中国科学: 数学　2022 年　第 52 卷　第 5 期: 493～504
SCIENTIA SINICA　Mathematica
论　文
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

幂等子代数上的支撑 τ- 倾斜模

胡永刚[1], 周潘岳[2*]

1. 北京工业大学理学部数学学院, 北京 100124;
2. 湖南理工学院数学学院, 岳阳 414006
E-mail: huyonggang@emails.bjut.edu.cn, panyuezhou@163.com

收稿日期: 2020-09-26; 接受日期: 2021-04-08; 网络出版日期: 2021-11-01; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11901190, 11671126 和 12071120)、国家留学基金委 (批准号: 201906540017)、湖南省教育厅优秀青年 (批准号: 19B239) 和湖南理工学院科研创新团队 (批准号: 2019-TD-15) 资助项目

摘要　设 A 是数域 k 上的有限维代数, e 是 A 中的幂等元. 本文证明了, 如果 A/AeA 是左投射 A-模, 则有限生成右 eAe- 模 T 是支撑 τ- 倾斜模当且仅当 $T\otimes_{eAe}eA$ 是 A 上的支撑 τ- 倾斜模. 另一方面, 如果 A 是遗传代数, T 是支撑 τ- 倾斜 A- 模, A/AeA 是右投射 A- 模, 则 $\mathsf{Hom}_A(eA,T)$ 是支撑 τ- 倾斜 eAe- 模. 作为应用, 本文证明了, 若代数 A 是 τ- 倾斜有限的, 则幂等子代数 eAe 也是 τ- 倾斜有限的.

关键词　支撑 τ- 倾斜模　τ- 倾斜有限　$*$- 模　幂等子代数

MSC (2020) 主题分类　16G10, 16G20, 16E65

1　引言

受 Bernstein-Gelfand-Ponomarev (BGP) 反射函子的启发, Brenner 和 Butler [1] 引入了经典倾斜模的定义. 众所周知, 要想在倾斜模类上实现突变 (mutation), 则几乎完全倾斜模必须满足有两个补这一条件. 遗憾的是, 有些几乎完全倾斜模有时仅有一个补. 因此, 这种突变作用在倾斜模类上无法完全实现. 为此, Adachi 等 [2] 引入了支撑 τ- 倾斜模. 由此可以得到一个定义良好的突变作用. 另外, 文献 [2] 也建立了支撑 τ- 倾斜模类、两项半倾斜 (silting) 复形类 [3]、函子有限挠类 [4] 和 2-Calabi-Yau 三角范畴中的丛倾斜对象类 [5,6] 之间的一一对应关系.

令 A 为 Artin 代数, e 是 A 中的幂等元. 称代数 $B=eAe$ 为 A 的幂等子代数 [7]. Auslander [8] 证明了任意 Artin 代数都是某个总体维数有限的代数的幂等子代数. 这个结论后来被 Iyama [9] 推广. 事实上, 上述整体维数有限的代数可以被假设为拟遗传代数 (参见文献 [10]). 从这个结论的角度来看, 可以利用代数本身的一些信息来观察其幂等子代数, 如有限维数 [11]. 反过来, 也可以从幂等子代数来推测其原来代数的某些同调性质 (参见文献 [12]).

英文引用格式: Hu Y G, Zhou P Y. The support τ-tilting modules over idempotent subalgebras (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 493–504, doi: 10.1360/SSM-2020-0291

τ- 倾斜有限代数由 Demonet 等 [13] 引入. τ- 倾斜有限性与有限表示型紧密相关. Zito [14] 证明了有非空的左部分或者右部分的 τ- 倾斜有限代数都是表示有限的. 注意到, 基本支撑 τ- 倾斜模的同构类个数影响着代数是否是 τ- 倾斜有限. 而要确定给定代数上的所有基本支撑 τ- 倾斜模的同构类个数比较困难. 因此, 这就给判别代数是否为 τ- 倾斜有限带来了一定的困难. 在如何确定支撑 τ- 倾斜模的同构类个数的问题上已有一些重要的结论. Iyama 和 Zhang [15] 及 Adachi [16] 给出了 $k[x]/(x^n)$ 的 Auslander 代数和 Nakayama 代数上的支撑 τ- 倾斜模的分类. Obaid 等 [17] 给出了 Dynkin 箭图的遗传代数上的支撑 τ- 倾斜模的同构类个数. Jasso [18] 提供了支撑 τ- 倾斜模的简化技术. Ma 等 [19] 利用模范畴的黏合在某些特殊条件下给出了构造代数上的支撑 τ- 倾斜模的方法.

本文将利用代数 A 上的同调信息来描述其幂等子代数 eAe 上支撑 τ- 倾斜模的信息. 由此可以证明若代数 A 是 τ- 倾斜有限的, 则幂等子代数 eAe 也是 τ- 倾斜有限的. 这个结论给判别代数是否为 τ- 倾斜无限带来了简便方法. 最后需要说明本文的考察方式区别于文献 [19]. 本文的主要结果如下.

定理 1.1 假设 A 是有限维 k- 代数, $B = eAe$, 其中 e 是 A 中的幂等元. 令函子

$$H(-) = \mathsf{Hom}_A(eA, -) = - \otimes_A Ae, \quad G(-) = - \otimes_B eA.$$

假设 T 是有限生成支撑 τ- 倾斜右 A- 模.

(1) 如果 A/AeA 是左投射 A- 模, 则有限生成右 B- 模 T 是支撑 τ- 倾斜模当且仅当 $G(T)$ 是 A 上的支撑 τ- 倾斜模.

(2) 假设 B 和 A/AeA 是遗传代数. 若 A/AeA 是投射右 A- 模且 $\mathsf{pd}_{A^{\rm op}} A/AeA \leqslant 1$, 则 $H(T)$ 是支撑 τ- 倾斜右 B- 模.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节给出一些预备知识. 第 3 节讨论幂等子代数上的支撑 τ- 倾斜模的提升. 第 4 节限制代数上的支撑 τ- 倾斜模限制到幂等子代数上.

2 预备知识

假设 A 是数域 k 上的有限维代数, e 是 A 中的幂等元. 令 $B = eAe$ 为代数 A 的幂等子代数. 用 $\mathsf{mod}A$ 表示代数 A 上所有有限生成右 A- 模. 如果没有特殊强调, 本文所有的模均为右模. 假设 $M \in \mathsf{mod}A$. $\mathsf{Fac}M$ 和 $\mathsf{Sub}M$ 分别表示 M 的有限直和的商模和子模构成的 $\mathsf{mod}A$ 的加法子范畴. 用 $|M|$ 表示 M 中的非同构的不可分解直和项的个数. 设 $\mathsf{ann}_A M$ 为 M 的零化子.

定义 2.1 [2] 假设 $M \in \mathsf{mod}A$.

(1) 如果 $\mathsf{Hom}_A(M, \tau M) = 0$, 则称 M 是 τ- 刚性的;

(2) 如果 M 是 τ- 刚性的且 $|M| = |A|$, 则称 M 是 τ- 倾斜的;

(3) 如果对于某个 A 中的幂等元 e, M 是 τ- 倾斜 $(A/\langle e\rangle)$- 模, 则称 M 是支撑 τ- 倾斜的.

如果 A- 模 M 满足, 对于任意投射 A- 模 P 有 $\mathsf{Hom}_A(P, M) \neq 0$, 则称 M 是真实的 (sincere).

命题 2.1 [2] 假设 A 是有限维 k- 代数, 则下列叙述成立.

(1) τ- 倾斜模恰好是真实的支撑 τ- 倾斜模;

(2) 倾斜模恰好是忠实的支撑 τ- 倾斜模;

(3) 任意的 τ- 倾斜 A- 模 T 均是倾斜 $(A/\mathsf{ann}_A T)$- 模.

如果一个支撑 τ- 倾斜模 M 的所有不可分解直和项的重数均为 1, 则称 M 是基本支撑 τ- 倾斜模. 对于任意两个支撑 τ- 倾斜模 M 和 N, 如果 $\mathsf{Fac}N \subseteq \mathsf{Fac}M$, 则记 $N \leqslant M$. 如此, 可以在支撑 τ- 倾斜模类上定义一种偏序关系. 代数 A 的 Hasse 箭图 [2] $\mathrm{H}(A)$ 定义如下:

(1) 以所有基本支撑 τ- 倾斜模作为顶点;

(2) 设 M 和 N 为两个基本支撑 τ- 倾斜模, 如果 $N < M$ 并且不存在支撑 τ- 倾斜模 L, 使得 $N < L < M$, 则顶点 M 到 N 有一个箭向.

假设 R 是一个 k- 代数. 用 $\mathsf{Mod}R$ 来表示右 R- 模范畴. 假设 M 是 R- 模, 用 $\mathsf{Add}M$ 表示由 M 的直和的直和项构成的 $\mathsf{Mod}R$ 的加法子范畴. 用 $\mathsf{Gen}M$ 表示由 M 的直和 (可以是无限直和) 的商模构成的类, 即对于任意 $X \in \mathsf{Gen}M$, 存在短正合列 $0 \to K \to M_0 \to X \to 0$, 其中 $M_0 \in \mathsf{Add}M$. 对偶地, 我们有模类 $\mathsf{Cogen}M$. 考虑模类

$$\mathsf{Pres}^n M = \{X \in \mathsf{Mod}R \mid \text{存在正合列 } M_1 \to M_0 \to X \to 0, \text{其中 } M_i \in \mathsf{Add}M\}.$$

定义 2.2 [20]　假设 M 是 R- 模, Q 为 $\mathsf{Mod}R$ 的余生成子. 令 $H_M = \mathsf{Hom}_R(M, -)$, $T_M = M \otimes_R -$, $K_R = H_M(Q)$. 如果函子对(T_M, H_M) 诱导了范畴等价

$$\mathsf{Cogen}K_R \underset{T_M}{\overset{H_M}{\rightleftarrows}} \mathsf{Gen}M,$$

则称 M 为 $*$- 模.

假设 M 是 R- 模. 如果对于任意集合 λ, 有典型同构 $\mathsf{Hom}_R(M, M^{(\lambda)}) \cong \mathsf{Hom}_R(M, M)^{(\lambda)}$, 则称 M 是自小的 (self-small). 如果函子 $\mathsf{Hom}_R(M, -)$ 保持直和, 则称 M 是小的 (small) (参见文献 [21, 第 54 页]). 众所周知, M 是有限表现的当且仅当 $\mathsf{Hom}_R(M, -)$ 保持正向极限 (参见文献 [22, 第 3 节]). 于是, 若 R 为有限维代数, 则任意的有限生成 R- 模均是小的, 因此, 它也是自小的.

命题 2.2 [23,24]　假设 R 是一个 k- 代数且 M 是自小的 R- 模, 则下列叙述等价.

(1) M 是 $*$- 模;

(2) 对于任意短正合列 $0 \to L \to M_0 \to N \to 0$, 其中, $M_0 \in \mathsf{Add}M$, $N \in \mathsf{Gen}M$, 则 $L \in \mathsf{Gen}M$ 当且仅当序列 $0 \to \mathsf{Hom}_R(M, L) \to \mathsf{Hom}_R(M, M_0) \to \mathsf{Hom}_R(M, N) \to 0$ 是正合的.

定理 2.1 [25]　假设 A 是有限维 k- 代数且 $M \in \mathsf{mod}\,A$, 则下列叙述等价.

(1) M 是支撑 τ- 倾斜模;

(2) M 是 τ- 刚性的 $*$- 模.

下面的引理虽然是熟知的, 为了方便读者, 我们仍给出证明.

引理 2.1　假设 A 是有限维 k- 代数, e 是 A 的幂等元. 若 AeA 是投射右 A- 模, 则 Ae 是投射 eAe- 模.

证明　令 $B = eAe$. 设

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0 \tag{2.1}$$

是 $\mathsf{mod}B$ 中的短正合列. 将函子 $\mathsf{Hom}_B(Ae, -)$ 作用于短正合列 (2.1), 则有交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathsf{Hom}_B(Ae, X) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_B(Ae, Y) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathsf{Hom}_B(Ae, Z) \arrow[d, "\cong"] & \\
 & & \mathsf{Hom}_A(G(Ae), G(Y)) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_A(G(Ae), G(Z)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

因为 $G(Ae) \cong AeA$ 且 G 右正合, 故第二行是满的. 因此, 第一行是正合的. 故 Ae 是投射 B- 模.　□

类似地, 也可以证明下面结论.

引理 2.2 假设 A 是有限维 k- 代数, e 是 A 的幂等元. 若 AeA 是投射左 A- 模, 则 eA 是投射左 eAe- 模.

假设 A 是有限维 k- 代数, $B=eAe$, 其中 e 是 A 中的幂等元. 令函子

$$H(-)=\mathsf{Hom}_A(eA,-)=\otimes_A Ae,\quad G(-)=-\otimes_B eA.$$

容易验证, G 将 B 中的投射模映成 A 中的投射模.

引理 2.3 [26] 考虑伴随对 $(G,\ H)$. 余单位映射 $\eta:\mathrm{id}\to HG$ 是自然同构, 即函子 G 是满忠实函子.

注 2.1 函子 G 诱导了 $\mathsf{mod}B$ 到 $\mathsf{Im}G=\{G(M)\in\mathsf{mod}A\mid M\in\mathsf{mod}B\}$ 的范畴等价.

引理 2.4 [11] 假设 A 是有限维 k- 代数, $B=eAe$, 其中 e 是 A 中的幂等元. 下列叙述成立.

(1) 如果 $f:P\to M$ 是 B- 模 M 的投射盖, 那么诱导映射 $f\otimes 1:P\otimes_B eA\to M\otimes_B eA$ 是 A- 模 $M\otimes_B eA$ 的投射盖;

(2) 对于任意 B- 模 M, 存在短正合列

$$0\to\mathsf{Tor}_1^B(M,eA)\to\Omega_B(M)\otimes_B eA\xrightarrow{\sigma}\Omega_A(M\otimes_B eA)\to 0;\tag{2.2}$$

(3) 对于任意 B- 模 M 和正整数 $i\geqslant 1$, 有

$$\mathsf{Hom}_A(eA,\mathsf{Tor}_i^B(M,eA))=0.$$

3 提升支撑 τ- 倾斜模

引理 3.1 假设 A 是有限维 k- 代数, $B=eAe$, 其中 e 是 A 中的幂等元. 对于任意 B- 模 M, 均存在左 B- 模同构 $\Phi_M:e\mathsf{Hom}_B(M,Ae)\cong\mathsf{Hom}_B(M,eAe)$ 并且这个同构对 M 是自然的, 即对于任意态射 $\rho:M\to N$, 有交换图

$$\begin{tikzcd} e\mathsf{Hom}_B(N,Ae) \arrow[r, "\Phi_N"] \arrow[d, "e\mathsf{Hom}_B(\rho,Ae)"'] & \mathsf{Hom}_B(N,eAe) \arrow[d, "\mathsf{Hom}_B(\rho,eAe)"] \\ e\mathsf{Hom}_B(M,Ae) \arrow[r, "\Phi_M"] & \mathsf{Hom}_B(M,eAe). \end{tikzcd}\tag{3.1}$$

证明 对于任意 $f\in\mathsf{Hom}_B(M,Ae)$ 以及 $x\in M$, 定义 $\Phi_M(ef)(x)=ef(x)\in eAe$. 显然, Φ_M 是定义良好的. 其次, 构造 $\Psi_M:\mathsf{Hom}_B(M,eAe)\to e\mathsf{Hom}_B(M,Ae)$. 对于任意 $g\in\mathsf{Hom}_B(M,eAe)$ 以及 $x\in M$, 定义 $\Psi_M(g)(x)=e\overline{g}(x)\in eA$, 其中 $\overline{g}=\iota g$, $\iota:eAe\hookrightarrow Ae$ 是包含映射. 显然, Ψ_M 也是定义良好的. 容易验证, Φ_M 和 Ψ_M 均是 B- 模同态. 下面验证 $\Phi_M\Psi_M=1$, $\Psi_M\Phi_M=1$.

首先, 对于任意 $g\in\mathsf{Hom}_B(M,eAe)$ 以及 $x\in M$, 有

$$\begin{aligned}\Phi_M\Psi_M(g)(x)&=\Phi_M(e\overline{g})(x)=e\overline{g}(x)\quad(\text{不妨令 } g(x)=e\alpha e,\quad \alpha\in A)\\&=e(e\alpha e)=e\alpha e=g(x).\end{aligned}$$

其次, 对于任意 $f\in\mathsf{Hom}_B(M,Ae)$ 以及 $x\in M$, 有

$$\Psi_M\Phi_M(ef)(x)=e\overline{\Phi_M(ef)}(x)=e\iota(\Phi_M(ef)(x))=e\Phi_M(ef)(x)=eef(x)=ef(x).$$

最后, 验证正方形图 (3.1) 的交换性. 对于任意 $f \in \mathsf{Hom}_B(M, Ae)$ 以及 $x \in M$, 有

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}_B(\rho, eAe)\Phi_N(ef)(x) &= \Phi_N(ef)(\rho(x)) = ef\rho(x),\\ \Phi_M e\mathsf{Hom}_B(\rho, eAe)(ef)(x) &= \Phi_M(ef\rho)(x) = ef\rho(x).\end{aligned}$$

证毕. □

令 $\nu_A = D\mathsf{Hom}_A(-, A)$ 为 Nakayama 函子, 其中 $D = \mathsf{Hom}_k(-, k)$ 为 k- 对偶.

引理 3.2 　假设 A 是有限维 k- 代数, $B = eAe$, 其中 e 是 A 中幂等元. 对于任意 B- 模 M, 均有 $\nu_B(M) \cong \nu_A(G(M))e$ 并且这个同构对 M 是自然的.

证明 　注意到 $\nu_A(G(M))e \cong \nu_A(G(M)) \otimes_A Ae$. 由伴随同构, 有

$$\begin{aligned}D(\nu_A(G(M))e) &\cong D(\nu_A(G(M)) \otimes_A Ae)\\ &\cong \mathsf{Hom}_A(\nu_A(G(M)), D(Ae))\\ &\cong \mathsf{Hom}_A(D\mathsf{Hom}_A(M \otimes_B eA, A), D(Ae))\\ &\cong \mathsf{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(Ae, \mathsf{Hom}_A(M \otimes_B eA, A))\\ &\cong \mathsf{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(Ae, \mathsf{Hom}_B(M, \mathsf{Hom}_A(eA, A)))\\ &\cong \mathsf{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(Ae, \mathsf{Hom}_B(M, Ae))\\ &\cong e\mathsf{Hom}_B(M, Ae)\\ &\cong \mathsf{Hom}_B(M, B) \quad (\text{引理 } 3.1).\end{aligned}$$

因此, $\nu_A(G(M))e \cong \nu_B(M)$. □

命题 3.1 　假设 A 是有限维 k- 代数, $B = eAe$, 其中 e 是 A 中的幂等元. 对于任意 B- 模 M, $\tau_B(M) \cong \tau_A(G(M))e$ 并且这个同构对 M 是自然的.

证明 　假设 $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \to M \to 0$ 是 M 的极小投射表现. 断言存在 $G(M)$ 的极小投射表现

$$G(P_1) \to G(P_0) \to G(M) \to 0. \tag{3.2}$$

事实上, 由引理 2.4(1) 可知, 存在短正合列

$$0 \to \Omega_A(G(M)) \to G(P_0) \to G(M) \to 0. \tag{3.3}$$

由短正合列 (2.2), 令 $g = \sigma G(\overline{f}) : G(P_1) \to \Omega_A(G(M))$, 其中 $\overline{f} : P_1 \to \Omega_B(M)$ 是投射盖. 显然, g 是满射. 假设存在 $h : G(P_1) \to G(P_1)$ 使得 $gh = g$. 因为 G 是满忠实的, 所以存在 $h' : P_1 \to P_1$ 使得 $G(h') = h$. 从而, $\sigma G(\overline{f}h' - \overline{f}) = 0$. 将 H 作用在这个等式上, 于是有 $H(\sigma)HG(\overline{f}h' - \overline{f}) = 0$. 根据引理 2.4(3) 知, $H(\sigma)$ 是同构的. 故 $HG(\overline{f}h' - \overline{f}) = 0$. 根据引理 2.3, 有

$$\overline{f}h' - \overline{f} = \eta^{-1}_{\Omega_B(M)} HG(\overline{f}h' - \overline{f})\eta_{P_1} = 0.$$

因此, $\overline{f}h' = \overline{f}$. 再由 $\overline{f}$ 的极小性, 可知 h' 是自同构. 故 g 是右极小的. 因此, g 是投射盖. 将 g 与短正合列 (3.3) 连接可以得到正合列 (3.2).

将 Nakayama 函子 ν_A 作用到正合列 (3.2), 则有正合列

$$0 \to \tau_A(G(M)) \to \nu_A(G(P_1)) \to \nu_A(G(P_0)) \to \nu_A(G(M)) \to 0. \tag{3.4}$$

再将 H 作用到正合列 (3.2), 则有正合列

$$0 \to \tau_A(G(M))e \to \nu_A(G(P_1))e \to \nu_A(G(P_0))e \to \nu_A(G(M))e \to 0.$$

根据引理 3.2, 有交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tau_A(G(M))e \arrow[r] \arrow[d] & \nu_A(G(P_1))e \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \nu_A(G(P_0))e \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \nu_A(G(M))e \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau_B(M) \arrow[r] & \nu_B(P_1) \arrow[r] & \nu_B(P_0) \arrow[r] & \nu_B(M) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

由蛇引理, 可得 $\tau_B(M) \cong \tau_A(G(M))e$. □

推论 3.1 假设 A 是有限维 k- 代数, $B = eAe$, 其中 e 是 A 中的幂等元. 右 B- 模 M 是 τ- 刚性的当且仅当 $G(M)$ 是 τ- 刚性的.

证明 由伴随同构以及命题 3.1, 则有同构

$$\mathsf{Hom}_A(G(M), \tau_A(G(M))) \cong \mathsf{Hom}_B(M, \tau_A(G(M))e) \cong \mathsf{Hom}_B(M, \tau_B(M)).$$

因此, M 是 τ- 刚性的当且仅当 $G(M)$ 是 τ- 刚性的. □

若 $\mathsf{mod}A$ 中只有有限多个基本 τ- 倾斜模的同构类, 则称代数 A 是 τ- 倾斜有限的[13]. 否则, 称代数 A 是 τ- 倾斜无限的. 由文献 [13] 可知, 代数 A 是 τ- 倾斜有限的当且仅当 $\mathsf{mod}A$ 中只有有限多个不可分解 τ- 刚性模的同构类. 根据推论 3.1, 容易得到下面结论.

推论 3.2 假设 A 是有限维 k- 代数, $B = eAe$, 其中 e 是 A 中的幂等元. 若代数 A 是 τ- 倾斜有限的, 则代数 $B = eAe$ 也是 τ- 倾斜有限的.

证明 如果代数 $B = eAe$ 是 τ- 倾斜无限的, 那么由推论 3.1 和注 2.1, 可知代数 A 也是 τ- 倾斜无限的. 因此, 与假设条件矛盾. □

下面给出一个简单的应用.

例 3.1 假设路代数 $A = kQ$, 其中, 箭图 Q 为

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 & 3. \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \end{tikzcd}$$

令 $e = e_2 + e_3$ 为 A 的幂等元, 则 $B = eAe$ 是 Kronecker 代数, 其中 e_i 是对应于箭图中顶点 i 的本原正交幂等元. 由于 B 是 τ- 倾斜无限的, 故代数 A 是 τ- 倾斜无限的.

命题 3.2 假设 A 是有限维 k- 代数, $B = eAe$, 其中 e 是 A 中的幂等元. 如果有限生成右 B- 模 T 是 $*$- 模且 A/AeA 是左投射 A- 模, 则 $G(T)$ 是 A 上的 $*$- 模.

证明 假设 $\mathsf{mod}A$ 中有短正合列

$$0 \to L \to T_0 \to N \to 0, \tag{3.5}$$

其中, $T_0 \in \mathsf{Add}G(T)$, $N \in \mathsf{Gen}G(T)$.

当 $L \in \mathsf{Gen}G(T)$ 时, 因为 H 保持正合且保持直和, 所以 $H(L) \in \mathsf{Gen}T$. 同理, $H(N) \in \mathsf{Gen}T$. 由伴随同构, 则有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathsf{Hom}_A(G(T), L) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathsf{Hom}_A(G(T), T_0) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathsf{Hom}_A(G(T), N) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Hom}_B(T, H(L)) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_B(T, H(T_0)) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_B(T, H(N)).
\end{tikzcd}$$

注意到, $H(T_0) \in \mathsf{Add}T$. 根据命题 2.2 可知, 第二行是短正合的. 故第一行也正合.

假设诱导序列 $0 \to \mathsf{Hom}_A(G(T), L) \to \mathsf{Hom}_A(G(T), T_0) \to \mathsf{Hom}_A(G(T), N) \to 0$ 是正合的. 由伴随同构知,

$$0 \to \mathsf{Hom}_B(T, H(L)) \to \mathsf{Hom}_A(T, H(T_0)) \to \mathsf{Hom}_A(T, H(N)) \to 0$$

是正合的. 因为 T 是 $*$- 模且 $H(T_0) \in \mathsf{Add}T$, $H(N) \in \mathsf{Gen}T$, 所以 $H(L) \in \mathsf{Gen}T$. 现在只需要证明 $L \in \mathsf{Gen}G(T)$.

根据文献 [27, 命题 2.6], 我们有正合列

$$GH(L) \xrightarrow{\mu_L} L \to \mathrm{inc}(L \otimes_A A/AeA) \to 0,$$

其中, $\mu: GH \to \mathrm{id}$ 是伴随对 (G,H) 的单位映射, $\mathrm{inc}: \mathsf{mod}\,A/AeA \to \mathsf{mod}\,A$ 是包含映射. 我们断言 μ_L 是满射. 将函子 $\otimes_A A/AeA$ 作用于短正合列 (3.5), 有

$$\mathsf{Tor}_A^1(N, A/AeA) \to L \otimes_A A/AeA \to T_0 \otimes_A A/AeA \to N \otimes_A A/AeA \to 0.$$

因为 $T_0 \in \mathsf{Add}G(T)$, 所以 $T_0 \otimes_A A/AeA = 0$. 由假设条件可知 A/AeA 是投射左 A- 模. 从而,

$$\mathsf{Tor}_A^1(N, A/AeA) = 0.$$

于是, $L \otimes_A A/AeA = 0$. 故断言成立. 因为 G 是右正合的且 $\mathsf{Gen}G(T)$ 保持满同态像封闭, 所以 $L \in \mathsf{Gen}G(T)$. 从而, 根据命题 2.2 可知, $G(T)$ 是 $*$- 模. □

定理 3.1　假设 A 是有限维 k- 代数, $B = eAe$, 其中 e 是 A 中使得 A/AeA 是左投射 A- 模的幂等元, 则有限生成右 B- 模 T 是支撑 τ- 倾斜模当且仅当 $G(T)$ 是 A 上的支撑 τ- 倾斜模.

证明　假设 T 是支撑 τ- 倾斜模. 根据定理 2.1、命题 3.2 和推论 3.1, 可得 $G(T)$ 是 A 上的支撑 τ- 倾斜模.

假设 $G(T)$ 是 A 上的支撑 τ- 倾斜模. 根据定理 2.1 和推论 3.1, 只需要证明 T 是 $*$- 模. 由假设条件可知 A/AeA 是投射左 A- 模. 因此, 存在左 A- 模同构 $A \cong AeA \oplus A/AeA$. 故 AeA 是投射左 A- 模. 根据命题 2.2 可知, eA 是投射左 B- 模. 因此, $G = - \otimes_B eA$ 是正合函子.

假设

$$0 \to L \to T_0 \to N \to 0 \tag{3.6}$$

是 $\mathsf{mod}\,A$ 中的短正合列, 其中, $T_0 \in \mathsf{Add}T$, $N \in \mathsf{Gen}T$.

若 $L \in \mathsf{Gen}T$, 则 $G(L) \in \mathsf{Gen}G(T)$. 因为 $G = - \otimes_B eA$ 是正合函子, 所以有正合列

$$0 \to G(L) \to G(T_0) \to G(N) \to 0. \tag{3.7}$$

注意到 G 是满忠实的. 应用函子 $\mathsf{Hom}_A(T, -)$ 到正合列 (3.6), 则有交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathsf{Hom}_B(T, L) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathsf{Hom}_B(T, T_0) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathsf{Hom}_B(T, N) \arrow[d, "\cong"] & \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Hom}_A(G(T), G(L)) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_A(G(T), G(T_0)) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_A(G(T), G(N)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

因为 $G(T)$ 是 A 上的支撑 τ- 倾斜模且 $G(T_0)\in \mathsf{Add}G(T)$, $G(N)\in \mathsf{Gen}G(T)$, 所以第二行是正合的. 因此, 第一行是正合的.

假设 $0\to \mathsf{Hom}_A(T,L)\to \mathsf{Hom}_A(T,T_0)\to \mathsf{Hom}_A(T,N)\to 0$ 是正合的. 应用函子 $\mathsf{Hom}_A(T,-)$ 到正合列 (3.7), 则有交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathsf{Hom}_A(G(T),G(L)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathsf{Hom}_A(G(T),G(T_0)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathsf{Hom}_A(G(T),G(N)) \arrow[d, "\cong"] & \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Hom}_B(T,L) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_B(T,T_0) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_B(T,N) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

因此, 第一行是正合的. 注意到 $G(T_0)\in \mathsf{Add}G(T)$, $G(N)\in \mathsf{Gen}G(T)$ 且 $G(T)$ 是 A 上的支撑 τ- 倾斜模. 因此, $G(L)\in \mathsf{Gen}G(T)$. 故 $L\in \mathsf{Gen}T$. 于是 T 是 $*$- 模. □

例 3.2 [2] 假设有限维代数 $A=kQ/\langle\alpha\beta\rangle$, 其中, 箭图 Q 为

$$1\xrightarrow{\alpha}2\xrightarrow{\beta}3.$$

令 $e=e_2+e_3$ 为 A 的幂等元, $B=eAe$, 其中 e_i 是对应于箭图中顶点 i 的本原正交幂等元. 注意到左 A- 模 $A/AeA\cong S(1)$ 是单投射模, 并注意到 $eA=eAe$. 因此, 左 B- 模 $eA\cong B$. 于是, 对于 $\mathsf{mod}B$ 中任意支撑 τ- 倾斜模 T, $G(T)\cong T$ 是 A 上的支撑 τ- 倾斜模. 记 $\mathrm{H}(A)$ 为代数 A 的 Hasse 箭图. 虚线标记部分即是代数 B 的 Hasse 箭图.

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\oplus\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\oplus 2 \arrow[r] \arrow[drr] & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\oplus 2 \arrow[r] \arrow[drr] & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\oplus 1 \arrow[r] & 1 \arrow[dr] & \\
\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\oplus\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\oplus 3 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\oplus 1\oplus 3 \arrow[ur] \arrow[r] & 1\oplus 3 \arrow[ur] \arrow[drr] & \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\oplus 2 \arrow[r, dashed] & 2 \arrow[r, dashed] & 0. \\
 & \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\oplus 3 \arrow[urr, dashed] \arrow[rrr, dashed] & & & 3 \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

例 3.3 假设有限维代数 $A=kQ/\langle\alpha\beta,\gamma\delta\rangle$, 其中, 箭图 Q 为

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1 & 3 \arrow[l, "\delta"] & 4. \arrow[l, "\gamma"] \arrow[ul, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

令 $e=e_1+e_2+e_3$ 为 A 的幂等元, $B=eAe$, 其中 e_i 是对应于箭图中顶点 i 的本原正交幂等元. 注意到有投射左 A- 模同构 $A/AeA\cong Ae_4$, 即 A/AeA 是投射左 A- 模. 令 $\mathsf{mod}B$ 中支撑 τ- 倾斜模 $T=\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$. $G(T)\cong T$ 是 A 上的支撑 τ- 倾斜模.

4 限制支撑 τ- 倾斜模

命题 4.1 假设 A 是有限维 k- 代数, e 是 A 的幂等元使得 eAe 和 A/AeA 是遗传代数, T 是 τ- 刚性右 A- 模. 若 A/AeA 是投射右 A- 模且 $\mathsf{pd}_{A^{\mathrm{op}}}A/AeA\leqslant 1$, 则 $H(T)$ 是 $\mathsf{mod}eAe$ 中 τ- 刚性模.

证明　不妨假设 $H(T)\neq 0$. 设 $B=eAe$. 因为 A/AeA 是投射右 A- 模且 $\mathsf{pd}_{A^{\rm op}}A/AeA\leqslant 1$, 所以 AeA 既是投射左 A- 模又是投射右 A- 模. 故存在投射双 A- 模 E 使得有双 A- 模同构 $A^{(n)}\cong AeA\oplus E$. 再由命题 3.1 以及伴随公式, 则有同构

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}_B(H(T),\tau_B(H(T)))\cong&\mathsf{Hom}_B(T\otimes_A Ae,\mathsf{Hom}_A(eA,\tau_A(GH(T))))\\ \cong&\mathsf{Hom}_A(T\otimes_A AeA,\tau_A(GH(T))).\end{aligned}$$

因此, $\mathsf{Hom}_A(T\otimes_A AeA,\tau_A(GH(T)))$ 是 $\mathsf{Hom}_A(T,\tau_A(GH(T)))$ 的直和项.

根据引理 2.2 可知, eA 是投射左 B- 模. 故 $G=-\otimes_B eA$ 是正合函子. 因为 B 是遗传代数, 所以 $\mathsf{pd}_B H(T)\leqslant 1$. 设 $0\to P_1\to P_0\to H(T)\to 0$ 是 $H(T)$ 的投射分解, 其中 P_i 是投射右 B- 模. 因为 $G=-\otimes_B eA$ 保持投射模, 所以 $0\to G(P_1)\to G(P_0)\to GH(T)\to 0$ 是 $GH(T)$ 的投射分解. 于是, $\mathsf{pd}_A GH(T)\leqslant 1$. 因此,

$$D\mathsf{Hom}_A(T,\tau_A(GH(T)))\cong \mathsf{Ext}^1_A(GH(T),T).$$

因为 $G=-\otimes_B eA$ 是正合函子, 所以根据文献 [27, 引理 5.2] 可知, 存在短正合列

$$0\to GH(T)\to T\to \mathrm{inc}(T\otimes_A A/AeA)\to 0,\tag{4.1}$$

其中 $\mathrm{inc}=-\otimes_{A/AeA}A/AeA$. 由 A/AeA 是投射右 A- 模且 $(\mathrm{inc},\mathsf{Hom}_A(A/AeA,-))$ 是伴随对, 可知 inc 保持投射模. 因为 A/AeA 是遗传代数, 所以 $\mathsf{pd}_A\mathrm{inc}(T\otimes_A A/AeA)\leqslant 1$. 于是, 将函子 $\mathsf{Hom}_A(-,T)$ 作用于短正合列 (4.1), 有正合列

$$\mathsf{Ext}^1_A(T,T)\to\mathsf{Ext}^1_A(GH(T),T)\to\mathsf{Ext}^2_A(\mathrm{inc}(T\otimes_A A/AeA),T)=0.$$

因为 T 是 τ- 刚性右 A- 模, 所以 $\mathsf{Ext}^1_A(T,T)=0$. 故 $\mathsf{Ext}^1_A(GH(T),T)=0$. 从而可知

$$\mathsf{Hom}_B(H(T),\tau_B(H(T)))=0.$$

证毕. □

命题 4.2　假设 A 是有限维 k- 代数, $B=eAe$, 其中 e 是 A 中的幂等元. 有限生成右 A- 模 M 是 $*$- 模. 若 A/AeA 是投射右 A- 模, 则 $H(M)$ 是 $\mathsf{mod}B$ 中 $*$- 模.

证明　设

$$0\to L\to M_0\to N\to 0\tag{4.2}$$

是 $\mathsf{mod}eAe$ 中的短正合列, 其中, $M_0\in\mathsf{Add}H(M)$, $N\in\mathsf{Gen}H(M)$.

假设 $L\in\mathsf{Gen}H(M)$, 即存在 λ 使得有满态射 $H(M)^{(\lambda)}\to L$. 由假设条件, 有右 A- 模同构

$$A\cong AeA\oplus A/AeA.$$

由伴随同构, 有

$$\mathsf{Hom}_B(Ae,H(M))=\mathsf{Hom}_B(Ae,\mathsf{Hom}_A(eA,M))\cong\mathsf{Hom}_A(Ae\otimes_B eA,M)\cong\mathsf{Hom}_A(AeA,M).$$

因此, 右 A- 模 $\mathsf{Hom}_B(Ae,H(M))$ 是 M 的直和项. 根据引理 2.1, 可得右 B- 模 Ae 是投射的. 因为 Ae 是有限生成的, 所以 $\mathsf{Hom}_B(Ae,-)$ 保持直和. 从而, $\mathsf{Hom}_B(Ae,M_0)\in\mathsf{Add}M$. 由 $\mathsf{Hom}_B(Ae,-)$ 是正

合函子, 可知态射 $\mathsf{Hom}_B(Ae,H(M))^{(\lambda)}\to\mathsf{Hom}_B(Ae,L)$ 是满的. 故 $\mathsf{Hom}_B(Ae,L)\in\mathsf{Gen}M$. 同理可证 $\mathsf{Hom}_B(Ae,N)\in\mathsf{Gen}M$. 将函子 $\mathsf{Hom}_B(H(M),-)$ 作用于正合列 (4.2), 根据伴随同构, 则有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathsf{Hom}_B(H(M),L) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathsf{Hom}_B(H(M),M_0) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathsf{Hom}_B(H(M),N) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Hom}_A(M,\mathsf{Hom}_B(Ae,L)) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_A(M,\mathsf{Hom}_B(Ae,M_0)) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_A(M,\mathsf{Hom}_B(Ae,N)).
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

因为 M 是 $*$- 模, 所以第二行是正合的. 因此, 第一行也是正合的.

现在假设

$$0\to\mathsf{Hom}_B(H(M),L)\to\mathsf{Hom}_B(H(M),M_0)\to\mathsf{Hom}_B(H(M),N)\to 0 \tag{4.4}$$

是正合的. 由交换图 (4.3) 可知,

$$0\to\mathsf{Hom}_A(M,\mathsf{Hom}_B(Ae,L))\to\mathsf{Hom}_A(M,\mathsf{Hom}_B(Ae,M_0))\to\mathsf{Hom}_A(M,\mathsf{Hom}_B(Ae,N))\to 0$$

是正合的. 因此, $\mathsf{Hom}_B(Ae,L)\in\mathsf{Gen}M$. 于是, 存在 λ 使得有满态射 $M^{(\lambda)}\to\mathsf{Hom}_B(Ae,L)$. 将正合函子 H 作用于此态射, 我们有满态射 $H(M)^{(\lambda)}\to H(\mathsf{Hom}_B(Ae,L))$. 由伴随同构, 则有同构

$$H(\mathsf{Hom}_B(Ae,L))=\mathsf{Hom}_A(eA,\mathsf{Hom}_B(Ae,L))\cong\mathsf{Hom}_B(eA\otimes_A Ae,L)\cong\mathsf{Hom}_B(B,L)\cong L.$$

因此, $L\in\mathsf{Gen}H(M)$. 综上所述, $H(M)$ 是 $\mathsf{mod}eAe$ 中 $*$- 模. □

定理 4.1 假设 A 是有限维 k- 代数, $B=eAe$, 其中, e 是 A 的幂等元, T 是支撑 τ- 倾斜 A- 模. 下列结论成立.

(1) 假设 B 和 A/AeA 是遗传代数. 若 A/AeA 是投射右 A- 模且 $\mathsf{pd}_{A^{\rm op}}A/AeA\leqslant 1$, 则 $H(T)$ 是 $\mathsf{mod}B$ 中支撑 τ- 倾斜模;

(2) 若 $H(T)=0$, 则 T 是支撑 τ- 倾斜右 A/AeA- 模;

(3) 代数 A/AeA 的 Hasse 箭图 $\mathrm{H}(A/AeA)$ 是代数 A 的 Hasse 箭图的满子箭图.

证明 (1) 由命题 4.1、4.2 和定理 2.1 可知 $H(T)$ 是支撑 τ- 倾斜模.

(2) 因为 $Te=0$, 所以 T 是右 A/AeA- 模且 $AeA\subseteq\mathsf{ann}_AT$. 故

$$\mathsf{ann}_{A/AeA}T=(\mathsf{ann}_AT)/AeA.$$

注意到 T 是支撑 τ- 倾斜右 A- 模当且仅当 T 是倾斜右 A/ann_AT- 模. 由第三同构定理, 可得

$$A/\mathsf{ann}_AT\cong(A/AeA)/(\mathsf{ann}_AT/AeA)=(A/AeA)/\mathsf{ann}_{A/AeA}T.$$

从而, T 是支撑 τ- 倾斜右 A/AeA- 模.

(3) 结论显然. □

推论 4.1 假设 A 是有限维遗传 k- 代数, $B=eAe$, 其中, e 是 A 的幂等元, T 是支撑 τ- 倾斜右 A- 模. 若 A/AeA 是投射右 A- 模, 则 $H(T)$ 是 $\mathsf{mod}B$ 中支撑 τ- 倾斜模.

证明 因为 A 是遗传代数, 所以 eAe 和 A/AeA 也是遗传代数, 且 $\mathsf{pd}_{A^{\rm op}}A/AeA\leqslant 1$. 故由定理 4.1, 可得结论. □

例 4.1 [2]　假设有限维代数 $A=kQ/\langle\alpha\beta\rangle$, 其中, 箭图 Q 为

$$1\xrightarrow{\alpha}2\xrightarrow{\beta}3.$$

令 $e=e_1$ 为 A 的幂等元, $B=eAe\cong k$, $A/AeA\cong k(2\to 3)$, 其中 e_1 是对应于箭图中顶点 1 的本原正交幂等元. 注意到作为左 A- 模 $A/AeA\cong {\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}}\oplus 2$. 容易计算得到 $\mathsf{pd}_{A^{\rm op}}A/AeA\leqslant 1$. $H(s\tau\text{-tilt}A)=1$, 其中 $s\tau$-tilt$A$ 表示所有基本的支撑 τ- 倾斜右 A- 模构成的集合. 记 $\mathrm{H}(A)$ 为代数 A 的 Hasse 箭图. 虚线标记部分即是代数 A/AeA 的 Hasse 箭图.

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{matrix}1\\2\end{matrix}\oplus\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\oplus 2 \arrow[r] \arrow[drr] & \begin{matrix}1\\2\end{matrix}\oplus 2 \arrow[r] \arrow[drr] & \begin{matrix}1\\2\end{matrix}\oplus 1 \arrow[r] & 1 \arrow[dr] & \\
\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\oplus\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\oplus 3 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{matrix}1\\2\end{matrix}\oplus 1\oplus 3 \arrow[ur] \arrow[r] & 1\oplus 3 \arrow[ur] \arrow[drr] & \begin{matrix}2\\3\end{matrix}\oplus 2 \arrow[r, dashed] & 2 \arrow[r, dashed] & 0. \\
 & \begin{matrix}2\\3\end{matrix}\oplus 3 \arrow[urr, dashed] \arrow[rrr, dashed] & & & 3 \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

致谢　作者们感谢舍布鲁克大学 (Université de Sherbrooke) 刘石平教授的悉心指导, 衷心地感谢审稿人的仔细审阅并提出宝贵建议.

参考文献

1 Brenner S, Butler M C R. Generalization of the Bernstein-Gel'fand-Ponomarev reflection functors. In: Representation Theory II. Lecture Notes in Mathematics, vol. 832. Berlin-Heidelberg: Springer, 1980, 103–169

2 Adachi T, Iyama O, Reiten I. τ-tilting theory. Compos Math, 2014, 150: 415–452

3 Keller B, Vossieck D. Aisles in derived categories. Bull Soc Math Belg Sér A, 1988, 40: 239–253

4 Auslander M, Smalø S O. Almost split sequences in subcategories. J Algebra, 1981, 69: 426–454

5 Buan A B, Marsh R, Reineke M, et al. Tilting theory and cluster combinatorics. Adv Math, 2006, 204: 572–618

6 Keller B. On triangulated orbit categories. Doc Math, 2005, 10: 551–581

7 Ingalls C, Paquette C. Homological behavior of idempotent subalgebras and Ext algebras. Sci China Math, 2020, 63: 309–320

8 Auslander M. Representation dimension of Artin algebras. In: Selected Works of Maurice Auslander, Part 1. Providence: Amer Math Soc, 1999, 505–574

9 Iyama O. Finiteness of representation dimension. Proc Amer Math Soc, 2003, 131: 1011–1014

10 Dlab V, Ringel C M. Every semiprimary ring is the endomorphism ring of a projective module over a quasi-hereditary ring. Proc Amer Math Soc, 1989, 107: 1–5

11 Xi C C. On the finitistic dimension conjecture, III: Related to the pair $eAe\subseteq A$. J Algebra, 2008, 319: 3666–3688

12 Fuller K R, Saorín M. On the finitistic dimension conjecture for artinian rings. Manuscripta Math, 1992, 74: 117–132

13 Demonet L, Iyama O, Jasso G. τ-tilting finite algebras, bricks, and g-vectors. Int Math Res Not IMRN, 2019, 2019: 852–892

14 Zito S. τ-Tilting finite algebras with non-empty left or right parts are representation-finite. arXiv:2006.06655, 2020

15 Iyama O, Zhang X J. Classifying τ-tilting modules over the Auslander algebra of $K[x]/(x^n)$. J Math Soc Japan, 2020, 72: 731–764

16 Adachi T. The classification of τ-tilting modules over Nakayama algebras. J Algebra, 2016, 452: 227–262

17 Obaid M, Nauman S, Fakieh W, et al. The number of support tilting modules for a Dynkin algebra. J Integer Sequences, 2015, 18: Article 15.10.6

18 Jasso G. Reduction of τ-tilting modules and torsion pairs. Int Math Res Not IMRN, 2015, 2015: 7190–7237

19 Ma X, Xie Z Z, Zhao T W. Support τ-tilting modules and recollements. Colloq Math, 2022, 167: 303–328

20 Menini C, Orsatti A. Representable equivalences between categories of modules and applications. Rend Sem Mat Univ Padova, 1989, 82: 203–231

21 Bass H. Algebraic K-Theory. New York: W A Benjamin, 1968
22 Lenzing H. Endlich präsentierbare Moduln. Arch Math (Basel), 1969, 20: 262–266
23 Wei J Q. n-star modules and n-tilting modules. J Algebra, 2005, 283: 711–722
24 Colpi R. Some remarks on equivalences between categories of modules. Comm Algebra, 1990, 18: 1935–1951
25 Wei J Q. τ-tilting theory and $*$-modules. J Algebra, 2014, 414: 1–5
26 Bravo D, Paquette C. Idempotent reduction for the finitistic dimension conjecture. Proc Amer Math Soc, 2020, 148: 1891–1900
27 Psaroudakis C. Homological theory of recollements of abelian categories. J Algebra, 2014, 398: 63–110

The support τ-tilting modules over idempotent subalgebras

Yonggang Hu & Panyue Zhou

Abstract Let A be a finite-dimensional k-algebra and e be an idempotent of A. In this paper, we show that if A/AeA is a projective left A-module, then a finitely generated right eAe-module T is a support τ-tilting module if and only if $T \otimes_{eAe} eA$ is a support τ-tilting A-module. On the other hand, if A is a hereditary algebra, T is a support τ-tilting A-module and A/AeA is a projective right A-module, then $\mathsf{Hom}_A(eA, T)$ is a support τ-tilting eAe-module. As an application, we prove that if A is τ-tilting finite, then eAe is also τ-tilting finite.

Keywords **support τ-tilting module, τ-tilting finite, $*$-module, idempotent subalgebra**

MSC(2020) **16G10, 16G20, 16E65**

doi: 10.1360/SSM-2020-0291