 15A21, 16G20, 16G60, 16G70

doi: 10.1360/N012017-00231