

# 曲率单调 Bézier 曲线 G1 插值算法及应用

何 川<sup>1,2</sup>, 赵 罡<sup>1,2</sup>, 王 伟<sup>1</sup>, 王爱增<sup>1,2</sup>

(1. 北京航空航天大学机械工程及自动化学院, 北京 100191;  
2. 北京航空航天大学虚拟现实技术与系统国家重点实验室, 北京 100191)

**摘 要:** 基于曲率单调的 Bézier 曲线, 提出了一种精确而高效的满足 G1 约束的样条曲线插值算法。给定首尾插值数据点位置及方向角, 利用曲率单调 Bézier 曲线的几何设计准则, 求解非线性方程组, 构造满足 G1 插值条件的曲率单调 Bézier 曲线。与基于欧拉螺旋线的插值算法相比, 本文方法构造简单、插值精确, 与现有的 NURBS 方法兼容。基于分段拼接, 该算法能够处理给定点列及首尾切线方向的插值问题, 具有较强的适应性与通用性。

**关 键 词:** 曲率单调; Bézier 曲线; G1 插值; 欧拉螺旋线

中图分类号: TP 391

DOI: 10.11996/JGJ.2095-302X.2021040644

文献标识码: A

文章编号: 2095-302X(2021)04-0644-07

## G1 interpolation algorithm and application of Bézier curves with monotone curvature

HE Chuan<sup>1,2</sup>, ZHAO Gang<sup>1,2</sup>, WANG Wei<sup>1</sup>, WANG Ai-zeng<sup>1,2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Beihang University, Beijing 100191, China;

2. State Key Laboratory of Virtual Reality Technology & Systems, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** Based on the Bézier curve with monotone curvature, this paper presented an accurate and efficient spline interpolation algorithm satisfying G1 constraint. With the given two point-orientation pairs, the construction was to solve the nonlinear equations using the geometric design criteria of monotone curvature, so as to obtain the Bézier curve satisfying the G1 interpolation condition. Compared with the interpolation algorithm based on Euler spiral, the advantages of the proposed method are as follows: simple construction, accurate calculation, and compatibility with the existing NURBS. Based on the idea of piecewise, this algorithm can deal with the interpolation problems of a given sequence of points and the direction of head and tail tangents, manifesting stronger adaptability and universality.

**Keywords:** monotone curvature; Bézier curve; G1 interpolation; Euler spiral

在道路设计、路径规划等问题中, 需要避免车辆行驶过程中的突然转向, 因此设计师致力于构造曲率连续变化的缓和曲线。欧拉螺旋线(Euler spiral)具有曲率随弧长线性变化的特点, 被广泛应用于路

径规划<sup>[1-3]</sup>、曲线过渡<sup>[4-5]</sup>、形状修复等问题中<sup>[6-8]</sup>, 然而, 欧拉螺旋线采用超越方程的形式定义, 求解困难, 因此出现了许多利用多项式曲线或有理多项式曲线来近似欧拉螺旋线的方法<sup>[9-11]</sup>。

收稿日期: 2020-12-11; 定稿日期: 2021-01-21

Received: 11 December, 2020; Finalized: 21 January, 2021

基金项目: 国家自然科学基金项目(61572056; 61972011); 浙江大学CAD & CG国家重点实验室开放课题(A2024)

Foundation items: National Natural Science Foundation of China (61572056; 61972011); Open Project Program of the State Key Lab of CAD & CG Zhejiang University (A2024)

第一作者: 何 川(1994-), 男, 安徽宣城人, 博士研究生。主要研究方向为 Class A 曲线曲面。E-mail: hc1994@buaa.edu.cn

First author: HE Chuan (1994-), male, PhD candidate. His main research interest covers Class A curves and surfaces. E-mail: hc1994@buaa.edu.cn

通信作者: 王爱增(1982-), 男, 河北邯郸人, 副教授, 博士。主要研究方向为几何造型、小波分析等。E-mail: azwang@buaa.edu.cn

Corresponding author: WANG Ai-zeng (1982-), male, associate professor, Ph.D. His main research interests cover geometry processing, wavelet analysis, etc. E-mail: azwang@buaa.edu.cn

除了欧拉螺旋线, 多项式曲线也常常用来设计缓和曲线。文献[12-14]采用了平面三次 Bézier 螺旋线构造过渡曲线, 并对文献[12,14]内容进行了推广, 增加了 Bézier 螺旋线的自由度<sup>[15-16]</sup>。

由于螺旋线的曲率随弧长线性变化, 这一约束使得螺旋线的构造十分困难, 工程实际中如果能够保证曲率单调递增或递减, 则认为得到了符合光顺性要求的美学曲线。2006 年, FARIN<sup>[17]</sup>利用 Class A 矩阵表示 Bézier 曲线控制边之间的几何关系, 提出了一种构造曲率单调变化(monotone curvature variation, MCV) Bézier 曲线的方法, 不过该理论被 CAO 和 WANG<sup>[18]</sup>证明不够完善, WANG 和 ZHAO<sup>[19]</sup>给出了反例, 并基于几何方法证明了一类平面任意次 Bézier 曲线曲率单调的一个充分必要准则<sup>[20]</sup>。针对欧拉螺旋线 G1 插值时的效率与精度问题, 本文提出了一种可满足 G1 插值条件的 MCV Bézier 曲线构造方法, 并与基于欧拉螺旋线的插值方法进行了对比, 相关的数值实例证明了本文方法的有效性与实用性; 且相比于文献[21]采用曲率单调的 B 样条曲线实现 G1 插值, 本文构造方法简单直观, 曲线弯曲度更好, 算法的适用性与通用性更强。本文算法与图例均在 Windows 10 系统下由 MATLAB 语言实现。

## 1 欧拉螺旋线与 MCV Bézier 曲线

### 1.1 欧拉螺旋线

欧拉螺旋线, 又称为羊角螺旋线(cornu spiral)或回旋线(clothoid), 其曲率  $\kappa$  可表示为弧长  $L$  的线性函数, 即

$$\kappa(L) = \kappa_0 + \sigma L, \quad \kappa_0, \sigma \in \mathbb{R} \quad (1)$$

其中,  $\kappa_0$  为  $L=0$  时的初始曲率值;  $\sigma$  为欧拉螺旋线的曲率变化率。欧拉螺旋线的切线方向或旋转角  $\theta$  关于弧长的表达式为<sup>[6]</sup>

$$\theta(L) = \theta_0 + \kappa_0 L + \frac{\sigma L^2}{2}, \quad \theta_0, \kappa_0, \sigma \in \mathbb{R} \quad (2)$$

对于规范化的欧拉螺旋线(图 1), 其参数形式为

$$\begin{cases} x = x_0 + C(L) \\ y = y_0 + S(L) \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $C(L)$  与  $S(L)$  为菲涅尔积分(Fresnel integral)<sup>[22]</sup>, 其表达式为

$$\begin{cases} C(L) = \int_0^L \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt \\ S(L) = \int_0^L \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt \end{cases} \quad (4)$$

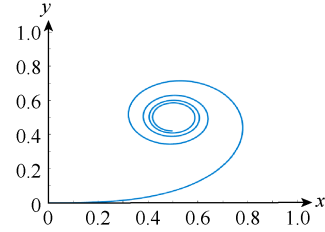


图 1 规范化的欧拉螺旋线,  $(x_0, y_0)=(0,0)$ ,  $L=4$

Fig. 1 Normalized Euler spiral,  $(x_0, y_0)=(0,0)$ ,  $L=4$

### 1.2 MCV Bézier 曲线

定理 1. 平面  $k$  次 Bézier 曲线定义式为

$$P(t) = \sum_{i=0}^k b_i B_{i,k}(t), \quad t \in [0,1] \quad (5)$$

其中,  $b_i$  为曲线控制顶点;  $B_{i,k}(t)$  为  $k$  次伯恩斯坦多项式。令  $\Delta b_i = M \cdot \Delta b_{i-1} = s \cdot R_\theta \cdot \Delta b_{i-1}$ , 其中,  $\Delta b_i = b_{i+1} - b_i$  为曲线控制边矢量;  $s$  为一个正比例因子;  $R_\theta$  为旋转角为  $\theta$  ( $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ) 的二阶旋转矩阵。由文献[20]

可知, 曲线  $P(t)$  是 MCV Bézier 曲线的充要条件为

$$\begin{cases} s \cdot \cos \theta \geq 1, & s \geq 1 \\ s \leq \cos \theta, & 0 < s < 1 \end{cases} \quad (6)$$

且当比例因子  $s \geq 1$  时, 曲线  $P(t)$  具有单调递减的曲率; 当  $0 < s < 1$  时, 曲率单调递增。图 2 显示了  $s \geq 1$  时的一条曲率单减的三次 Bézier 曲线及其对应的曲率梳。

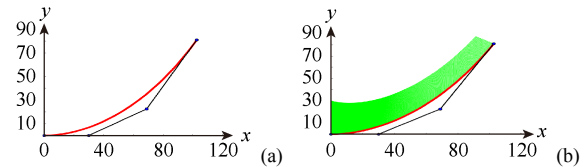


图 2 曲率单调递减的三次 Bézier 曲线及其曲率梳,

$s=1.5$ ,  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ,  $V_0=(20,0)$  ((a)三次 MCV Bézier 曲线;

(b)曲线的曲率梳)

Fig. 2 Cubic MCV Bézier curve with decreasing curvature and corresponding curvature comb,  $s=1.5$ ,  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ,  $V_0=(20,0)$  ((a)

Cubic MCV Bézier curve; (b) Corresponding curvature comb)

## 2 MCV Bézier 曲线 G1 插值

定理 2. 给定 2 个插值端点  $P_A(x_A, y_A)$  和  $P_B(x_B, y_B)$ , 及其相应的方向角  $\theta_A$  和  $\theta_B$ , 存在符合边界约束的  $k$  次 MCV Bézier 曲线的充分条件为

$$\begin{cases} x_A + \sum_{i=1}^k \|V_0\| \cdot s^{i-1} \cdot \cos(\theta_A + (i-1) \cdot \theta) = x_B \\ y_A + \sum_{i=1}^k \|V_0\| \cdot s^{i-1} \cdot \sin(\theta_A + (i-1) \cdot \theta) = y_B \end{cases} \quad (7)$$

具有满足  $s \cdot \cos \theta \geq 1 (s \geq 1)$  或  $s \leq \cos \theta (0 < s < 1)$  的实数解, 其中,  $\theta = (\theta_B - \theta_A) / (k-1)$ , 方向角  $\theta_A$  和  $\theta_B$  以实际绕过的圈数计算, 可大于  $2\pi$ 。  $\|V_0\|$  和  $s$  是未知变量。

**证明.** 对于次数  $k$  一定时,  $\theta = (\theta_B - \theta_A) / (k-1)$  即为构造 MCV Bézier 曲线的旋转角度, 若方程组存在满足  $s \cdot \cos \theta \geq 1 (s \geq 1)$  或  $s \leq \cos \theta (0 < s < 1)$  的实数解, 即满足定理 1 要求的 MCV 条件, 则由此构造的 Bézier 曲线曲率必单调。 **证毕.**

下面分析边界约束条件对 MCV Bézier 曲线解的存在性的影响。

由于 Bézier 曲线的仿射不变性, 故可将其中一个端点  $P_A$  固定在原点, 其方向角  $\theta_A$  作为  $X$  轴正方向, 并以此建立直角坐标系, 则  $P_A = (0, 0)$ ,  $\theta_A = 0$ , 记 2 端点连线与  $X$  轴正方向的夹角为  $\theta'$  (图 3), 为讨论方便, 本文仅讨论  $P_B$  位于第一象限的情形, 即  $x_B > 0, y_B > 0$ 。

## 2.1 次数 $k=2$

**命题 1.** 对于次数  $k=2$ , ①若  $\frac{y_B}{x_B} \geq \frac{\tan(\theta_B)}{2}$ , 则方程组有满足 MCV 条件的解, 且  $s \geq 1$ ; ②当

$\frac{y_B}{x_B} < \frac{\tan(\theta_B)}{2 + \tan^2(\theta_B)}$  时有  $0 < s < 1$  的 MCV Bézier 曲线解; ③其他条件下, 方程组无 MCV Bézier 曲线的解。

**证明.** 对于二次 Bézier 曲线, 给定首末端点  $P_A = (0, 0)$ ,  $P_B$  及对应方向角  $\theta_A = 0, \theta_B$ , 则中间控制顶点应当为  $\theta_A$  正向延长线与  $\theta_B$  反向延长线的交点, 且相邻控制边之间的转角  $\Delta\theta = \theta_B - \theta_A = \theta_B$ 。下面分别对  $\theta_B$  取值  $\theta_B < \theta'$ ,  $\theta_B > \frac{\pi}{2}$  及  $\theta' < \theta_B < \frac{\pi}{2}$  时进行讨论。

(1) 当  $\theta_B < \theta'$  时,  $\theta_A$  正向延长线与  $\theta_B$  反向延长线无交点(图 3), 因此不存在相应的 MCV Bézier 曲线;

(2) 当  $\theta_B > \frac{\pi}{2}$  时, 则相邻控制边之间的转角大于  $\frac{\pi}{2}$  (图 4), 不符合 MCV Bézier 曲线相邻控制边转角小于  $\frac{\pi}{2}$  的要求, 故此时无解;

(3) 当  $\theta' < \theta_B < \frac{\pi}{2}$  时,  $\theta_B$  的反向延长线与  $X$  轴交点  $Q$  即为中间控制顶点(图 5), 且  $\theta = \theta_B$ ,  $s = \frac{\|QP_B\|}{\|OQ\|}$ 。

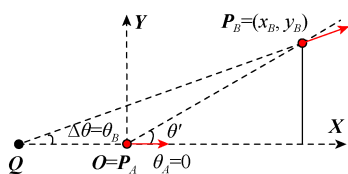


图 3  $\theta_B < \theta'$ , 无解

Fig. 3  $\theta_B < \theta'$ , no solution exists

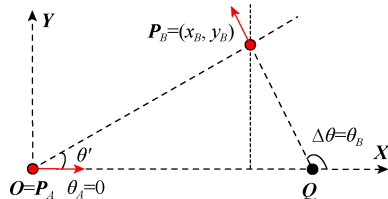


图 4  $\theta_B > \frac{\pi}{2}$ , 无解

Fig. 4  $\theta_B > \frac{\pi}{2}$ , no solution exists

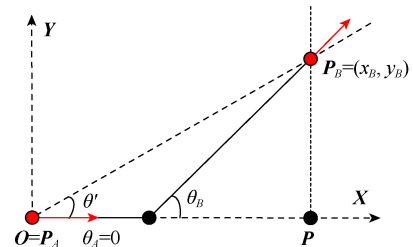


图 5 二次 MCV Bézier 曲线控制边

Fig. 5 The control edge of quadratic MCV Bézier curve

当  $s \geq 1$  时, MCV Bézier 曲线的解应满足  $s \cdot \cos \theta \geq 1$ , 即

$$\begin{cases} \frac{\|QP_B\|}{\|OQ\|} \geq 1 \\ \frac{\|QP_B\|}{\|OQ\|} \cdot \cos \theta_B \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\|QP_B\|}{\|OQ\|} \cdot \cos \theta_B \geq 1.$$

由图 5 可知,  $\|QP_B\| = y_B / \sin \theta_B$ ,  $\|OQ\| = \|OP\| - \|QP\| = x_B - y_B / \tan \theta_B$ , 则  $\frac{\|QP_B\|}{\|OQ\|} \cdot \cos \theta_B \geq 1$  等价于  $\frac{y_B / \sin \theta_B}{x_B - y_B / \tan \theta_B} \cdot \cos \theta_B \geq 1$ , 可简化为  $\frac{y_B}{x_B} \geq \frac{\tan(\theta_B)}{2}$ 。

当  $0 < s < 1$  时, MCV Bézier 曲线的解应满足

$s \leq \cos \theta_s$ , 即

$$\begin{cases} 0 < \frac{\|QP_B\|}{\|OQ\|} < 1 \\ \frac{\|QP_B\|}{\|OQ\|} \leq \cos \theta_B \end{cases} \Rightarrow \frac{\|QP_B\|}{\|OQ\|} \leq \cos \theta_B.$$

等价于  $\frac{y_B / \sin \theta_B}{x_B - y_B / \tan \theta_B} \leq \cos \theta_B$ , 化简得

$$\frac{y_B}{x_B} < \frac{\tan(\theta_B)}{2 + \tan^2(\theta_B)}.$$

综上,  $k=2$  时, 当  $P_B$  的位置坐标  $(x_B, y_B)$  与方向角  $\theta_B$  满足  $\frac{y_B}{x_B} \geq \frac{\tan(\theta_B)}{2}$  时, 存在  $s \geq 1$  的 MCV Bézier

曲线的解; 当  $\frac{y_B}{x_B} < \frac{\tan(\theta_B)}{2 + \tan^2(\theta_B)}$  时, 存在  $0 < s < 1$  的 MCV Bézier 曲线的解。其他条件下无二次 MCV Bézier 曲线解。证毕。

如图 6 所示, 给定约束,  $P_B=(20,20)$ ,  $\theta_A=0$  以及  $\theta_B=\frac{\pi}{3}$ , 容易验证  $\frac{y_B}{x_B}=1 \geq \frac{\tan(\pi/3)}{2} = \frac{\tan(\theta_B)}{2}$ , 此时存在  $s > 1$  的二次 MCV Bézier 曲线解(图 7)。

若给定初始边界约束条件为  $P_A=(0,0)$ ,  $\theta_A=0$ ,  $P_B=(70,20)$ ,  $\theta_B=\frac{\pi}{4}$ , 容易验证  $\frac{y_B}{x_B}=\frac{2}{7} < \frac{1}{3} = \frac{\tan(\theta_B)}{2 + \tan^2(\theta_B)}$ , 此时存在  $0 < s < 1$  的二次 MCV Bézier 曲线解(图 8)。

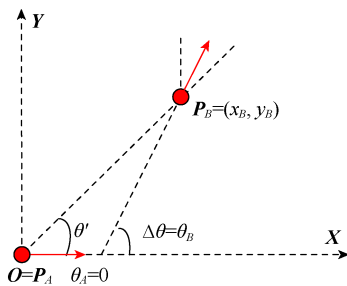


图 6 约束条件:  $P_B=(20,20)$ ,  $\theta_A=0$   
Fig. 6 Constraints:  $P_B=(20,20)$ ,  $\theta_A=0$

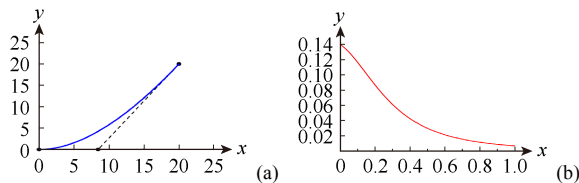


图 7 二次 MCV Bézier 曲线,  $s=2.732\ 051$ ,

$\|V_0\|=8.452\ 995$ ,  $\theta=\theta_B=\frac{\pi}{3}$  ((a)二次 MCV Bézier 曲线;  
(b)曲线曲率图)

Fig. 7 Quadratic MCV Bézier curve,  $s=2.732\ 051$ ,

$\|V_0\|=8.452\ 995$ ,  $\theta=\theta_B=\frac{\pi}{3}$  ((a) Quadratic MCV Bézier  
curve; (b) Corresponding curvature plot)

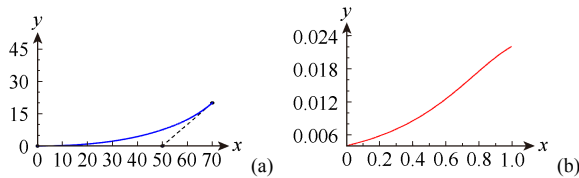


图 8 二次 MCV Bézier 曲线,  $s=0.565\ 685$ ,  $\|V_0\|=50$ ,

$\theta=\theta_B=\frac{\pi}{4}$  ((a)二次 MCV Bézier 曲线; (b)曲线曲率图)

Fig. 8 Quadratic MCV Bézier curve,  $s=0.565\ 685$ ,  $\|V_0\|=50$ ,

$\theta=\theta_B=\frac{\pi}{4}$  ((a) Quadratic MCV Bézier curve;  
(b) Corresponding curvature plot)

## 2.2 次数 $k$ 可变速

**命题 2.** 对于任意次数  $k$ , 若  $\theta_B < \theta'$  (图 9), 则不存在满足约束的 MCV Bézier 曲线。

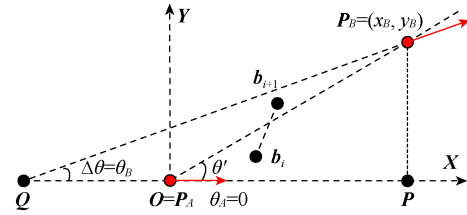


图 9  $\theta_B < \theta'$ , 无 MCV Bézier 曲线解

Fig. 9  $\theta_B < \theta'$ , without solution of MCV Bézier curve

**证明.**  $\theta_B < \theta'$  的情形如图 9 所示, 由  $k$  次 MCV Bézier 曲线的构造过程可知, 控制边  $\Delta b_i (i=1, 2, \dots, k-1)$  的方向角  $\theta_i = (i-1) \cdot \theta$  是单调递增的序列, 且倒数第二个控制点  $b_{k-1}$  位于虚线  $QP_B$  上第一象限部分, 其方向角  $\theta_{k-1} = \theta_B$ 。

假设下标为  $i$  的控制点  $b_i$  位于虚线  $P_A P_B$  下侧 (即三角形  $\Delta P_A P P_B$  内), 下标为  $i+1$  的控制点  $b_{i+1}$  位于虚线  $P_A P_B$  上侧, 则控制边  $\Delta b_i = b_{i+1} - b_i$  将由下至上穿过  $P_A P_B$ , 其方向角满足  $\theta_i > \theta' > \theta_B = \theta_{k-1}$ , 与已知控制边的方向角的递增序列矛盾, 故  $\theta_B < \theta'$  时不存在满足约束的 MCV Bézier 曲线。证毕。

命题 2 说明 MCV Bézier 曲线不存在 S 型曲线。

**命题 3.** 当  $\theta_B > \theta'$  时, 总能找到合适的次数  $k (k \geq 2)$ , 使得  $k$  次 MCV Bézier 曲线满足约束。

**证明.** 单调递增的序列, 当次数  $k$  为自由变量时, MCV Bézier 插值曲线的方程组为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k \|V_0\| \cdot s^{i-1} \cdot \cos((i-1) \cdot \theta) = x_B \\ \sum_{i=1}^k \|V_0\| \cdot s^{i-1} \cdot \sin((i-1) \cdot \theta) = y_B \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $\theta = \frac{\theta_B}{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$  且  $k \geq 2$ ,  $s > 0$ ,  $\|V_0\|$  为 3

个未知的自由变量, 消去  $\|V_0\|$ , 可得  $\sum_{i=1}^k s^{i-1} \cdot [y_B \cdot \cos((i-1) \cdot \theta) - x_B \cdot \sin((i-1) \cdot \theta)] = 0$ , 对于该  $k-1$  次方程, 当  $k$  逐渐增大时, 总能找到一个大于 0 的实根  $s$  使等式成立, 即存在  $s_k > 0$  使得  $\sum_{i=1}^k s_k^{i-1} \cdot [y_B \cdot \cos((i-1) \cdot \theta) - x_B \cdot \sin((i-1) \cdot \theta)] = 0$ 。证毕。

**推论.** 当  $\theta_B > \theta'$  时, 若  $k=m \geq 2$  时存在 MCV Bézier 曲线满足约束, 则当  $k \geq m+1$  时, 也存在 MCV Bézier 曲线满足约束, 即 MCV Bézier 曲线存在多解, 且解的极限为  $\theta \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow 1$ 。

## 2.3 算法

基于 G1 边界约束的  $k$  次 MCV Bézier 曲线插值算法的步骤如下:

输入:  $P_A=(0,0)$ ,  $\theta_A=0$ ,  $P_B=(x_B, y_B)$ ,  $x_B, y_B > 0$ ,  $\theta_B$ 。

输出:  $k$ ,  $s$ ,  $\|V_0\|$ 。

步骤 1. 验证输入数据是否有解, 若  $\theta_B < \arctan\left(\frac{y_B}{x_B}\right)$ , 无解, 返回重新输入。

步骤 2. 设定迭代最大次数  $k_{\max}=N$ 。

步骤 3. 对于  $2 \leq k \leq k_{\max}$ , 求解非线性方程组, 并判断解是否满足 MCV 条件。

步骤 3.1.  $\theta = (\theta_B - \theta_A) / (k - 1) = \theta_B / (k - 1)$ ;

步骤 3.2. 将  $k$  与  $\theta$  代入非线性方程组, 求解  $s$  和  $\|V_0\|$ , 若方程组无解, 返回步骤 3, 将  $k$  的值加 1;

步骤 3.3. 验证  $s$  取值与  $\theta$  的关系。若满足 MCV 条件, 则返回此时的  $k$ ,  $s$ ,  $\|V_0\|$ ; 否则返回步骤 3, 将  $k$  的值加 1。

## 3 数值实例

例 1. 给定约束  $P_B=(20,100)$ ,  $\theta_B=3\pi/4$ , 解得 MCV Bézier 曲线  $k=6$ ,  $s=1.131403$ ,  $\|V_0\|=17.096967$ , 如图 10 所示。

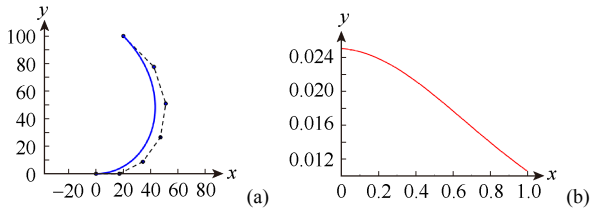


图 10 G1 插值 MCV Bézier 曲线,  $k=6$  ((a)本文算法求解的 MCV Bézier 曲线; (b)曲线曲率图)

Fig. 10 G1 interpolation MCV Bézier curve,  $k=6$   
((a) MCV Bézier curve obtained by our algorithm;  
(b) Corresponding curvature plot)

例 2. 给定约束  $P_B=(20,60)$ ,  $\theta_B=5\pi/4$ , 解得 MCV Bézier 曲线  $k=18$ ,  $s=0.915745$ ,  $\|V_0\|=13.313770$ , 如图 11 所示。

例 3. 给定约束  $P_B=(30,50)$ ,  $\theta_B=\arctan(y_B/x_B)+2\pi$ , 解得 MCV Bézier 曲线  $k=26$ ,  $s=0.931369$ ,  $\|V_0\|=17.345913$ , 如图 12 所示。

## 4 与基于欧拉螺旋线的 G1 插值算法比较

欧拉螺旋线的曲率随弧长线性变化, 是光滑

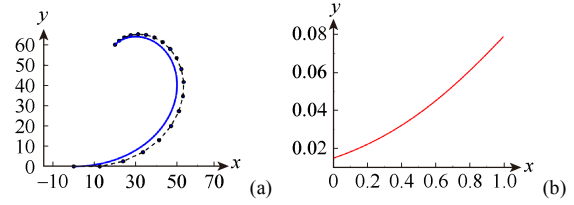


图 11 G1 插值 MCV Bézier 曲线,  $k=18$  ((a)本文算法求解的 MCV Bézier 曲线; (b)曲线曲率图)

Fig. 11 G1 interpolation MCV Bézier curve,  $k=18$   
((a) MCV Bézier curve obtained by our algorithm;  
(b) Corresponding curvature plot)

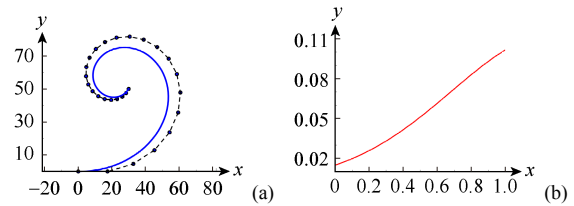


图 12 G1 插值 MCV Bézier 曲线,  $k=26$  ((a)本文算法求解的 MCV Bézier 曲线; (b)曲线曲率图)

Fig. 12 G1 interpolation MCV Bézier curve,  $k=26$   
((a) MCV Bézier curve obtained by our algorithm;  
(b) Corresponding curvature plot)

性非常好的一类曲线, 然而其复杂的数学形式只能用数值方法进行近似求解, 因此带来了求解效率与计算精度等问题。而本文方法采用的 Bézier 曲线, 属于简单的多项式函数, 计算结果精确, 效率高。与传统基于欧拉螺旋线的 G1 插值算法相比, 优点如下:

- (1) 构造简单, 计算高效;
- (2) 计算精确, 插值结果无误差;
- (3) 与现有的 NURBS 方法兼容。

图 13~16 展示了相同约束条件下采用欧拉螺旋线插值与本文 MCV Bézier 曲线插值的结果。

给定约束  $P_A=(0,0)$ ,  $\theta_A=0$ ,  $P_B=(50,50)$ ,  $\theta_B=\frac{2\pi}{3}$ ,

欧拉螺旋线与 MCV Bézier 曲线求解结果分别如图 13 和图 14 所示。欧拉螺旋线初始曲率  $\kappa_0=0.007406$ , 弧长  $L=85.919605$ , 曲率变化率  $\sigma=0.000395$ 。本文算法 MCV Bézier 曲线插值结果如图 14 所示,  $k=5$ ,  $s=0.797364$ ,  $\|V_0\|=27.680619$ 。表 1 为 2 种方法的误差与时间对比结果。

给定约束  $P_A=(0,0)$ ,  $\theta_A=0$ ,  $P_B=(40,30)$ ,  $\theta_B=\pi-$

$\arctan\left(\frac{y_B}{x_B}\right)$ , 欧拉螺旋线与 MCV Bézier 曲线求解结果分别如图 15 和图 16 所示。欧拉螺旋线初始曲率  $\kappa_0=-0.010878$ , 弧长  $L=67.290185$ , 曲率变化率

$\sigma=0.001427$ 。本文算法 MCV Bézier 曲线插值结果如图 16 所示,  $k=4$ ,  $s=0.5876780$ ,  $\|V_0\|=33.320967$ 。对比结果见表 2。

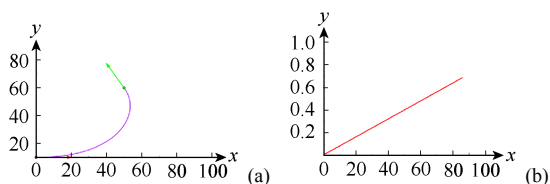


图 13 欧拉螺旋线插值第一例((a)欧拉螺旋线; (b)欧拉螺旋线曲率图(斜率放大 20 倍))

Fig. 13 First interpolation example of Euler spiral ((a) Euler spiral; (b) Corresponding curvature plot (The slope is scaled by 20 times))

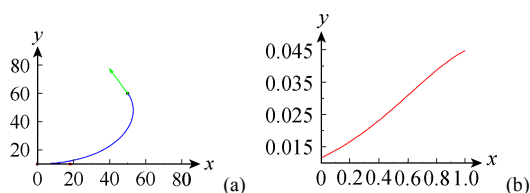


图 14 本文算法 MCV Bézier 曲线插值第一例((a) MCV Bézier 曲线; (b)曲线曲率图)

Fig. 14 First interpolation example of MCV Bézier curve based on our algorithm ((a) MCV Bézier curve; (b) Corresponding curvature plot)

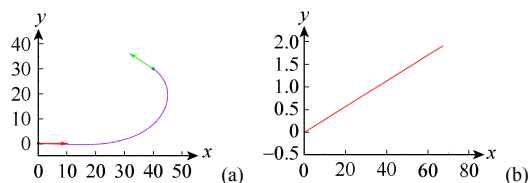


图 15 欧拉螺旋线插值第二例((a)欧拉螺旋线; (b)欧拉螺旋线曲率图(斜率放大 20 倍))

Fig. 15 Second interpolation example of Euler spiral ((a) Euler spiral; (b) Corresponding curvature plot (The slope is scaled by 20 times))

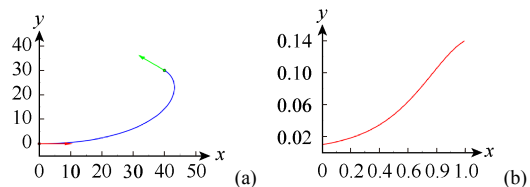


图 16 本文算法 MCV Bézier 曲线插值第二例((a) MCV Bézier 曲线; (b)曲线曲率图)

Fig. 16 Second interpolation example of MCV Bézier curve based on our algorithm ((a) MCV Bézier curve; (b) Corresponding curvature plot)

表 1 误差与时间对比 1

Table 1 First comparison of position error and time

| 插值曲线       | 终点距离误差 $\varepsilon$ | 时间(s)   |
|------------|----------------------|---------|
| 欧拉螺旋线      | 0.087 142            | 239.683 |
| MCV Bézier | 0                    | 0.137   |

表 2 误差与时间对比 2

Table 2 Second comparison of position error and time

| 插值曲线       | 终点距离误差 $\varepsilon$ | 时间(s)   |
|------------|----------------------|---------|
| 欧拉螺旋线      | 0.015 415            | 141.869 |
| MCV Bézier | 0                    | 0.200   |

## 5 分析与讨论

### 5.1 算法推广

本文给出了基于第一象限 2 端点的 G1 约束 MCV Bézier 样条曲线插值算法, 该算法能够推广至更加复杂的端点约束情形, 如非第一象限的端点插值及多数据点插值。

针对尾点位于非第一象限的情况, 可以通过补充中间插值点的方式进行分段处理, 使得每一段的尾点位于局部坐标系的第一象限, 将原问题转化为多个第一象限的 G1 插值问题。

对于给定一个平面数据点序列的插值问题, 同样需要采取分段处理的方式, 除首尾 2 端点外, 中间数据点没有切线方向的限制。由于减少了每一段插值曲线尾点的切向约束(最后一段除外), 因此相邻 2 点的插值自由度增加, 曲线设计更加灵活。

分段处理引入的一个问题是, 分段点处曲率可能会发生突变, 且多段拼接而成的整条曲线, 只能保证分段曲线的曲率单调性。要解决以上问题, 需要引入 G2 插值, 这是将来的研究方向。

给定平面数据点序列  $P_A=P_0=(0,0)$ ,  $P_1=(14,3)$ ,  $P_2=(18,16)$ ,  $P_3=(12,22)$ ,  $P_B=P_4=(-2,26)$  (图 17, 粉色数据点), 以及首尾切线方向  $\theta_A=0$ ,  $\theta_B=\pi$ 。一种分段插值结果如图 17 蓝色曲线所示, 该曲线是由 4 段二次 MCV Bézier 曲线组合而成, 每个中间数据点即为分段连接点。组合曲线的曲率图分段单调 (图 18), 在中间 3 个数据点处曲率发生突变。

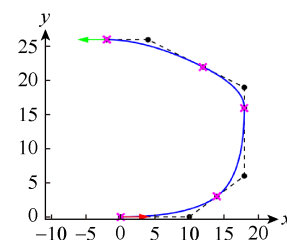


图 17 给定平面数据点列的 MCV Bézier 曲线插值  
Fig. 17 MCV Bézier curve interpolation of given planar data point

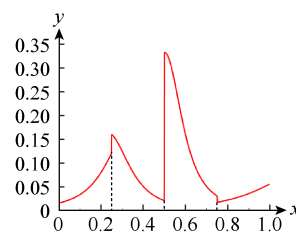


图 18 组合曲线的曲率图  
Fig. 18 Curvature plot of the whole composite curve

## 5.2 与基于平面三次 B 样条曲线 G1 插值算法比较

文献[21]提出了一种曲率单调的平面三次 B 样条曲线构造算法,且将其应用于形状修复,属于一类 G1 插值问题。该算法是通过前 2 条控制边矢量的夹角及模长,确定后一条控制边矢量的范围以保证曲率的单调性。但未具体给出如何选取控制边矢量的方向及大小,算法随机性较强;且相邻边矢量的夹角逐渐减小,随着控制点的增多,曲线趋于直线,曲线的角度变化范围有限。

对于 5.1 节所示的复杂平面点列,文献[21]算法受限于首尾切线方向的角度变化,无法生成通过各点的插值曲线,相关理论有待进一步研究。而本文方法基于变换矩阵,构造更加快速、直观,曲线整体的弯曲度更大,能够处理的切向约束范围更广,因此算法的适用性与通用性更强。

## 6 结束语

本文提出了一种基于 G1 约束的 MCV Bézier 样条曲线插值算法。首先阐述了给定边界约束下 MCV Bézier 曲线解的存在性条件并进行证明;接着,理论与实践表明,该算法可以灵活构造满足 G1 插值条件的曲率单调 Bézier 曲线;对比基于欧拉螺旋线的插值算法,本文算法更加精确且高效;作为处理第一象限 2 端点 G1 约束问题的基础,该算法可以推广至更加复杂的约束问题求解,相比于曲率单调的平面三次 B 样条曲线,MCV Bézier 曲线的构造更加快速、直观,算法的适用性与通用性更强。

未来工作是寻求当  $P_B$  位置与方向角  $\theta_B$  任意取值时,构造满足约束的 MCV Bézier 样条曲线的有效解法,以解决复杂情形下的路径规划等工程问题;分段处理将引入曲率的突变, G2 插值问题相比 G1 更加重要且复杂,这是未来的研究重点。

### 参考文献 (References)

- [1] BAASS K G. The use of clothoid templates in highway design[J]. Transportation Forum, 1984(1/3): 47-52.
- [2] BREZAK M, PETROVIĆ I. Real-time approximation of clothoids with bounded error for path planning applications[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2014, 30(2): 507-515.
- [3] BERTOLAZZI E, BEVILACQUA P, FREGO M. Efficient intersection between splines of clothoids[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2020, 176: 57-72.
- [4] CONNOR D, KRIVODONOVA L. Interpolation of two-dimensional curves with Euler spirals[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 261: 320-332.
- [5] VÁZQUEZ-MÉNDEZ M E, CASAL G, FERREIRO J B. Numerical computation of egg and double-egg curves with clothoids[J]. Journal of Surveying Engineering, 2020, 146(1): 04019021.
- [6] KIMIA B B, FRANKEL I, POPESCU A M. Euler spiral for shape completion[J]. International Journal of Computer Vision, 2003, 54(1): 159-182.
- [7] HARARY G, TAL A. 3D Euler spirals for 3D curve completion[J]. Computational Geometry: Theory and Applications, 2012, 45(3): 115-126.
- [8] HARARY G, TAL A. The natural 3D spiral[J]. Computer Graphics Forum, 2011, 30(2): 237-246.
- [9] ZHOU H L, ZHENG J M, YANG X N. Euler arc splines for curve completion[J]. Computers & Graphics, 2012, 36(6): 642-650.
- [10] CROSS B, CRIPPS R J. G3 quintic polynomial approximation for Generalised Cornu Spiral segments[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2012, 236(13): 3111-3122.
- [11] CHEN Y, CAI Y Y, ZHENG J M, et al. Accurate and efficient approximation of clothoids using Bézier curves for path planning[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2017, 33(5): 1242-1247.
- [12] WALTON D J, MEEK D S. A planar cubic Bézier spiral[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1996, 72(1): 85-100.
- [13] WALTON D J, MEEK D S. Planar G2 transition between two circles with a fair cubic Bézier curve[J]. Computer-Aided Design, 1999, 31(14): 857-866.
- [14] WALTON D J, MEEK D S, ALI J M. Planar G2 transition curves composed of cubic Bézier spiral segments[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 157(2): 453-476.
- [15] WALTON D J, MEEK D S. A further generalisation of the planar cubic Bézier spiral[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2012, 236(11): 2869-2882.
- [16] WALTON D J, MEEK D S. Curve design with more general planar Pythagorean-hodograph quintic spiral segments[J]. Computer Aided Geometric Design, 2013, 30(7): 707-721.
- [17] FARIN G. Class A Bézier curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2006, 23(7): 573-581.
- [18] CAO J, WANG G Z. A note on Class A Bézier curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2008, 25(7): 523-528.
- [19] WANG A Z, ZHAO G. Counter examples of "Class A Bézier curves"[J]. Computer Aided Geometric Design, 2018, 61: 6-8.
- [20] 王爱增, 何川, 赵罡, 等. 基于几何方法的曲率单调 Bézier 曲线的一个充分必要准则[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2019, 31(9): 1617-1621.
- [21] WANG A Z, HE C, ZHAO G, et al. A sufficient and necessary criterion for curvature monotone Bézier curves[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2019, 31(9): 1617-1621 (in Chinese).
- [22] WANG A, HE C, HOU F, et al. Designing planar cubic B-spline curves with monotonic curvature for curve interpolation[J]. Computational Visual Media, 2020, 6(3): 349-354.
- [22] MCQUARRIE D A. Handbook of mathematical functions[J]. American Journal of Physics, 1966, 34(2): 177.