

密度造型方法的初步探索

沈莞蔷

(江南大学理学院, 江苏 无锡 214122)

摘 要:传统的自由曲线造型系统,可描述为“(离散的)控制顶点序列,关于(离散的)基函数序列,进行(离散的)加权平均”。现打破其离散属性,改变为连续属性,即将描述改为“(连续的)曲线,关于(连续的)函数族,进行(连续的)积分平均”。相应的变化,类似于概率论中,离散型随机变量使用分布律定义的数学期望,变为连续型随机变量使用概率密度函数定义的数学期望,因此,这种连续属性的造型方法称为密度造型方法。其中,连续的曲线,称为控制曲线;连续的函数族,称为基密度函数。为了初步探索密度造型方法,定义了其模型,并尝试构造了一种满足非负、规范、对称性质的1次与2次的基密度函数,进一步研究了基密度的导数,以及对随机变量的任意阶矩函数的情况。在密度造型的过程中,输入可以是任意次数的多项式甚至非多项式的参数曲线,输出的造型曲线是次数分别不超过1和2的多项式曲线。密度造型的曲线具备凸包、仿射不变和对称等性质。

关 键 词:自由曲线造型; Bézier 曲线; 基函数; 数学期望; 概率密度函数

中图分类号: TP 391

DOI: 10.11996/JGJ.2095-302X.2023030579

文献标识码: A

文章编号: 2095-302X(2023)03-0579-09

Preliminary study of density modeling method

SHEN Wan-qiang

(School of Science, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: The traditional free curve modeling system can be described as “a (discrete) weighted average of a (discrete) sequence of control points with respect to a (discrete) sequence of basis functions.” This discrete property has been transformed into a continuous property, which could be described as “a (continuous) integral average of a (continuous) curve with respect to a (continuous) function family.” The corresponding change was similar to the transformation from the mathematical expectation of a discrete random variable defined by probability distribution law to the mathematical expectation of a continuous random variable defined by probability density functions in probability theory. Hence, the modeling method with continuous property was referred to as the density modeling method, where the continuous curve was known as a control curve, and the continuous function family was referred to as a basis density function. To preliminarily explore the density modeling method, we presented its model, constructed a basic density function of degree 1 and 2 satisfying non-negativity, normalization, and symmetry properties, and examined the derivatives of the basic density functions and the moment functions of the corresponding random variable. During density modeling, an arbitrary polynomial or even non-polynomial parametric curves could be used as the input, and the output curve was a polynomial curve of degree 1 or 2, respectively. The density modeling curve possesses properties such as convex hull, affine invariance, and symmetry properties.

Keywords: free-form curve modeling; Bézier curve; basis function; mathematical expectation; probability density function

收稿日期: 2022-07-29; 定稿日期: 2022-11-16

Received: 29 July, 2022; Finalized: 16 November, 2022

基金项目: 国家自然科学基金项目(61772013)

Foundation items: National Natural Science Foundation of China (61772013)

第一作者: 沈莞蔷(1981-), 女, 副教授, 博士。主要研究方向为计算机辅助几何设计与计算机图形学。E-mail: wq_shen@163.com

First author: SHEN Wan-qiang (1981-), associate professor, Ph.D. Her main research interests cover computer aided geometric design and computer graphics. E-mail: wq_shen@163.com

计算机辅助几何设计(computer aided geometric design, CAGD)中的自由曲线模型, 广泛应用于工业设计与制造领域^[1-3]。其由三大要素组合而成, 且均具有离散的特性: ①控制顶点, 是离散的点列; ②基函数, 是函数的离散序列(尽管每个基函数是连续函数, 但形成的序列是离散的); ③加权平均的形式, 是离散的平均。

从概念的哲学角度出发, “离散”可看作是传统模型的一种属性。本文拟将其全部转变为“连续”属性, 尝试从理论上, 探索一种与传统模型平行的新式模型。

概率论中, 随机变量的数学期望, 就是一种平均: 对于离散型的随机变量, 是加权平均; 对于连续型的随机变量, 是积分平均^[4]。而 CAGD 的传统模型, 正是加权平均, 对应离散型的随机变量, 而本文的模型, 将对应连续型的随机变量。在该模型中, 将使用概率密度函数来代替传统模型中的基函数, 因此, 本文称这种新的造型方法为密度造型方法。相应地, 为了便于区分, 将传统的造型方法称为分布律造型方法, 或简称律造型, 因为其基函数可看作是离散型随机变量的分布律。

分布律造型方法得到了广泛地研究。如常用的 Bernstein 基, 可看作是以 t 为参数的二项分布的分布律。改变分布律, 有使用广义二项分布对应的广义 Bézier 曲线^[5-6], Poisson 分布对应的 Poisson 曲线^[7], $S-\lambda$ 分布对应的 $S-\lambda$ 曲线^[8], Beta 分布对应的 Beta 曲线^[9], 基于 q 整数概率分布^[10]的 q -Bézier 曲线, 其中, 研究最广泛的是 Lupaş q -Bézier^[11]和 Phillips q -Bézier^[12]。上述研究使用的曲线模型均为离散属性。本文将考虑连续属性: 首先给出密度造型方法的基本模型; 接着尝试一种 1 次与 2 次的密度函数族, 并给出其性质; 然后, 探索相应密度造型曲线的情况和性质; 最后是总结。

1 密度造型方法

传统的自由曲线模型, 可以描述为控制顶点关于基函数的加权平均, 即

$$C(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t), \quad t \in T \quad (1)$$

其中, $P_i (i=0, 1, \dots, n)$ 为曲线 $C(t)$ 的控制顶点; $B_{i,n}(t) (i=0, 1, \dots, n)$ 为基函数; T 为参数 t 的取值范围。

基函数具有的非负性和规范性分别为

$$\forall t \in T, B_{i,n}(t) \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2)$$

$$\forall t \in T, \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1 \quad (3)$$

因此, 这些基函数可以看作是对应于某个离散型随机变量的概率分布。如著名的 Bernstein 基函数, 对应于离散的二项分布; B 样条基函数对应于随机过程的概率分布, 随机过程可看作带参数的随机变量。而式(1)的曲线模型, 与概率论中求解该离散型随机变量的数学期望的公式类似, 均为加权平均。所不同的是: 概率论中数学期望的求解, 被平均的是随机变量的取值, 是数值; 而式(1)中, 被平均的是控制顶点, 是向量。

1.1 模型的定义

为将离散模型式(1)转变为连续模型, 对其中的三大离散要素分别进行对比处理, 见表 1。

表 1 模型对比
Table 1 Model comparison

要素	模型	
	分布律造型(离散)	密度造型(连续)
控制要素	控制顶点	控制曲线
基要素	基函数序列	基密度函数族
平均要素	加权平均	积分平均

(1) 控制要素。式(1)中的控制顶点, $P_i (i=0, 1, \dots, n)$ 是离散的点集。将其转变为连续的点集, 即曲线, 用 $Q(x; n)$ 表示, 称为控制曲线。其中, x 是曲线 $Q(x; n)$ 的自变量, 对比式(1)中的 i ; n 是次数参数, 考虑到 Bézier 曲线中, 控制顶点的个数与次数有关, 即 P_i 中 i 的取值范围为 $0, 1, \dots, n$, 所以, 在控制曲线 $Q(x; n)$ 中, 也加上次数参数 n 。因此, 式(1)中, 随着 i 在 $0, 1, \dots, n$ 上离散取值, P_i 是一个个离散的点; 而 $Q(x; n)$ 中, 随着自变量 x 在与 n 有关的某区间上连续取值, $Q(x; n)$ 表示一条连续的曲线。

(2) 基要素。式(1)中的基函数 $B_{i,n}(t) (i=0, 1, \dots, n)$ 对应于某离散型随机变量的分布律, 是函数的离散集合。将其转变为函数的连续集合, 即函数族, 用 $D_n(x; t)$ 表示, 对应某连续型随机变量的密度函数, 称为基密度函数族。其中, 与式(1)中的 $B_{i,n}(t)$ 相同, 次数 n 作为 $D_n(x; t)$ 的下标; 与(1)控制要素中控制顶点转变为控制曲线一致, $D_n(x; t)$ 中的 x , 对比 $B_{i,n}(t)$ 中的 i ; t 在 $B_{i,n}(t)$ 中表示某分布律中的参数, 在 $D_n(x; t)$ 中表示某密度函数中的参数。因此, 式(1)中, 随着 i 在 $0, 1, \dots, n$ 上离散取值, $B_{i,n}(t)$ 是一

个个离散的关于 t 的函数; 而 $D_n(x;t)$ 中, 随着参数 x 在与 n 有关的某区间上连续取值, $D_n(x;t)$ 表示一簇连续的关于 t 的函数, 即为连续的函数族。

(3) 平均要素。式(1)中离散的加权平均形式, 转变为连续的积分平均形式。具体的, 式(1)中离散的和符号 $\sum$, 转变为连续的积分符号 $\int$ (表示和的极限); 离散型随机变量的分布律, 表示概率, 而连续型随机变量的密度函数, 表示密度, 必须乘以小微元 dx 才能与离散型的概率完全等同。因此, 式(1)中的 $B_{i,n}(t)$, 在连续的积分平均模型中, 将转换为 $D_n(x;t)dx$ 。

根据前文讨论, 用概率论中连续型随机变量的数学期望公式, 可给出密度造型方法的基本模型, 即

$$G(t) = \int_{x \in A_n} Q(x;n) D_n(x;t) dx, \quad t \in T \quad (4)$$

其中, n 为多项式的次数; A_n 为 x 的取值范围, 与次数有关; $Q(x;n)$, $x \in A_n$ 称为曲线 $G(t)$ 的控制曲线; $D_n(x;t)$ 为某连续型随机变量的概率密度函数, x 为自变量, 取值范围为 A_n , t 为参数, 取值范围为 T (也可看作某随机过程的概率密度, 其中 t 表示时间)。为了与传统模型相联系, 称 $D_n(x;t)$ 为基密度函数族, 简称基密度, 或基函数族。

在式(4)中, 通过积分, 变量 x 消失, 最后得到的 $G(t)$ 是一条以 t 为参数的曲线, 并且, 式(4)将传统模型式(1)中的离散属性, 完全转换为了连续属性。

1.2 模型的基本性质

(1) 在传统分布律造型方法中, 模型的性质主要由基函数的性质决定, 而其中最基本的非负性和规范性, 已由式(2)和式(3)分别给出。而本文的基密度 $D_n(x;t)$, 同样具备这 2 个性质, 即

$$\text{非负性: } \forall t \in T, \forall x \in A_n, D_n(x;t) \geq 0 \quad (5)$$

$$\text{规范性: } \forall t \in T, \int_{x \in A_n} D_n(x;t) dx = 1 \quad (6)$$

注意到, 在式(4)中, $D_n(x;t)dx$ 与积分符号 $\int$, 分别是经式(1)中的 $B_{i,n}(t)$ 与和符号 $\sum$ 转换而来。类似地, 式(6)是由式(3)通过同样的转换得到。并且, 由于小微元 dx 总为正, 所以 $D_n(x;t)dx \geq 0$ 当且仅当 $D_n(x;t) \geq 0$, 式(5)与式(2)一致。

(2) 传统的基函数具备线性无关性, 但由于线性无关及张成空间的定义都是基于离散的函数序列, 因此, 本文中连续的基密度函数族, 并不讨论其线性无关性及张成空间, 称为“基密度”“基”

仅表示“基于”, 与传统模型相对应。

(3) 传统分布律造型模型式(1)中, 曲线具备仿射不变性, 即对曲线 $C(t)$ 进行仿射变换, 只需将控制顶点 P_i , $i=0,1,\dots,n$, 进行相应的仿射变换。同样地, 本文的密度造型模型式(4), 也具备此性质。因为仿射变换可以分解为一个线性变换与一个平移变换, 即

$$F(R) = LR + T \quad (7)$$

其中, R 为平面或空间中的点, 表示为二维或三维的列向量; L 为线性变换矩阵; T 为平移变换矩阵。在式(4)中, 对曲线 $G(t)$ 进行仿射变换, 即

$$\begin{aligned} F(G(t)) &= LG(t) + T \\ &= L \int_{x \in A_n} Q(x;n) D_n(x;t) dx + T \int_{x \in A_n} D_n(x;t) dx \\ &= \int_{x \in A_n} LQ(x;n) D_n(x;t) dx + \int_{x \in A_n} TD_n(x;t) dx \\ &= \int_{x \in A_n} [LQ(x;n) + T] D_n(x;t) dx \\ &= \int_{x \in A_n} F(Q(x;n)) D_n(x;t) dx \end{aligned}$$

等同于将控制曲线进行同样的仿射变换, 其中使用了: 线性变换与积分的交换, 因为积分保持线性运算; 平移变换与积分的交换, 由基密度的规范性保证。

因此, 在模型式(4)中, 对造型曲线 $G(t)$ 进行仿射变换, 只需将控制曲线 $Q(x;n)$ 进行同样的仿射变换。

2 1次与2次基密度函数族

传统律造型中, 最基本的 Bernstein 基为

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad i=0,1,\dots,n \quad (8)$$

可看作服从二项分布的离散型随机变量的分布律。具体地, 在 n 重 Bernoulli 试验中, 假设每次试验成功的概率为 t , 则成功次数为 i 的概率, 是 $B_{i,n}(t)$ 。

本文拟使用对应于连续型随机变量的密度函数, 从概率论中的三大连续型分布出发。由于分布函数中需带有一个参数 t , 因此, 不妨假设使用的连续型分布及密度函数为

$$\text{均匀分布: } D(x;t) = \begin{cases} 1/t, & 0 \leq x \leq t \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{指数分布: } D(x;t) = \begin{cases} te^{-tx}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{正态分布: } D(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \quad (11)$$

尽管这些密度函数均存在概率背景,但不适合造型,原因:①关于参数 t 均不是多项式函数;②除均匀分布外, $D(x;t)$ 不具备局部支撑性,即在无限区间上取值非零。因此,需要定义基密度,这样可保持多项式和有限区间这 2 个特点。

参考传统律造型的 Bernstein 基函数,拟将基密度 $D_n(x;t)$ 的下标 n , 和 Bernstein 基中的 n 一样,表示次数。下面将给出次数 $n=1, 2$ 的基密度,并研究其性质。

2.1 1 次与 2 次基密度的定义

为定义式(4)中基密度 $D_n(x;t)$ ($n=1, 2$), 首先考虑其中自变量 x 的取值范围 A_n , 以及参数 t 的取值范围 T 。参考式(8)中 Bernstein 基的定义。由于基密度的自变量 x 对应 Bernstein 基的下标 i , 因此, 本文取 $A_n=[0,n]$, 在给定 n 之后, x 的取值范围 A_n 有限; 而参数 t 和 Bernstein 基一样, 取值范围 $T=[0,1]$ 。

其次, n 次的 Bernstein 基, 有 $n+1$ 个基函数, 当 Bernstein 基的离散下标 i 换成连续的 x 时, 假定同样具备 $n+1$ 个自由度, 因此, n 次的基密度将定义为关于 x 的 n 次多项式。而对于参数 t , 与 Bernstein 基一样, 基密度也将是关于 t 的 n 次多项式。所以, 次数 $n=1, 2$ 的基密度, 定义为

$$D_n(x;t) = \begin{cases} 2(2t-1)x+2(1-t), & 0 \leq x \leq 1 & (n=1) \\ \frac{5}{4}(t^2-t+1)x^2 - \frac{1}{2}(5t^2-7t+6)x + \frac{1}{6}(5t^2-11t+11), & 0 \leq x \leq 2 & (n=2) \end{cases} \quad (12)$$

其中, 参数 $t \in [0,1]$ 。

再次, 对于 $n=0$ 的特殊情况, 基密度可取单位脉冲函数, 即 $D_0(x;t)=\delta(x)$ 。由于 $\delta(x)$ 在零点以外的值均为零, 因此, 其自变量 x 的取值范围可看作 $[0,0]$, 与 A_n 的区间一致。并且, $\delta(x)$ 具备式(5)和式(6)描述的非负性及规范性, 所以, 这样定义是合适的。

最后, 画出 $n=1, 2$ 次基密度的图像, 尽管 t 在基密度中是参数, 但 $D_n(x;t)$ 也可看作是关于 x 和 t 的二元函数。因此, 画图时, 以 x 和 t 作为坐标轴绘制曲面 $D_n(x;t)$, 如图 1 所示。

2.2 1 次与 2 次基密度的性质

本节中, 关注式(12)定义的 1 次与 2 次基密度的性质。其中的非负性和规范性, 作为随机变量

密度函数的必要条件, 已由式(5)和式(6)分别给出, 现将 x 和 t 的取值范围代入, 使表示更为明确。由此, 对于 $n=1, 2$, 式(12)定义的基密度具备如下基本性质。

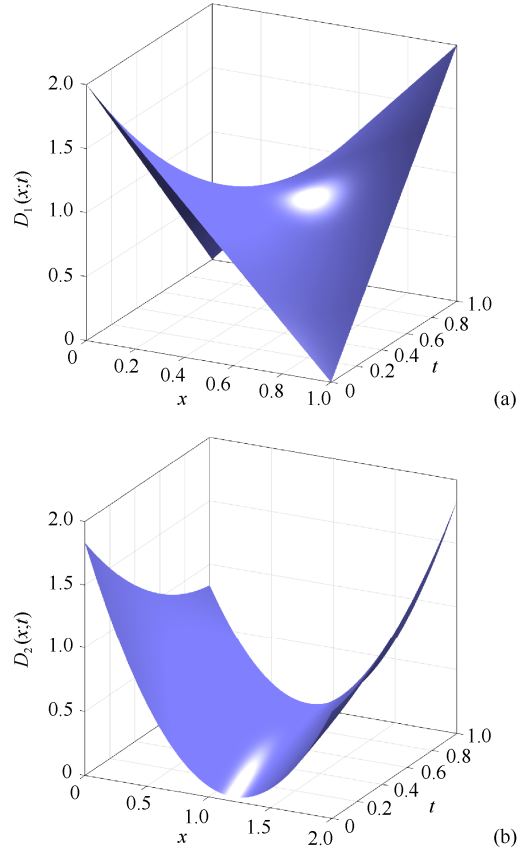


图 1 基密度 $D_n(x;t)$ 的图像

Fig. 1 Figures of basis density functions $D_n(x;t)$
(a) $D_1(x;t)$; (b) $D_2(x;t)$

非负性:

$$\forall t \in [0,1], \forall x \in [0,n], D_n(x;t) \geq 0 \quad (13)$$

规范性:

$$\forall t \in [0,1], \int_0^n D_n(x;t) dx = 1 \quad (14)$$

对称性:

$$D_n(x;t) = D_n(n-x;1-t), \forall t \in [0,1], \forall x \in [0,n] \quad (15)$$

多项式性质: 任意给定 $x \in [0,n]$, $D_n(x;t)$ 是关于 t 的次数 $\leq n$ 的多项式。

导数情况为

$$\frac{\partial}{\partial t} D_n(x;t) = \begin{cases} 4x-2 & (n=1) \\ \left(\frac{5}{2}x^2 - 5x + \frac{5}{3} \right) t - \frac{5}{4}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{11}{6} & (n=2) \end{cases} \quad (16)$$

和

$$\frac{\partial}{\partial x} D_n(x; t) = \begin{cases} 4t-2 & (n=1) \\ \frac{5}{2}(t^2-t+1)x - \frac{1}{2}(5t^2-7t+6) & (n=2) \end{cases} \quad (17)$$

在这些性质中, 多项式性质显然成立。非负性和对称性的证明, 只需将式(12)中的1次与2次基密度进行如下变形

$$\begin{aligned} D_1(x; t) &= 2(1-x)(1-t) + 2xt \quad (18) \\ D_2(x; t) &= \frac{11}{24}(2-x)^2(1-t)^2 + \frac{11}{24}(2-x)^2(1-t)t + \\ &\quad \frac{5}{24}(2-x)^2t^2 + \frac{1}{12}(2-x)x(1-t)^2 + \\ &\quad \frac{7}{12}(2-x)x(1-t)t + \frac{1}{12}(2-x)xt^2 + \\ &\quad \frac{5}{24}x^2(1-t)^2 + \frac{11}{24}x^2(1-t)t + \frac{11}{24}x^2t^2 \quad (19) \end{aligned}$$

导数情况可通过式(12)进行简单计算得到。与离散的 Bernstein 基不同, 连续的基密度不但可以关于参数 t 求导, 也可以关于自变量 x 求导, 后者的导数反映了 x 方向密度函数的变化情况, 如图2所示。

余下的规范性需通过计算证明。

证明: 规范性。对于1次的基密度, 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 D_1(x; t) dx &= \int_0^1 [2(2t-1)x + 2(1-t)] dx \\ &= (2t-1) + 2(1-t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

对于2次的基密度, 有

$$\begin{aligned} \int_0^2 D_2(x; t) dx &= \int_0^2 \left[\frac{5}{4}(t^2-t+1)x^2 - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2}(5t^2-7t+6)x + \frac{1}{6}(5t^2-11t+11) \right] dx \\ &= \frac{5}{4}(t^2-t+1) \times \frac{8}{3} - \frac{1}{2}(5t^2-7t+6) \times \frac{4}{2} + \\ &\quad \frac{1}{6}(5t^2-11t+11) \times 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

除上述性质外, 在概率论或随机过程中, 如果假设基密度 $D_n(x; t)$ ($n=1, 2$) 对应的带有参数 t 的随机变量(或随机过程)分别为 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$, 那么其 k 阶原点矩(或原点矩函数)分别为

$$\text{Exp}(X_1^k(t)) = \frac{2kt+2}{(k+1)(k+2)} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &\text{Exp}(X_2^k(t)) \\ &= \frac{5k(k-1)t^2 + k(k+23)t + (5k^2+k+18)}{3 \times 2^{-k}(k+1)(k+2)(k+3)} \quad (21) \end{aligned}$$

其中, Exp 为数学期望。

证明: 通过计算

$$\begin{aligned} \text{Exp}(X_1^k(t)) &= \int_0^1 x^k D_1(x; t) dx \\ &= \frac{2(2t-1)}{k+2} + \frac{2(1-t)}{k+1} \\ &= \frac{2kt+2}{(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

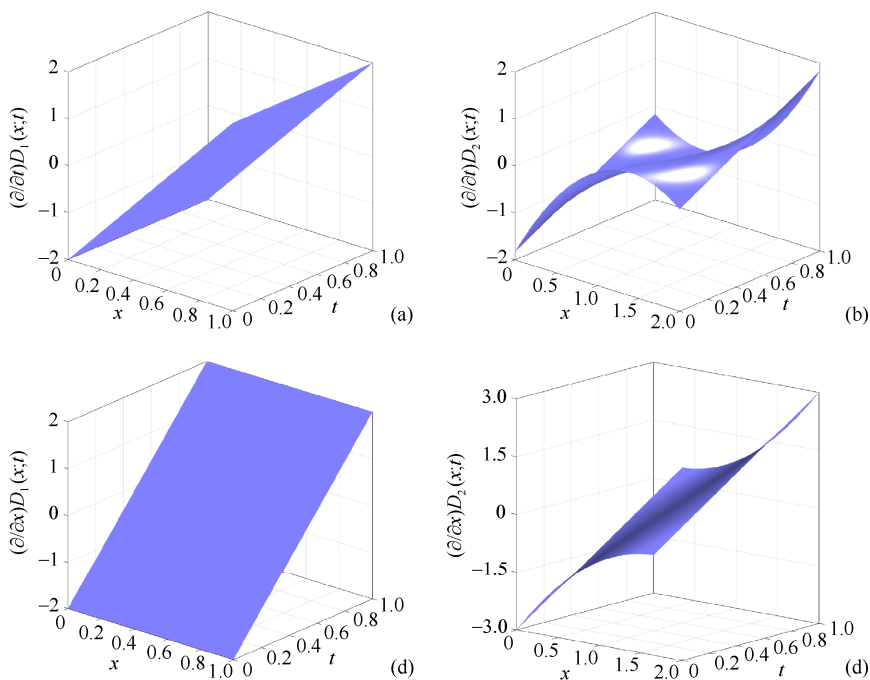


图2 基密度 $D_n(x; t)$ 导函数的图像

Fig. 2 Figures of derived functions of basis density functions $D_n(x; t)$ ((a) $(\partial/\partial t)D_1(x; t)$; (b) $(\partial/\partial t)D_2(x; t)$; (c) $(\partial/\partial x)D_1(x; t)$; (d) $(\partial/\partial x)D_2(x; t)$)

$$\begin{aligned}
 \text{Exp}(X_2^k(t)) &= \int_0^2 x^k D_2(x;t) dx \\
 &= \frac{5(t^2-t+1)}{4 \times 2^{-(k+3)}(k+3)} - \frac{5t^2-7t+6}{2 \times 2^{-(k+2)}(k+2)} + \\
 &\quad \frac{5t^2-11t+11}{6 \times 2^{-(k+1)}(k+1)} \\
 &= \frac{5k(k-1)t^2 + k(k+23)t + (5k^2+k+18)}{3 \times 2^{-k}(k+1)(k+2)(k+3)}
 \end{aligned}$$

特别地, 其中的 1 阶原点矩, 即数学期望

$$\text{Exp}(X_n(t)) = n \left(\frac{t+1}{3} \right) \quad (22)$$

将用于后续造型曲线的讨论。

另外, 注意到, 如果要求数学期望像 Bernstein 基对应的二项分布一样, 等于 nt , 在满足对称性的条件下做不到。原因在于: 若用反证法假设均值为 nt , 则当 $t=0$ 时, 均值零, 此时, 对于基密度函数, 在非负性和零均值的要求下, 作为连续函数, 只能恒为零; 而根据对称性, 在 $t=1$ 时, 基密度同样恒为零, 这与此时, 均值等于 n 产生矛盾。因此, 均值不能为 nt 。

退而求其次, 当 $n=1, 2$ 时, X_n 的方差为

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X_n(t)) &= \text{Exp}(X_n^2(t)) - [\text{Exp}(X_n(t))]^2 \\
 &= n \left(\frac{t+1}{3} \right) \left(\frac{2-t}{3} \right) \quad (23)
 \end{aligned}$$

因此, X_n 的期望和方差与二项分布的期望 nt 和方差 $nt(1-t)$ 之间的关系类似。

3 1 次与 2 次密度造型曲线

给定基密度之后, 式(4)中, 将 x 与 t 的取值范围代入, 可得密度造型曲线的定义。

$$G(t) = \int_0^n Q(x;n) D_n(x;t) dx, \quad t \in [0,1] \quad (24)$$

特别地, 当 $n=0$ 时, 基密度为脉冲函数。此时, 由于输入的控制曲线 $Q(x;n)$ 的定义域仅有零点, 即定义域退化为一个单点, 因此, 输出曲线 $G(t)$ 也是一个点。 $n=1, 2$ 的情况将在下面讨论。

3.1 1 次与 2 次基密度的曲线造型情况

(1) 考虑控制曲线为直线的情况。假设控制曲线为

$$Q(x;n) = P_0 \left(1 - \frac{x}{n} \right) + P_1 \frac{x}{n}, \quad x \in [0,n] \quad (25)$$

于是, 当次数 $n=1, 2$ 时, 曲线

$$\begin{aligned}
 G(t) &= \int_0^n Q(x;n) D_n(x;t) dx \\
 &= \int_0^n \left[(P_1 - P_0) \frac{x}{n} + P_0 \right] D_n(x;t) dx \\
 &= \frac{P_1 - P_0}{n} \int_0^n x D_1(x;t) dx + P_0 \int_0^n D_1(x;t) dx \\
 &= \frac{P_1 - P_0}{n} \text{Exp}(X_n(t)) + P_0 \\
 &= \left(1 - \frac{t+1}{3} \right) P_0 + \frac{t+1}{3} P_1
 \end{aligned}$$

仍表示 $P_0 P_1$ 上的直线, 但端点并不插值 P_0 和 P_1 。

(2) 控制曲线为 $m(m>1)$ 次曲线的情况。不妨设控制曲线为

$$Q(x;n) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(1 - \frac{x}{n} \right)^{m-k} \left(\frac{x}{n} \right)^k P_k, \quad x \in [0,n] \quad (26)$$

根据 Bernstein 基与幂基的转换公式^[13], 控制曲线也可表示为

$$Q(x;n) = \sum_{k=0}^m \left(\frac{x}{n} \right)^k Q_k, \quad x \in [0,n] \quad (27)$$

其中,

$$Q_k = \sum_{i=0}^k \binom{m}{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+k} P_i$$

若使用 1 次基密度 $D_1(x;t)$, 则造型曲线

$$\begin{aligned}
 G(t) &= \int_0^1 Q(x;n) D_1(x;t) dx \\
 &= \sum_{k=0}^m \left(\int_0^1 x^k D_1(x;t) dx \right) Q_k \\
 &= \sum_{k=0}^m \text{Exp}(X_1^k(t)) Q_k \\
 &= \sum_{k=0}^m \frac{2kt+2}{(k+1)(k+2)} Q_k \\
 &= \sum_{i=0}^m \sum_{k=i}^m \frac{2 \times (-1)^{i+k}}{(k+1)(k+2)} \binom{m}{k} \binom{k}{i} (kt+1) P_i
 \end{aligned}$$

若使用 2 次基密度 $D_2(x;t)$, 则造型曲线

$$\begin{aligned}
 G(t) &= \int_0^2 Q(x;n) D_2(x;t) dx \\
 &= \sum_{k=0}^m \left(\int_0^2 x^k D_2(x;t) dx \right) \frac{Q_k}{n^k} \\
 &= \sum_{k=0}^m \text{Exp}(X_2^k(t)) \frac{Q_k}{n^k} \\
 &= \sum_{k=0}^m \frac{5k(k-1)t^2 + k(k+23)t + (5k^2+k+18)}{3(k+1)(k+2)(k+3)} \left(\frac{2}{n} \right)^k Q_k \\
 &= \sum_{i=0}^m \left[\sum_{k=i}^m \frac{5k(k-1)t^2 + k(k+23)t + (5k^2+k+18)}{3(k+1)(k+2)(k+3)} \times \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{2}{n} \right)^k \binom{m}{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+k} \right] P_i
 \end{aligned}$$

从中可知, 无论控制曲线的次数有多高, 使用 1 次与 2 次基密度, 造型所得的多项式曲线次数均分别不超过 1 与 2。

图 3 给出示例, 其中, 黑色表示控制曲线, 蓝色和绿色分别表示 1 次和 2 次基密度造型的曲线, 文中后续的示例均采用此表示方式。由于本例中, 控制曲线是 Bézier 曲线, 因此, 黑色圆点与折线分别表示曲线的控制顶点与控制多边形。图 3(a)和(b)分别给出平面和空间曲线的示例。

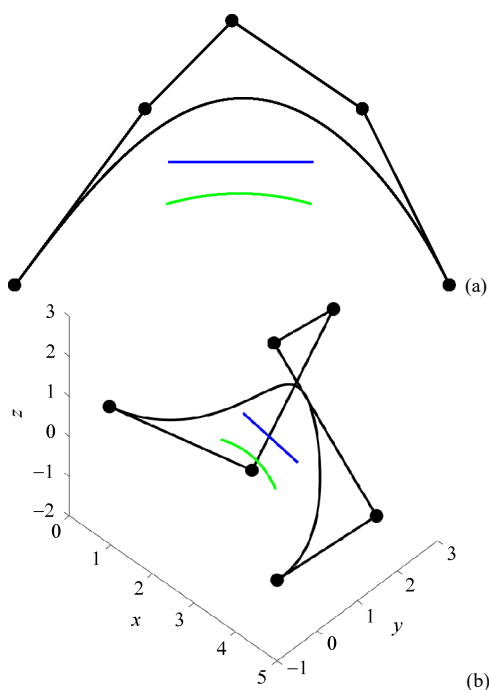


图 3 控制曲线为 Bézier 曲线的示例((a)平面曲线;
(b)空间曲线)

Fig. 3 Examples for Bézier control curves
((a) Planar curve; (b) Space curve)

(3) 控制曲线是非多项式曲线的情况。如用三角函数表示的控制曲线

$$Q(x;n) = P_0 \sin \frac{\pi x}{n} + P_1 \cos \frac{\pi x}{n}, \quad x \in [0, n] \quad (28)$$

若使用 1 次基密度 $D_1(x;t)$, 则造型曲线

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^1 Q(x;n) D_1(x;t) dx \\ &= P_0 \left[2(2t-1) \int_0^1 x \sin(\pi x) dx + 2(1-t) \int_0^1 \sin(\pi x) dx \right] + \\ &\quad P_1 \left[2(2t-1) \int_0^1 x \cos(\pi x) dx + 2(1-t) \int_0^1 \cos(\pi x) dx \right] \\ &= P_0 \left[2(2t-1) \frac{1}{\pi} + 2(1-t) \frac{2}{\pi} \right] + P_1 \left[2(2t-1) \left(-\frac{2}{\pi^2} \right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} P_0 + \frac{4}{\pi^2} P_1 (1-2t) \end{aligned}$$

若使用 2 次基密度 $D_2(x;t)$, 则造型曲线

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^2 Q(x;n) D_2(x;t) dx \\ &= P_0 \left[\frac{5}{4} (t^2 - t + 1) \int_0^2 x^2 \sin \frac{\pi x}{2} dx - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} (5t^2 - 7t + 6) \int_0^2 x \sin \frac{\pi x}{2} dx + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{6} (5t^2 - 11t + 11) \int_0^2 \sin \frac{\pi x}{2} dx \right] + \\ &\quad P_1 \left[\frac{5}{4} (t^2 - t + 1) \int_0^2 x^2 \cos \frac{\pi x}{2} dx - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} (5t^2 - 7t + 6) \int_0^2 x \cos \frac{\pi x}{2} dx + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{6} (5t^2 - 11t + 11) \int_0^2 \cos \frac{\pi x}{2} dx \right] \\ &= P_0 \left[\frac{10(\pi^2 - 4)}{\pi^3} (t^2 - t + 1) - \frac{2}{\pi} (5t^2 - 7t + 6) + \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{3\pi} (5t^2 - 11t + 11) \right] + P_1 \left[-\frac{20}{\pi^2} (t^2 - t + 1) + \right. \\ &\quad \left. \frac{4}{\pi^2} (5t^2 - 7t + 6) \right] \\ &= \frac{2}{3\pi^3} P_0 [5(\pi^2 - 12)(t^2 - t) + 8\pi^2 - 60] + \\ &\quad \frac{4}{\pi^2} P_1 (1 - 2t) \end{aligned}$$

从中可知, 即使控制曲线不是多项式曲线, 使用 1 次与 2 次的基密度造型, 所得曲线也为次数分别不超过 1 与 2 的多项式曲线。

图 4 给出示例。取 P_0 和 P_1 是相互正交的单位向量, 则上述控制曲线为单位半圆。图中, 黑色圆点表示点 P_0 和 P_1 。

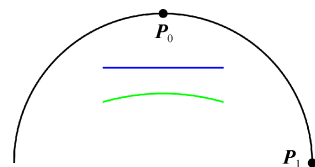


图 4 控制曲线为非多项式曲线的示例

Fig. 4 Example for non-polynomial control curve

3.2 1 次与 2 次基密度造型曲线的性质

当次数 $n=1, 2$ 时, 式(24)定义的密度造型曲线具备如下性质。

(1) 凸包性。密度造型曲线 $G(t)$ 位于控制曲线 $Q(x;n)$ 的凸包内。其中, 凸包指包含控制曲线的最小凸集。凸包性可根据基密度的非负性和规范性得到。上节中, 控制曲线为直线的情况, 所得造型曲线是直线的特性, 也可通过凸包性得到。

(2) 仿射不变性。该性质已在 1.2 节中说明。

特别地, 因为不同的基之间仅相差一个线性变换, 所以, 控制曲线 $\mathbf{Q}(x;n)$ 不论在哪组基下表示, 造型出的密度曲线均相同。如 3.1 节中, 同一条控制曲线, 尽管在 Bernstein 基和幂基下的表示不同, 但所得的密度造型曲线完全相同。

(3) 多项式曲线。对于 $n=1, 2$ 的情况, 无论控制曲线 $\mathbf{Q}(x;n)$ 是多高次数的多项式曲线, 甚至不是多项式曲线, 生成的密度造型曲线 $\mathbf{G}(t)$ 必定是次数分别 ≤ 1 和 ≤ 2 的多项式曲线。此性质由基密度的多项式性质, 以及曲线的模型式(24)得到, 在 3.1 节中, 已举过相应的例子。

(4) 对称性。如果控制曲线 $\mathbf{Q}(x;n)$ 的走向相反, 那么得到的密度造型曲线与原密度造型曲线相同, 但走向相反。此性质由基密度的对称性得到。图 5 给出示例, 若控制曲线对称, 则得到的 1 次与 2 次密度造型曲线均对称。图 5(a)和(b)分别给出了平面和空间曲线的示例。

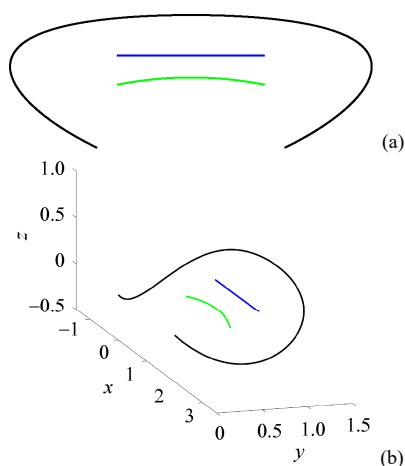


图 5 控制曲线为对称曲线的示例((a)平面曲线; (b)空间曲线)

Fig. 5 Examples for symmetric control curves ((a) Planar curve; (b) Space curve)

(5) 导曲线的情况。由于曲线的定义是针对变量 x 的积分, 而曲线的求导是针对变量 t 进行, 因此, 导数可与积分相交换, 式(24)的导曲线, 即为基密度导函数的造型曲线

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G}(t) = \int_0^1 \mathbf{Q}(x;n) \frac{\partial}{\partial t} D_n(x;t) dx \quad (29)$$

其中, $(\partial/\partial t)D_n(x;t)$ 已在基密度的导数情况中给出。特别的, 对于 1 次基密度造型所得直线, 导曲线关于 t 为常数, 反映了该直线的方向。

(6) 端点情况。根据曲线的表达式和基密度的导数情况, 曲线式(24)在 $t=0$ 和 1 这 2 个端点处, 位置矢量和导矢量分别为

$$\mathbf{G}(0) = \begin{cases} 2 \int_0^1 \mathbf{Q}(x;1)(1-x) dx & (n=1) \\ \int_0^2 \mathbf{Q}(x;2) \left(\frac{5}{4}x^2 - 3x + \frac{11}{6} \right) dx & (n=2) \end{cases} \quad (30)$$

$$\mathbf{G}'(0) = \begin{cases} 2 \int_0^1 \mathbf{Q}(x;1)(2x-1) dx & (n=1) \\ \int_0^2 \mathbf{Q}(x;2) \left(-\frac{5}{4}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{11}{6} \right) dx & (n=2) \end{cases} \quad (31)$$

$$\mathbf{G}(1) = \begin{cases} 2 \int_0^1 \mathbf{Q}(x;1)x dx & (n=1) \\ \int_0^2 \mathbf{Q}(x;2) \left(\frac{5}{4}x^2 - 2x + \frac{5}{6} \right) dx & (n=2) \end{cases} \quad (32)$$

$$\mathbf{G}'(1) = \begin{cases} 2 \int_0^1 \mathbf{Q}(x;1)(2x-1) dx & (n=1) \\ \int_0^2 \mathbf{Q}(x;2) \left(\frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{6} \right) dx & (n=2) \end{cases} \quad (33)$$

从端点情况可知, 造型的曲线并不具备端点插值性。原因在于: ①因为控制曲线形式多样, 甚至允许非多项式曲线, 积分值随着控制曲线的变化而变化; ②即使假定控制曲线在多项式曲线的范围内, 若要满足插值性, 则基密度的 k 阶原点矩必须与二项分布的 k 阶原点矩相等, 然而, 在 1 阶原点矩(数学期望)时, 就无法实现, 已在 2.2 节结尾处进行了说明。

图 6 给出造型曲线随控制曲线变化的示例。控制曲线为插值 4 个黑色点的三次多项式曲线。在这 4 个点中, 底部的 2 个点 $(-2,0)$ 和 $(2,0)$ 保持不动, 顶部的 2 个点横坐标分别为 -1 和 1 , 纵坐标相等, 且从 0.5 到 3.0 不断变化。

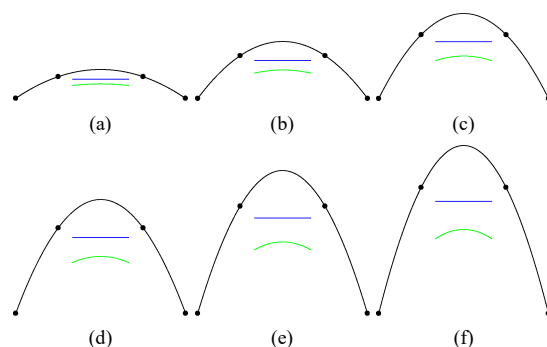


图 6 基密度造型曲线随控制曲线变化示例, 曲线跟随中间 2 点与两端点之间高度差的变化而变化((a)高度差为 0.5; (b)高度差为 1.0; (c)高度差为 1.5; (d)高度差为 2.0; (e)高度差为 2.5; (f)高度差为 3.0)

Fig. 6 Examples for curves built by basis density functions moving with control curves, where the height differences between the middle two points and the two endpoints are different ((a) Height difference is 0.5; (b) Height difference is 1.0; (c) Height difference is 1.5; (d) Height difference is 2.0; (e) Height difference is 2.5; (f) Height difference is 3.0)

4 结束语

本文提出了密度造型方法的初步理论, 尝试定义了1次与2次的基密度, 并研究了基密度及曲线的简单性质。课题来源于灵感以及变换属性的哲学思想, 本文的工作仅是理论上的初步探索。

本文中, 1次与2次基密度的表达式是通过类比二项分布期望和方差之间的关系, 经由式(22)和式(23)反求凑得。3次及3次以上的情况, 困难在于二项分布的高阶原点矩与中心矩的关系不如期望与方差的关系明显, 因此, 本文仅研究到2次。后续拟在概率论中定义不同于原点矩或中心矩的数字特征, 并尝试找出规律, 从而研究更高次数的情况。

另外, 今后还将研究广义的密度造型, 将其与对应二项分布的Bézier模型, 在基(密度)函数方面产生更为直接的联系, 并且, 将使用概率论中分布函数的理论, 构造统一传统的分布律造型方法和本文提出的密度造型方法的模型, 进而丰富造型的理论, 为几何造型与概率论更深入的交叉提供一条途径。

参考文献 (References)

- [1] ROMANI L, VISCARDI A. Planar class A Bézier curves: the case of real eigenvalues[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2021, 89: 102021.
- [2] 马燕, 殷志昂, 黄慧, 等. 结合卷积神经网络与曲线拟合的人体尺寸测量[J]. *中国图象图形学报*, 2022, 27(10): 3068-3081.
MA Y, YIN Z A, HUANG H, et al. The convolution neural network and curve fitting based human body size measurement[J]. *Journal of Image and Graphics*, 2022, 27(10): 3068-3081 (in Chinese).
- [3] DURAKLI Z, NABIYEV V. A new approach based on Bézier curves to solve path planning problems for mobile robots[J]. *Journal of Computational Science*, 2022, 58: 101540.
- [4] 毛学志, 杨晓静. 概率论与数理统计[M]. 北京: 中国铁道出版社有限公司, 2022: 26-58.
- MAO X Z, YANG X J. Probability and mathematical statistics[M]. Beijing: China Railway Publishing House Co., Ltd., 2022: 26-58 (in Chinese).
- [5] MADSEN R W. Generalized binomial distributions[J]. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 1993, 22(11): 3065-3086.
- [6] GOLDMAN R. The rational Bernstein bases and the multirational blossoms[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1999, 16(8): 701-738.
- [7] MORIN G, GOLDMAN R. A subdivision scheme for Poisson curves and surfaces[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2000, 17(9): 813-833.
- [8] ZHOU G R, ZENG X M, FAN F L. Bivariate S - λ bases and S - λ surface patches[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2014, 31(9): 674-688.
- [9] CHU L C, ZENG X M. Constructing curves and triangular patches by Beta functions[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2014, 260: 191-200.
- [10] 杨军, 黄倩颖. 一类广义Bézier曲线及其性质研究[J]. *南昌航空大学学报: 自然科学版*, 2020, 34(4): 19-24.
YANG J, HUANG Q Y. On A Class of generalized Bézier curves and their properties[J]. *Journal of Nanchang Hangkong University: Natural Sciences*, 2020, 34(4): 19-24 (in Chinese).
- [11] 中学超, 韩力文. 三次加权Lupaş q -Bézier曲线表示的圆锥曲线[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2022, 34(1): 36-43.
SHEN X C, HAN L W. Conic sections represented by cubic weighted Lupaş q -Bézier curves[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2022, 34(1): 36-43 (in Chinese).
- [12] 梁吉娜, 解滨, 韩力文. 曲率单调的组合二次Phillips q -Bézier曲线[J]. *图学学报*, 2022, 43(3): 443-452.
LIANG J N, XIE B, HAN L W. Combinatorial quadratic Phillips q -Bézier curves with monotone curvature[J]. *Journal of Graphics*, 2022, 43(3): 443-452 (in Chinese).
- [13] 王国瑾, 汪国昭, 郑建民. 计算机辅助几何设计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 1-17.
WANG G J, WANG G Z, ZHENG J M. Computer aided geometric design[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001: 1-17 (in Chinese).