额外维紧致球空间的变形与K-K粒子质量的修正计算

黎聪笑, 颜骏^{*}, 余毅

四川师范大学物理系, 成都 610066

*联系人, E-mail: yanjun5@sina.com

收稿日期: 2019-02-14; 接受日期: 2019-05-28; 网络出版日期: 2019-10-11

四川省教育厅自然科学基金资助项目(编号: 11ZA100)

摘要 本文根据高维时空中的Einstein宇宙学方程研究了额外维空间的变形和K-K粒子质量的修正. 在模型中假定内部空间中存在高阶 $U(1)$ 规范场和真空能密度的作用, 然后分别计算了紧致单球和紧致双球的半径和对应的K-K粒子质量. 另外, 通过内部球度规的单参量变形和双单参量变形计算了半径和K-K粒子质量的修正值, 还分析和讨论了额外维数目和变形效应对内部球半径和K-K粒子质量的影响. 本文还研究了单球和双球紧致化中涨落解的变化规律, 即假定围绕标度因子的静态解产生随时间变化的微小涨落, 仔细分析了Einstein场方程对应的线性涨落方程解的增长性质. 结果发现单球和双球紧致化中涨落解都可以达到稳定状态, 这一结论和标量场势能的稳定性结果完全一致, 因此时空上度规涨落可以导致K-K粒子质量的产生.

关键词 额外维空间, 高阶规范场, 度规变形参量, K-K粒子质量

PACS: 04.20.Gz, 11.10.Kk, 11.25.Mj, 98.80.Cq

1 引言

20世纪70年代以来, 现代Kaluza-Klein (K-K)理论经过不断地发展已取得了较为丰富的研究成果, 这一理论的主要目的是为了统一自然界的4种基本相互作用和合理描述宇宙的演化过程^[1-4]. 其中具有代表性的理论模型有额外维场论和超引力、10维超弦理论和11维M理论^[5], 而M理论还可以容纳5种不同形式的弦理论. 额外维空间的几何形状包括紧致球 S^d 、环面 T^d 、复投影空间 CP^n 、双曲空间 H^d/Γ 和Calabi-Yau流形等,

额外维理论的主要任务就是要计算出紧致空间的尺度范围以及高维空间产生的粒子的质量大小, 这些粒子包括引力激子(Gravitational Exciton)、引力子(Graviton), 或半径子(Radion)等, 一般统称为K-K粒子.

Günther等人^[6]和Chopovsky等人^[7]首先在高维宇宙模型中研究了引力激子问题, 结果发现内部空间标度因子的微扰会导致轻标量粒子的形成, 这种粒子类似于固体物理中的激子, 当背景磁单极场产生扰动时还可通过Laplace算符方程导出3维空间牛顿引力势的修正形式. 20世纪90年代末期, 为了解释规范等级问

引用格式: 黎聪笑, 颜骏, 余毅. 额外维紧致球空间的变形与K-K粒子质量的修正计算. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 040011
Li C X, Yan J, Yu Y. The deformation of extra dimensional compact sphere space and modified calculation of K-K particles mass (in Chinese). Sci Sin Phys Mech Astron, 2020, 50: 040011, doi: [10.1360/SSPMA-2019-0043](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0043)

题, 两个研究组分别独立提出了大额外维模型^[8,9], 即 ADD模型和RS模型. 这两种模型都建立在膜(Brane)理论基础之上, 并且假定标准模型的相互作用限定在膜空间上, 而引力可以在整个体空间(Bulk)上传播. ADD模型中认为高维引力的能标 M_D 不同于4维普朗克能标 M_{Pl} , 所以4维时空中Planck能标 M_{Pl} 不是一个基本参量, 在 D 维引力中能标 M_D 才是基本能标, 其关系式为: $M_{Pl} = R^{d/2} M_D$. 额外维的尺度除了与基本能标有关外, 还与额外维的维数 d 有关, 当 M_D 接近弱电能标 $M_{EW} \sim 1$ TeV时, $d=1$ 时额外维半径可以达到 $R \sim 10^{13}$ cm, $d=2$ 时额外维半径为 $R \sim 1$ mm, 随着额外维数 d 变大内部空间尺度将变小. RS模型中额外维尺度与内部空间曲率有关, 这一模型预言可能存在质量超过TeV的K-K引力子.

另外, Orlando和Park^[10]研究了11维M理论中双曲空间紧致化, 这一理论中包含了3-形式的规范场 A (或磁单极场)及对应4-形式场强 F , 在双曲空间上 F 满足磁通拓扑量子化条件. 这时K-K粒子质量与额外维数 d 和磁荷有关, 而11维引力能标 M_{11} 和双曲空间的曲率半径与拓扑形式相关, 对于高亏格数的双曲空间紧致化, 规范等级问题也可以避免.

近10年来, 有许多工作涉及 AdS/CFT 对应中的可积结构和变形问题, 这些研究将量子群理论中的经典Yang-Baxter方程应用于非线性 σ 模型和超弦理论^[11-16], 试图进一步揭示出引力/规范对偶之间的深刻联系. Hoare等人^[13,14]研究了超陪集空间上的变形问题, 主要分析了各种 $AdS_n \otimes S^m$ 时空背景下弦理论的单参量变形和 q -变形, Martelli等人^[15,16]则进一步讨论了引力和规范理论对偶中3维球空间的双参量变形. 从物理学的角度来看, 各种极端的物理环境都可能对额外维空间的几何结构产生影响. 如黑洞和中子星周围的强引力场、极高温或强辐射环境都有可能引起额外维空间的变形, 因此探讨高维时空上内部空间的各种几何变形将是很有意义的研究课题.

本文保留了ADD模型中关于能标的合理假设, 即假定能标 $M_D = (1/G_D)^{1/d+2}$ 是基本能标, 并接近弱电能标 $M_{EW} \sim 1$ TeV的数量级, 这里 G_D 是 D 维牛顿引力常数^[17]. 在内部球空间上引入高阶规范场和真空能密度的作用, 通过高维时空中的Einstein宇宙学方程计算了 $4+d$ 维时空和10维时空紧致化的K-K粒子质量, 重点研究了内部球的两类参量变形对K-K粒子质量的修正,

还讨论了额外维数 d 和磁单极场的拓扑量子数 n 对内部球半径和K-K粒子质量的影响. 另外, 本文的研究结果还和ADD模型和其他理论模型所得到的结果进行了对比和分析.

2 $M^D = R \otimes S^3 \otimes \prod_{i=1} S_i^{d_i}$ 紧致化中的K-K粒子质量计算

首先给出将要研究的模型的一般形式, 假定 $D = d + 4$ 维时空流形紧致为 $M^D = R \otimes S^3 \otimes \prod_{i=1} S_i^{d_i}$, 这里 S^3 和 $S_i^{d_i}$ 分别表示3维与 d 维内部球, 并且 $d = \sum_{i=1} d_i$. 时空度规的矩阵形式可以表示为

$$g_{MN} = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & a^2(t)g_{ij} & & & \\ & & b_1^2(t)g_{m_1 n_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_a^2(t)g_{m_a n_a} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中, $i, j=1, 2, 3$, g_{ij} 表示3维物理空间的最大对称度规, 而 $g_{m_a n_a}$ 表示每个内部球的度规, $a(t)$ 和 $b_a(t)$ 分别是物理空间与每个内部球的标度因子. 考虑了物质场贡献后的能量-动量张量表达式为

$$T_{MN} = \begin{bmatrix} \rho & & & & \\ & P g_{ij} & & & \\ & & P^{(1)} g_{m_1 n_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & P^{(a)} g_{m_a n_a} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中, ρ 为物质的能量密度, P 是物理空间上的压力, $P^{(a)}$ 表示每个内部球上的压力. 这时, $D=d+4$ 维时空上的Einstein场方程为

$$3\frac{\ddot{a}}{a} + l \sum_{i=1}^a \frac{\ddot{b}_i}{b_i} = -8\pi G_D \left[\rho + \frac{1}{d+2} \left(-\rho + 3P + l \sum_{i=1}^a P^{(i)} - \rho_A \right) \right], \quad (3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + l \frac{\dot{a}}{a} \sum_{i=1}^a \frac{\dot{b}_i}{b_i} + \frac{2K}{a^2} = 8\pi G_D \left[P - \frac{1}{d+2} \left(-\rho + 3P + l \sum_{i=1}^a P^{(i)} - \rho_A \right) \right], \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\ddot{b}_i}{b_i} + (l-1) \frac{\dot{b}_i^2}{b_i^2} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \times \frac{\dot{b}}{b} + m \frac{\dot{b}_i}{b_i} \sum_{i \neq j} \frac{\dot{b}_j}{b_j} + \frac{(l-1)}{b_i^2} \\ & = 8\pi G_D \left[P^{(i)} - \frac{1}{d+2} \left(-\rho + 3P + l \sum_{i=1}^{\alpha} P^{(i)} - \rho_A \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

式中, $d = \alpha \times l$, α 为内部球的数目, $G_D = G \times V_d$ 表示 D 维时空下的牛顿引力常数, V_d 为内部球体积, 这和 ADD 模型中关于能标的定义是一致的. $\rho_\Lambda = \Lambda / 8\pi G_D$ 为真空能密度, Λ 表示 D 维宇宙常数, 物理空间上的曲率常数 $K=0$. 这里物质场中还包括 $l-1$ 阶的反对称 $U(1)$ 规范场的贡献, 其中 l 阶的场强 $H_{MN\dots Q}$ 所对应的能量-动量张量可表示为

$$T_{MN}^{(m)} = H_{MP\dots S} H_N^{P\dots S} - \frac{1}{2l} H_{PQ\dots S} H^{PQ\dots S} g_{MN}. \quad (6)$$

应强调能量-动量张量(6)式已经包含在(2)式之中, 这里完整的能量-动量张量表达式为

$$T_{MN}^{(m)} - T^{(m)} g_{MN} / d + 2 - \rho_A g_{MN} / d + 2,$$

$\rho_\Lambda = \Lambda / 8\pi G_D$ 为真空能密度, $T_{00}^{(m)} = \rho g_{00}$, $T_{\mu\nu}^{(m)} = -P g_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 1, 2, 3$, $T_{m_i n_i}^{(m)} = -P^{(\alpha)} g_{m_i n_i}$. 本文在物质场中仅考虑 $l-1$ 阶的反对称 $U(1)$ 规范场的贡献, 如果考虑其他场的作用, 如标量场的单圈 Casimir 效应的修正, 那么可能导致有效势在临界点 $\phi_c = 0$ 处于不稳定状态^[3,4]. 另一个原因是磁单极场的拓扑量子数可以调节额外维半径和 K-K 粒子质量的大小范围, 在 ADM (Arkani-Hamed-March) 模型中 $U(1)$ 规范场的磁单极数还可以控制额外维半径的稳定性质^[18], 而通常标量场都不具备这些物理功能.

假定场强 $H_{MN\dots Q}$ 仅取值于每一个内部球空间中, 这时 D 维时空的紧致化可通过 Freund-Rubin 或磁单极 ansatz 给出, 即

$$H_{MN\dots Q} = \begin{cases} \sqrt{g^{(l)}} \varepsilon_{m_i n_i \dots q_l} h^{(i)}(t), & \text{对每个内部球,} \\ 0, & \text{其他空间.} \end{cases} \quad (7)$$

再根据 Bianchi 恒等式可进一步得到

$$h^{(i)}(t) = h_0^{(i)} / b_i^l(t), \quad (8)$$

式中 $h_0^{(i)} = (n/f^2)$, n 和 f^2 为常数, 所以磁单极场的能量-动量张量分量为

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = -\frac{1}{2}(l-1)! \sum_{i=1}^{\alpha} \left[\frac{h_0^{(i)}}{b_i^l} \right]^2 g_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (9)$$

$$T_{m_i n_i}^{(m)} = \frac{1}{2}(l-1)! \left[\left(\frac{h_0^{(i)}}{b_i^l} \right)^2 - \sum_{j \neq i} \left(\frac{h_0^{(j)}}{b_j^l} \right)^2 \right] g_{m_i n_i}. \quad (10)$$

由(8)式可得高阶磁单极场的拓扑量子化条件为

$$\int_{S^l} F_{m_1 \dots m_d} = \frac{2\pi \frac{l+1}{2}}{l \left(\frac{l+1}{2} \right)} \times \frac{n}{f^2}, \quad (11)$$

式中, n 表示磁单极场的拓扑量子数. 除了紧致球 S^d 空间之外, 高阶规范场的拓扑量子化还可以推广至环面、双曲空间、 CP 空间和更一般的流形 M , 以及引力耦合的情况^[19-22]. 在拓扑学上这类规范场可理解为整上同调群的元, 如 Maxwell 场为 $H^2(S^2, Z)$ 上的元, Kalb-Ramond 场为 $H^3(S^3, Z)$ 上的元, 高阶规范场为 $H^{\hat{P}}(M, Z)$ 上的元等. 对于 $M^4 \otimes S^d$ 形式的紧致化, 内部球的数目 $\alpha=1$, $d=l$, 磁单极系数为 $C=(n/f^2)^2(d-1)!/2$. 这里, f 是 Giddings 和 Strominger^[23] 在研究量子引力和弦理论中的轴子瞬子解时首次引入的参量, 其物理含义表示磁单极场的强弱程度, 当 f 增大时磁单极场变弱, 当 f 变小时磁单极场增强. 此外, 拓扑量子数 n 是决定磁单极场强或磁荷强弱程度的另一参量, 由于 n 的数量级很大, 是决定磁单极场强度和计算紧致球半径时的主要因子, 所以在本文中将另一物理参量的取值约定为 $f^2=1$. 当标度因子取为常数, 这时需仔细分析静态解对应的标量场是否稳定^[24]. 本文将考虑完整的 Einstein 场方程并求解, 这里 Einstein 场方程组由(3)-(5)式组成, 在推导单球和双球紧致化中的有效势时, 需根据这 3 个方程组联立得出静态解. 当标度因子 $a=a_0$, $b=b_0$ 时由场方程(3)-(5)式可以导出额外维单球空间的半径为

$$b_0 = \left(\frac{1}{8\pi G(d-2)!} \times \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2-d}} \times \left(\frac{f^2}{n} \right)^{\frac{2}{d-2}}, \quad (12)$$

又令 $\phi = \ln(b/b_0)$, 再由场方程(5)式可以得到标量场 ϕ 对应的有效势为

$$V(\phi) = -\frac{(d-1)}{2b_0^2}e^{-2\phi} - \frac{8\pi G_D}{(d+2)}\left[-\frac{6C}{2db_0^{2d}}e^{-2d\phi} + \rho_\Lambda \phi\right] + B, \quad (13)$$

式中, B 为势能中的积分常数, ϕ 场对应的粒子又称为半径子(Radion), 为 K-K 粒子中的一种类型, 经过推导得到其有效质量为

$$m_\phi^2 = \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=0} = \frac{4(d-1)^2}{(d+2)b_0^2}. \quad (14)$$

D 维时空的单球紧致化中, 由(14)式可以看出 ϕ 场在临界点 $\phi_c = 0$ 的二阶导数 $(\partial^2 V(\phi) / \partial \phi^2) \Big|_{\phi=0} > 0$, 这时有效势取极小值, 所以静态解对应的标量场达到稳定状态. 通常, K-K 粒子的有效势 $V(\phi)$ 由内部球场方程(5)式定义, 即令 $\phi = \ln(b/b_0)$, 那么(5)式左边定义为 $-\partial V(\phi) / \partial \phi$, 而(5)式的右边除了包含 $e^{-2\phi}$ 和 $e^{-2d\phi}$ 两个指数项之外, 还包括 ρ_Λ 这一常数项. 当这一方程两边对 ϕ 场积分后, 则有效势 $V(\phi)$ 对应的(13)式中将包含 $\rho_\Lambda \phi$ 这一线性关系项, 在后面讨论双球紧致化中的有效势时也可做同样的分析. 另外, 有效势(13)式中还包括 B 这一势能中的积分常数, 在 Holman 等人^[25]研究的高维 Brans-Dicke 宇宙模型中, 由于有效势 $V(\phi)$ 中仅含有 ϕ 的线性关系项, 所以当 $\phi = 0$ 时, 势能中的积分常数 $B = V(0)$, 这时 B 的物理意义可解释为势能在零点时的值. 在本文所得到的有效势(13)式中, 除了线性关系项之外, 还含有两个指数项. 所以当 $\phi = 0$ 时, 零点势能由指数项系数和积分常数 B 之和构成, 通过调节 B 的值可使有效势的零点能 $V(0) = 0$. 对于不同的额外维数 d 和磁单极数 n , 当 $f^2 = 1$ 时可计算出对应的紧致球半径 b_0 和 K-K 粒子质量 m_ϕ , 如表 1 所示.

由表 1 的计算结果可以看出, 随着额外维数的 d 的增加, 紧致球半径减小, K-K 粒子质量变大, 如果额外维数进一步增大, K-K 粒子质量可达到 TeV 数量级. 同时, 本文计算出的紧致球半径和 ADD 模型中额外维尺度的量级完全吻合^[8,26]. 另外, ADM 模型研究了膜宇宙中的拓扑稳定性问题, 这一模型允许 bulk 空间上引力子和 $U(1)$ 规范场同时存在^[18], 那么由势能给出的量子化磁单极数需满足约束条件 $n \geq 10^{15}$, 本文计算出的磁单极数 n 也恰好满足这一要求.

在研究单球紧致化, 如 $M^4 \otimes S^6$ 紧致化解时, 得到的额外维紧致空间的半径是磁单极数的函数, 通过 Einstein 场方程组(3)–(5)式求得的 10 维时空中真空能密度为 $\rho_\Lambda = (1/4\pi^5 G b_0^8)$. 在导出 4 维时空中的有效真空能密度时, 应首先根据标度因子的静态解求出关系式 $C = (1/4\pi^5 G b_0^8)$, 然后代入(3)式约化后可得到有效真空能量密度为 $\rho_{\text{eff}}^{(4)}(b) = (1/8\pi G b_0^2) \times (1 - (b_0/b(t)))$, 这里 $b(t)$ 为后时内部球的标度因子^[24]. 经过计算后得到 $\rho_{\text{eff}}^{(4)}(b)$ 的数量级为 10^{33} GeV^4 , 这与天文观测推知的能量密度 $\rho_{\text{eff}} \sim 10^{-46} \text{ GeV}^4$ 相差 10^{79} 个数量级. 这意味着在宇宙演化过程中内部球的标度因子将随时间发生极其微小的振荡, 才能保证有效真空能量密度的理论计算值和观测值相吻合. 在研究双球紧致化时这一现象也可能存在, 所以本文中涉及这类小宇宙学常数的新微调效应值得进一步研究.

对于 $M^4 \otimes S^3 \otimes S^3$ 紧致化的 Kalb-Ramond 模型, 这时时空维数 $D=10$, 对应超弦的临界维数, 内部球的数目 $\alpha=2$, 规范场为 2 阶反对称张量, 同时存在两个不同的磁单极系数, 分别为 $C_1 = (n_1/f_1^2)^2$, $C_2 = (n_2/f_2^2)^2$, n_1, n_2 表示两个球的磁单极数. 当标度因子 $a=a_0$, $b_1=b_{10}$, $b_2=b_{20}$, 由场方程(3)–(5)式同样可以导出额外维双球空间的半径分别为

$$b_{10} = \left[\left(\frac{f_1^2}{n_1} \right)^2 \times \left(\frac{f_2^2}{n_2} \right)^6 \right]^{\frac{1}{8}} \times \left(\frac{1}{8\pi\Omega_3^2 G} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

$$b_{20} = \left[\left(\frac{f_1^2}{n_1} \right)^6 \times \left(\frac{f_2^2}{n_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{8}} \times \left(\frac{1}{8\pi\Omega_3^2 G} \right)^{\frac{1}{2}},$$

又令 $\phi_1 = \ln(b_1/b_0)$, $\phi_2 = \ln(b_2/b_0)$, 再由场方程(5)式可以得到标量场 ϕ_1, ϕ_2 对应的有效势分别为

$$V_1 = -\frac{1}{b_{10}^2}e^{-2\phi_1} - \frac{8\pi G_{10}}{2} \left(-\frac{C_1}{2b_{10}^6}e^{-6\phi_1} + \frac{C_2}{6b_{20}^6}e^{-6\phi_2} + \frac{\rho_\Lambda}{8}\phi_1 \right) + B_1, \quad (16)$$

$$V_2 = -\frac{1}{b_{20}^2}e^{-2\phi_2} - \frac{8\pi G_{10}}{2} \left(\frac{C_1}{6b_{10}^6}e^{-6\phi_1} - \frac{C_2}{2b_{20}^6}e^{-6\phi_2} + \frac{\rho_\Lambda}{8}\phi_2 \right) + B_2, \quad (17)$$

式中 G_{10} 表示 10 维时空下的牛顿引力常数, B_1, B_2 为势

表 1 紧致单球半径和K-K粒子质量与额外维数间的关系**Table 1** The relation between compact single sphere radius and K-K particle mass with number of extra dimensions

额外维数 d	紧致球半径 b_0 (cm)	K-K粒子质量 m_ϕ (GeV)	磁单极数 n
3	0.656×10^{-7}	5.379×10^{-7}	10^{21}
4	0.588×10^{-9}	8.223×10^{-5}	10^{22}
5	0.622×10^{-11}	9.590×10^{-3}	10^{21}
6	6.710×10^{-12}	10.397×10^{-2}	10^{20}
7	0.880×10^{-12}	0.897×10^{-1}	5.18×10^{20}
8	4.344×10^{-13}	2.011×10^{-1}	1.78×10^{20}
9	1.274×10^{-13}	0.748×10^0	2.15×10^{19}
10	2.746×10^{-14}	2.640×10^0	10^{16}

能中的积分常数, 当 $\phi = 0$ 时, 两个零点势能分别由指数项系数和常数 B_1, B_2 之和构成, 通过调节积分常数的值可使有效势的零点能 $V_1(0)=0, V_2(0)=0$. 再引进如下有效势导数的Hessian矩阵:

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial \phi_1 \partial \phi_1} & \frac{\partial V_1}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} \\ \frac{\partial V_2}{\partial \phi_2 \partial \phi_1} & \frac{\partial V_2}{\partial \phi_2 \partial \phi_2} \end{bmatrix}_{\phi_k=0}. \quad (18)$$

在10维时空的双球紧致化中, 当两个内部球半径不相等时, 那么有效势在临界点 $\phi_k = 0, i = 1, 2$ 处的二阶导数由Hessian矩阵(18)式表示, 通过计算得到其对应的行列式 $\det D_{ij} = (16 / b_{10}^2 b_{20}^2) > 0$, 这时有有效势同样取极小值, 所以静态解对应的标量场也达到稳定状态, 经过推导得到K-K粒子有效质量本征值为

$$m_\phi^2 = \frac{\frac{5}{b_{10}^2} + \frac{5}{b_{20}^2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{b_{10}^2} + \frac{5}{b_{20}^2}\right)^2 - \frac{64}{b_{10}^2 b_{20}^2}}}{2}. \quad (19)$$

当 $f_1^2 = f_2^2 = 1$ 时, 存在约束关系 $(b_{10}^4 / b_{20}^4) = (n_2 / n_1)$, 又令 $n_1 = a \times 10^{15}, n_2 = (1/a) \times 10^{15}$, 对于不同强度系数 a 对应的磁单极数 n_1, n_2 也不相同, 这时可计算出对应的紧致球半径 b_{10}, b_{20} , 以及K-K粒子质量 m_{ϕ_1}, m_{ϕ_2} , 如表2所示.

由表2的计算结果可以看出, 随着强度系数 a 的增加第一个紧致球半径减小, 第二个紧致球半径增大, 而对应的第一个K-K粒子质量 m_{ϕ_1} 变大, 第二个K-K粒

子质量 m_{ϕ_1} 变小. 与表1中额外维数 $d=6$ 时计算结果相比较后发现, 单球紧致化和双球紧致化中额外维半径和K-K粒子质量的数量级都较为接近, 但是单球紧致化中磁单极拓扑数远大于双球紧致化中每个球的磁单极拓扑数. 在单球紧致化中 $m_\phi \approx 104$ MeV, 双球紧致化中 $m_{\phi_1} \approx 45$ MeV, $m_{\phi_2} \approx 6$ MeV, 这两种情况下计算的K-K粒子质量和ADM模型得到的半径子质量 $m_r \approx 20$ MeV的量级都比较靠近.

3 额外维单球空间的变形与K-K粒子的修正质量谱

根据单球 $M^4 \otimes S^d$ 变形紧致化的场方程组解, 还可计算出修正半径 $\hat{b}$ 与修正K-K粒子质量 $\hat{m}_\phi$ 的数值. 这里 d 维球变形后的度规为

$$ds^2 = dr^2 + f_\varepsilon(r) d\Omega_{d-1}^2, \quad (20)$$

式中 $f_\varepsilon(r) = \sin^2(\varepsilon r) / \varepsilon^2$ 表示单参量变形势, $\varepsilon r \ll 1$. Shtykovt和Vassilevich^[27]曾研究过正弦形式变形球的Laplace算符的热核渐近展开性质, 结果发现在某些变形情况下自由标量场的共形反常可以消除. 在(20)式中面积元 $d\Omega_d^2$ 的递推公式为 $d\Omega_d^2 = d\Omega_{d-1}^2 + \sin^2\theta_{d-1} d\Omega_{d-1}^2$, 宇宙学中修正的体积表示为

$$\mathcal{V}_d = \hat{b}^d \times \frac{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}, \quad (21)$$

式中 d 维时空下的牛顿引力常数为 $G_D = G \times \mathcal{V}_d$, 这时内部球半径变为

$$\hat{b} = b \left(1 - d \left(\frac{d-1}{d+2} \right) b^2 \varepsilon^2 \right)^{\frac{1}{d}}, \quad (22)$$

这里 S^d 度规的变形仅改变内部球的体积, 不影响磁单极场对能量-动量张量或对Einstein场方程的贡献, 同时也不影响磁单极场的拓扑量子化条件. 于是修正后的内部球半径满足如下方程:

$$\left(\frac{\hat{b}_0}{B_d^{\frac{1}{d-2}}} \right)^{d-2} + A_d \left(\frac{\hat{b}_0}{B_d^{\frac{1}{d-2}}} \right)^2 B_d^{\frac{2}{d-2}} \varepsilon^2 - 1 = 0, \quad (23)$$

式中

表 2 紧致双球半径和K-K粒子质量与磁单极强度系数间的关系

Table 2 The relation between compact double sphere radius and K-K particle mass with coefficient of magnetic monopole intensity

磁单极 强度系数	内部球半径 $b_{10} (\times 10^{-12} \text{ cm})$	内部球半径 $b_{20} (\times 10^{-12} \text{ cm})$	K-K粒子质量 $m_{\phi 1} (\times 10^{-2} \text{ GeV})$	K-K粒子质量 $m_{\phi 2} (\times 10^{-2} \text{ GeV})$
2	1.722	3.444	2.694	0.975
3	1.406	4.218	3.205	0.820
4	1.218	4.871	3.666	0.716
5	1.089	5.446	4.081	0.644
6	0.994	5.966	4.461	0.589
7	0.921	6.444	4.812	0.546

$$A_d = \frac{d(d-1)}{6(d+2)}, \quad (24)$$

$$B_d = 8\pi G(d-2)! \times \left(\frac{n}{f^2}\right)^2 \Omega_d,$$

如果再引入如下双参量变形势:

$$f_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2(\varepsilon_1 r)}{\varepsilon_1^2} + \frac{\ln^2(1 + \varepsilon_2 r)}{\varepsilon_2^2} \right), \quad (25)$$

式中, $\varepsilon_1 r \ll 1, \varepsilon_2 r \ll 1$. 那么修正后的内部球半径则满足如下方程:

$$\left(\frac{\hat{b}_0}{B_d^{\frac{1}{d-2}}} \right)^{d-2} + \frac{A_d}{2} \left(\frac{\hat{b}_0}{B_d^{\frac{1}{d-2}}} \right)^2 B_d^{\frac{2}{d-2}} \varepsilon_1^2 + C_d \varepsilon_2 b_0 - 1 = 0, \quad (26)$$

式中, $C_d = d(d-1)/4(d+1)$, 两种变形势对应的修正K-K粒子质量都变为 $\bar{m}_\phi = (2/\hat{b}_0) \times ((d-1)/\sqrt{d+2})$. 如果分别令

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{\sqrt{k}} \times B_d^{-\frac{1}{d-2}}, \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{\sqrt{k_1}} \times B_d^{-\frac{1}{d-2}}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{k_2} \times B_d^{-\frac{1}{d-2}}, \end{aligned} \quad (27)$$

当约化变形参量取定值 $k=5/3, k_1=k_2=5/3$, 并且 $f^2=1$ 时, 可计算出对应的紧致球半径 $\hat{b}_0$ 和修正K-K粒子质量 $\bar{m}_\phi$, 如表3和4所示.

由表3的计算结果可以看出, 单参量变形中约化变形参量取一定数值时, 随着额外维数 d 的增加, 紧致球半径仍然减小, K-K粒子质量也变大, 说明 d 维球度规

的变形不会影响半径和质量的变化趋势. 和表1中未变形的计算结果对比后发现, 变形后的修正半径 $\hat{b}_0$ 全部变小, 而K-K粒子质量 $\bar{m}_\phi$ 全部变大. 由表4的计算结果表明, 双参量变形中约化变形参量取同样数值时, 随着额外维数 d 的增加, 紧致球半径和K-K粒子质量和单参量变形中变化规律保持一致, 但是变形后的双参量修正半径略小于单参量修正半径, 而双参量修正质量却略大于单参量修正质量, 因此双参量变形势比单参量变形势对K-K粒子质量的变化影响更明显.

4 额外维双球空间的变形与K-K粒子的修正质量谱

通过双球 $M^4 \otimes S^3 \otimes S^3$ 变形紧致化的场方程组解, 也可计算出修正半径 $\hat{b}$ 与修正K-K粒子质量 $\bar{m}_\phi$, 这时10维时空下的牛顿引力常数为 $G_{10} = G \times \hat{V}_3^2 = 4\pi^4 \hat{b}_0^6 \times G$, 双球半径为 $b_{10}=b_{20}=b_0 \approx 2.435 \times 10^3 (f^2/n) \text{ cm}$, 单参量变形时内部球修正半径为

$$\hat{b}_0 \approx b_0 \left(1 + \frac{2}{5} \varepsilon^2 b_0^2 \right), \quad (28)$$

令 $\phi = \ln(b/b_0)$, 由场方程(5)式得到标量场 ϕ 对应的有效势为

$$V(\phi) = -\frac{1}{2b_0^2} e^{-2\phi} - 8\pi G_{10} \left[-\frac{C}{6b_0^6} e^{-6\phi} + \frac{\rho_\Lambda}{8} \phi \right] + B_3, \quad (29)$$

当 $\phi=0$ 时, 零点势能由指数项系数和常数 B_3 之和构成, 通过调节积分常数 B_3 的值也可使有效势的零点能 $V(0)=0$. 在10维时空的双球紧致化中, 当两个内部球半径相等

表 3 单球修正半径和K-K粒子修正质量与单变形参量间的关系**Table 3** The relation between correction radius of single sphere and correction mass of K-K particles with one deformation parameter

额外维数 d	修正半径 $\hat{b}_0$ (cm)	修正质量 $\bar{m}_\phi$ (GeV)	磁单极数 n
3	0.592×10^{-7}	5.962×10^{-7}	10^{21}
4	0.536×10^{-9}	9.008×10^{-5}	10^{22}
5	0.568×10^{-11}	10.51×10^{-3}	10^{21}
6	6.113×10^{-12}	11.41×10^{-2}	10^{20}
7	0.798×10^{-12}	0.989×10^{-1}	5.18×10^{20}
8	3.924×10^{-13}	2.226×10^{-1}	1.78×10^{20}
9	1.144×10^{-13}	0.832×10^0	2.15×10^{19}
10	2.451×10^{-14}	2.958×10^0	10^{16}

表 4 单球修正半径和K-K粒子修正质量与双变形参量间的关系**Table 4** The relation between correction radius of single sphere and correction mass of K-K particles with two deformation parameters

额外维数 d	修正半径 $\hat{b}_0$ (cm)	修正质量 $\bar{m}_\phi$ (GeV)	磁单极数 n
3	0.516×10^{-7}	6.844×10^{-7}	10^{21}
4	0.472×10^{-9}	10.23×10^{-5}	10^{22}
5	0.497×10^{-11}	12.01×10^{-3}	10^{21}
6	5.268×10^{-12}	13.24×10^{-2}	10^{20}
7	0.673×10^{-12}	1.173×10^{-1}	5.18×10^{20}
8	3.201×10^{-13}	2.729×10^{-1}	1.78×10^{20}
9	0.892×10^{-13}	1.067×10^0	2.15×10^{19}
10	1.801×10^{-14}	4.027×10^0	10^{16}

时, 通过计算得到有效势(29)式在临界点 $\phi_c = 0$ 处的二阶导数 $(\partial^2 V(\phi) / \partial \phi^2)|_{\phi_c=0} = 2 / b_0^2 > 0$, 这时有效势也取极小值, 所以静态解对应的标量场同样达到稳定状态. 式中 $C = (n/f^2)^2$ 为磁单极系数, B_3 积分常数. 这时单参量 ε 变形时修正K-K粒子质量变为

$$\bar{m}_\phi = \frac{\sqrt{2}}{b_0 \left(1 + \frac{2}{5} \varepsilon^2 b_0^2 \right)}. \quad (30)$$

当推广至双参量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 变形时, 通过双球变形紧致化的场方程组解, 可得到修正的内部球半径满足如下方程:

$$\frac{\varepsilon_1^2}{5} \hat{b}_0^4 + \varepsilon_2 \hat{b}_0^3 - \hat{b}_0^2 + A = 0, \quad (31)$$

这时双球磁单极数均取为 $n=10^{15}$, $A \approx 5.904 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$. 再定义约化变形参量 $\varepsilon_1 = (1/\sqrt{k_1}) \times 10^{12} \text{ cm}^{-1}$, $\varepsilon_2 = (1/k_2) \times 10^{12} \text{ cm}^{-1}$, 那么可计算出对应的紧致双球半径 $\hat{b}_0$ 和修正K-K粒子质量 $\bar{m}_\phi = (\sqrt{2}/\hat{b}_0)$, 如表5和6所示.

由表5的计算结果可以看出, 单参量变形时随着约化变形参量 k 的增大, 紧致球半径 $\hat{b}_0$ 呈现交替变大和减小的规律, 其中有两个较大的峰值; 而K-K粒子质量 $\bar{m}_\phi$ 则呈现交替变小和增大的规律, 其中有两个较低的峰值. 和6维单球单参量变形时情况相比较, 修正半径都处于同一数量级, 但是双球紧致化时的修正质量比单双球紧致化时修正质量小一个数量级. 由表6的计算结果可以看出, 双单量变形时物理量的变化规律更具有多样性质, 当约化变形参量 k_1, k_2 都增大时, 或 k_1, k_2 之一增大时, 那么致球半径 $\hat{b}_0$ 都变小, 而K-K粒子质量 $\bar{m}_\phi$ 都变大. 当 k_1, k_2 的数值互换时, 那么 $k_2 > k_1$ 时的修正质量更大, 这表明双参量变形中对数变形势比正弦变形势对K-K粒子质量的影响更明显.

5 结果与讨论

本文研究了额外维空间的变形和K-K粒子质量的修正, 对于 $M^4 \otimes S^d$ 形式的紧致化, 计算结果表明当额外维数 d 的增加, 紧致球半径减小, 而K-K粒子质量变大, 紧致球半径和ADD模型中额外维尺度的数量级相吻合. 另外, 本文计算出的磁单极数也满足ADM模型给出约束条件.

对于 $M^4 \otimes S^3 \otimes S^3$ 形式的紧致化, 计算结果表明当磁单极强度系数的增加, 一个K-K粒子质量 m_{ϕ_1} 变大, 另一个K-K粒子质量 m_{ϕ_2} 变小, 单球和双球紧致化中额外维半径和K-K粒子质量的数量级都较为接近. 这两种紧致化中K-K粒子质量都满足 $m_\phi < 100 \text{ MeV}$, ADM模型得到的质量也接近这一范围.

在 $M^4 \otimes S^d$ 的变形紧致化中, 计算结果显示单参量变形中的修正半径 $\hat{b}_0$ 都在变小, 而K-K粒子质量 $\bar{m}_\phi$ 都在变大. 而双参量变形的修正半径略小于单参量变形的修正半径, 同时双参量的修正质量略大于单参量

表 5 紧致双球半径和K-K粒子质量与单约化变形参量间的关系**Table 5** The relation between compact double sphere radius and K-K particle mass with one reduced deformation parameter

变形物理量 k	$\hat{b}_0 (\times 10^{-12} \text{ cm})$	$\hat{m}_\phi (\times 10^{-2} \text{ GeV})$
20	2.492	1.120
25	2.548	1.095
30	2.530	1.103
35	2.517	1.109
40	2.507	1.113
45	2.499	1.117
50	2.492	1.120
55	2.487	1.122
60	2.483	1.124
65	2.479	1.125
70	2.685	1.039
75	2.474	1.128

表 6 紧致双球半径和K-K粒子质量与双约化变形参量间的关系**Table 6** The relation between compact double sphere radius and K-K particle mass with two reduced deformation parameters

变形物理量		$\hat{b}_0 (\times 10^{-12} \text{ cm})$	$\hat{m}_\phi (\times 10^{-2} \text{ GeV})$
k_1	k_2		
15	15	2.932	0.952
15	10	3.471	0.804
15	12	3.116	0.896
10	15	3.184	0.876
12	15	3.034	0.920
50	50	2.534	1.101
50	30	2.586	1.080
50	40	2.553	1.093
30	50	2.560	1.090
40	50	2.544	1.097

的修正质量, 因此双参量变形势比单参量变形势对K-K粒子质量的修正更显著.

在 $M^4 \otimes S^3 \otimes S^3$ 变形紧致化中, 计算结果显示单参量变形时当约化变形参量 k 增大, 那么K-K粒子质量 $\hat{m}_\phi$ 将出现变小和增大的交替变化规律, 并且有两个较低的峰值. 双单量变形时物理量的变化规律更复杂, 当约化变形参量 k_1, k_2 中任何值增大时, 那么紧致球半

径 $\hat{b}_0$ 都将变小, 而K-K粒子质量 $\hat{m}_\phi$ 都会变大. 当 k_1, k_2 的数值交换时, 则 $k_2 > k_1$ 时的修正质量更大, 因此双参量变形中对数变形势比正弦变形势对K-K粒子质量的修正更显著.

在膜理论中也可以考虑宇宙常数或Casimir效应, 并通过维数约化的方法来研究模型的稳定性质和半径子质量, 额外维空间包括环面, T^d/Z_2 orbifold以及双曲空间等几何构形^[28-30], 这些模型中也存在轻质量的K-K粒子和两种粒子的激发模式. 另外, 在宇宙早期演化过程中温度是必需考虑的物理因素^[31], 极高的环境温度也可能导致额外维空间的变形, 这时K-K粒子质量将在有限温度下得到进一步修正.

如果考虑标度因子均取为常数, 不能只分析标量场势能来判断是否稳定, 除了需要分析静态解对应的标量场是否稳定, 同时还需要分析时空上度规涨落的稳定性. 本文附录中根据Okada^[24]和Arkani-Hamed等人^[18]的方法分别研究了单球和双球紧致化中涨落解的变化规律, 即假定围绕标度因子的静态解产生随时间变化的微小涨落, 然后仔细分析了Einstein场方程对应的线性化涨落方程解的增长性质. 结果发现单球和双球紧致化中涨落解都可以达到稳定状态, 这与标量场势能判定的稳定性结果完全一致, 所以时空上度规涨落也可以导致K-K粒子质量的产生.

当前, 在高维物理中除了不同类型的理论模型研究之外, 人们还积极寻找各种实验方法来验证额外维空间的各种物理性质. 如粒子物理学中的LHC对撞机实验, 利用数字图像传感器测试在短距离上牛顿定律的偏离^[32,33]. 在天体物理学中, 通过计算和观测中子星束缚的K-K引力子衰变为光子伽马射线的通量, 可进一步给出ADD模型中大额外维外尺度的限制^[34,35]. 另外, 额外维度还将对宇宙中氦丰度分布产生影响, 随着额外维数的变化对氦丰度的修正值也将改变^[36,37].

近年来在LEP或LHC对撞机上寻找低质量粒子引起人们的关注和兴趣, Jaeckel和Spannowsky^[38]分析了质量1 MeV–90 GeV的类轴子的探测方法; Abu-Ajamieh等人^[39]则从天体物理或宇宙学角度讨论了质量从100 keV–10 GeV的轻半径子唯象约束问题, 本文中的磁单极数在 10^{20} 左右取值所计算出的K-K粒子质量也接近这一范围.

如果K-K粒子是暗物质的可能候选者, 其寿命 τ 应

大于当前宇宙的年龄 t_0 . 最近Abu-Ajamieh^[40]估计, 当半径子的质量小于0.1 MeV, 那么它与光子的耦合系数将小于 $10^{-15} \text{ GeV}^{-1}$. 如果半径子与Z-玻色子产生耦合, Z-玻色子可以先衰变为一个半径子和一个光子, 随后半径子再衰变为两个光子, 其衰变率为 $\Gamma \sim g_{\phi BB}^2 m_\phi^3$ ^[38], 这里 $\tau = 1/\Gamma > t_0$, $g_{\phi BB}$ 是半径子与Z-玻色子的耦合系数. 为了与Abu-Ajamieh的估计进行对比, 本文以单球紧致化中 $d=4$ 为例, 这时半径子的质量约为0.08 MeV,

宇宙年龄 $t_0 \approx 137$ 亿年, 经过估算后得到耦合系数 $g_{\phi BB} < 10^{-15} \text{ GeV}^{-1}$, 与Abu-Ajamieh估计的耦合系数数量级相同. 目前实验上尚未发现理论上所预言的K-K粒子, 一种可能的原因就是这些质量较轻的粒子和标准模型中的已知粒子, 如光子或规范Z-玻色子具有很弱的耦合作用, 结果导致其衰变过程比较难以测量. 所以, 将来的实验或观测将证实高维空间或K-K粒子是否存在, 也将最终决定各种形式的额外维理论模型是否成立.

参考文献

- Bailin D, Love A. Kaluza-Klein theories. *Rep Prog Phys*, 1987, 50: 1087–1170
- Gleiser M, Rajpoot S, Taylor J G. Higher dimensional cosmologies. *Ann Phys*, 1985, 160: 299–322
- Accetta F S, Gleiser M, Holman R, et al. Toward stable compactifications. *Nucl Phys B*, 1986, 276: 501–516
- Yan J, Hu S K. The stable compactification of ten-dimensional supergravity model. *Chin Phys C*, 1993, 17: 692–699
- Becker K, Becker M, Schwarz J H. String Theory and M-Theory, A Modern Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 300–548
- Günther U, Zhuk A. Gravitational excitons from extra dimensions. *Phys Rev D*, 1997, 56: 6391–6402
- Chopovsky A, Eingorn M, Zhuk A. Problematic aspects of Kaluza-Klein excitations in multidimensional models with Einstein internal spaces. *Phys Lett B*, 2014, 736: 329–332, arXiv: 1402.1340
- Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys Lett B*, 1998, 429: 263–272
- Randall L, Sundrum R. Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys Rev Lett*, 1999, 83: 3370–3373
- Orlando D, Park S C. Compact hyperbolic extra dimension: A M-theory solution and its implications for the LHC. *J High Energy Phys*, 2010, 2010 (8): 6, arXiv: 1006.1901
- Tseytlin A A. Review of AdS/CFT integrability, chapter II.1: Classical $AdS^5 \times S^5$ string solutions. *Lett Math Phys*, 2012, 99: 103–125
- Arutyunov G E, de Leeuw M, van Tongeren S J. The exact spectrum and mirror duality of the $(AdS^5 \times S^5)$ η superstring. *Theor Math Phys*, 2015, 182: 23–51, arXiv: 1403.6104
- Hoare B, Roiban R, Tseytlin A A. On deformations of $AdS_5 \times S^5$ supercosets. *J High Energy Phys*, 2014, 2014(6): 2, arXiv: 1403.5517
- Kameyama T, Yoshida K. A new coordinate system for q -deformed $AdS_3 \times S^5$ and classical string solutions. *J Phys A-Math Theor*, 2015, 48: 075401, arXiv: 1408.2189
- Martelli D, Passias A. The gravity dual of supersymmetric gauge theories on a two-parameter deformed three-sphere. *Nucl Phys B*, 2013, 877: 51–72, arXiv: 1306.3893
- Hoare B. Towards a two-parameter q -deformation of $AdS_3 \times S^3 \times M^4$ superstrings. *Nucl Phys B*, 2015, 891: 259–295, arXiv: 1411.1266
- Rubakov V A. Large and infinite extra dimensions. *Physics-Uspokhi*, 2001, 44: 871–893
- Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, March-Russell J. Stabilization of submillimeter dimensions: The new guise of the hierarchy problem. *Phys Rev D*, 2001, 63: 064020
- Henneaux M, Teitelboim C. P-Form electrodynamics. *Found Phys*, 1986, 16: 593–617
- Huang K, Hu S K. θ statistics and topological properties in the (2+1)-dimensional CP^1 model. *Mod Phys Lett A*, 1993, 08: 3455–3465
- Alvarez M, Olive D I. Charges and fluxes in Maxwell theory on compact manifolds with boundary. *Commun Math Phys*, 2006, 267: 279–305
- Witten E. On flux quantization in M-theory and the effective action. *J Geometry Phys*, 1997, 22: 1–13
- Giddings S B, Strominger A. Axion-induced topology change in quantum gravity and string theory. *Nucl Phys B*, 1988, 306: 890–907
- Okada Y. Inflation in Kaluza-Klein cosmology. *Phys Lett B*, 1985, 150: 103–106
- Holman R, Kolb E W, Vadas S L, et al. Extended inflation from higher-dimensional theories. *Phys Rev D*, 1991, 43: 995–1004
- Gardner C L. Primordial inflation and present-day cosmological constant from extra dimensions. *Phys Lett B*, 2002, 524: 21–25

- 27 Shtykovi N, Vassilevich D V. The heat kernel for deformed spheres. *J Phys A-Math Gen*, 1995, 28: L37–L43
- 28 Santos E, Pérez-Lorenzana A, Pimentel L O. Radion stabilization from the vacuum on flat extra dimensions. *Phys Rev D*, 2008, 77: 025023, arXiv: 0705.0051
- 29 Hofmann R, Kanti P, Pospelov M. (De)stabilization of an extra dimension due to a Casimir force. *Phys Rev D*, 2001, 63: 124020
- 30 Nasri S, Silva P J, Starkman G D, et al. Radion stabilization in compact hyperbolic extra dimensions. *Phys Rev D*, 2002, 66: 045029
- 31 Battefeld T, Watson S. String gas cosmology. *Rev Mod Phys*, 2006, 78: 435–454
- 32 Murata J, Tanaka S. A review of short-range gravity experiments in the LHC era. *Class Quantum Grav*, 2015, 32: 033001, arXiv: 1408.3588
- 33 Ninomiya K, Akiyama T, Hata M, et al. Short-range test of the universality of gravitational constant G at the millimeter scale using a digital image sensor. *Class Quantum Grav*, 2017, 34: 185005, arXiv: 1708.01482
- 34 Hannestad S, Raffelt G G. Supernova and neutron-star limits on large extra dimensions reexamined. *Phys Rev D*, 2003, 67: 125008
- 35 Ajello M, Baldini L, Barbiellini G, et al. Fermi-LAT Collaboration. Limits on large extra dimensions based on observations of neutron stars with the Fermi-LAT. *J Cosmol Astropart Phys*, 2012, 2012(02): 012, arXiv: 1201.2460
- 36 Barrow J D. Observational limits on the time evolution of extra spatial dimensions. *Phys Rev D*, 1987, 35: 1805–1810
- 37 Uzan J P. Varying constants, gravitation and cosmology. *Living Rev Relativ*, 2011, 14: 2, arXiv: 1009.5514
- 38 Jaeckel J, Spannowsky M. Probing MeV to 90 GeV axion-like particles with LEP and LHC. *Phys Lett B*, 2016, 753: 482–487, arXiv: 1509.00476
- 39 Abu-Ajamieh F, Lee J S, Terning J. The light radion window. *J High Energ Phys*, 2018, 2018(10): 50, arXiv: 1711.02697
- 40 Abu-Ajamieh F. The radion as a dark matter candidate. *Int J Mod Phys A*, 2018, 33: 1850144, arXiv: 1803.01249

附录 单球与双球紧致化中涨落方程解的稳定性质

单球紧致化中的涨落方程解:

首先设 $a(t) = a_0 + \delta a(t)$, $b(t) = b_0 + \delta b(t)$, 这里 $\delta a(t)$, $\delta b(t)$ 表示标度因子中随时间演化的涨落项, 并且定义 $p(t) = \delta a(t)/a_0$, $q(t) = \delta b(t)/b_0$. 将定义的 $p(t)$, $q(t)$ 代入单球紧致化的 Einstein 宇宙学方程(3)–(5)式, 并进行线性化处理后得到如下涨落方程:

$$3\ddot{p}(t) + d\ddot{q}(t) = Aq(t), \quad (\text{a1})$$

$$\ddot{p}(t) = Aq(t), \quad (\text{a2})$$

$$\ddot{q}(t) = Bq(t), \quad (\text{a3})$$

式中

$$A = \frac{2d(d-1)^2}{(d+2)b_0^2}, B = -\frac{4(d-1)^2}{(d+2)b_0^2}, \quad (\text{a4})$$

这时涨落解设为 $p(t) = p_0 \cdot e^{\pm i\omega t}$, $q(t) = q_0 \cdot e^{\pm i\omega t}$, p_0 , q_0 为常系数, 由涨落方程(a1)–(a3)式中可得到如下振动频率:

$$\omega^2 = \frac{4(d-1)^2}{(d+2)b_0^2}. \quad (\text{a5})$$

比较正文中(14)式与附录中(a5)式后发现

$$\omega^2 = m_\phi^2, \text{ 当 } (\partial^2 V(\phi) / \partial \phi^2) \Big|_{\phi=0} > 0.$$

这时势能处于稳定状态. 那么半径子质量 $m_\phi^2 > 0$ 对应的振动频率 $\omega^2 > 0$, 即 ω 为实数, 此时 $p(t) = p_0 \cdot e^{\pm i\omega t}$, $q(t) = q_0 \cdot e^{\pm i\omega t}$ 均产生微振动, 即振动不发生增长, 所以涨落解是稳定的. 当 $(\partial^2 V(\phi) / \partial \phi^2) \Big|_{\phi=0} < 0$ 时, 势能处于不稳定状态, 此时质量 $m_\phi^2 < 0$ 对应的振动频率 $\omega^2 < 0$, 即 ω 为纯虚数. 那么此时的涨落解为

$$p(t) = p_{01} e^{+|\omega|t} + p_{02} e^{-|\omega|t}, q(t) = q_{01} e^{+|\omega|t} + q_{02} e^{-|\omega|t},$$

这时涨落解中存在指数增长因子, 所以涨落方程解是不稳定的, 本文的研究中不存在这种情况.

双球紧致化中内部球半径不等时的涨落方程解:

同样设 $a = a_0 + \delta a(t)$, $b_1 = b_{10} + \delta b_1(t)$, $b_2 = b_{20} + \delta b_2(t)$, 其中 $\delta a(t)$, $\delta b_1(t)$, $\delta b_2(t)$ 分别表示标度因子中随时间演化的涨落项, 并且定义 $p(t) = \delta a(t)/a_0$, $q(t) = \delta b_1(t)/b_{10}$, $s(t) = \delta b_2(t)/b_{20}$. 将定义的 $p(t)$, $q(t)$, $s(t)$ 代入双球紧致化内部球半径不等时的 Einstein 宇宙学方程(3)–(5)式, 并进行线性化处理后可得到如下涨落方程:

$$3\ddot{p}(t) + 3\ddot{q}(t) = Cq(t) + Bs(t), \quad (\text{a6})$$

$$\ddot{p}(t) = Cq(t) + Bs(t), \quad (\text{a7})$$

$$\ddot{q}(t) = Aq(t) + Bs(t), \quad (\text{a8})$$

$$\ddot{s}(t) = Cq(t) + Ds(t), \quad (\text{a9})$$

式中, $A = -5/b_{10}^2$, $B = 3/b_{10}^2$, $C = 3/b_{20}^2$, $D = -5/b_{20}^2$, 涨落解设为 $p(t) = p_0 \cdot e^{\pm i\omega t}$, $q(t) = q_0 \cdot e^{\pm i\omega t}$, $s(t) = s_0 \cdot e^{\pm i\omega t}$, p_0, q_0, s_0 为常系数, 根据涨落方程(a6)–(a9)式可得

$$(\omega^2 + A)q_0 + Bs_0 = 0, \quad (\text{a10})$$

$$Cq_0 + (\omega^2 + D)s_0 = 0, \quad (\text{a11})$$

那么方程组(a10), (a11)有解的条件为

$$\begin{vmatrix} (\omega^2 + A) & B \\ C & (\omega^2 + D) \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{a12})$$

由此可得振动频率为

$$\omega^2 = \frac{\left(\frac{5}{b_{10}^2} + \frac{5}{b_{20}^2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{5}{b_{10}^2} + \frac{5}{b_{20}^2}\right)^2 - \frac{64}{b_{10}^2 b_{20}^2}}}{2}. \quad (\text{a13})$$

比较正文中(19)式与附录中(a13)式后发现 $\omega^2 = m_\phi^2$, 当 $(\partial^2 V(\phi) / \partial \phi^2)|_{\phi=0} > 0$ 时, 势能也处于稳定状态. 半径子质量 $m_\phi^2 > 0$ 对应的振动频率 $\omega^2 > 0$, ω 同样为实数, 那么此时 $p(t) = p_0 \cdot e^{\pm i\omega t}$, $q(t) = q_0 \cdot e^{\pm i\omega t}$, $s(t) = s_0 \cdot e^{\pm i\omega t}$, 均产生微振动, 所以涨落解也是稳定的.

双球紧致化中内部球半径相等时的涨落方程解:

同样设 $a = a_0 + \delta a(t)$, $b = b_0 + \delta b(t)$, 其中 $\delta a(t)$, $\delta b(t)$ 分别表示标度因子随时间演化的涨落项, 并且定义 $p(t) = \delta a(t)/a_0$, $q(t) = \delta b(t)/b_0$. 将定义的 $p(t), q(t)$ 代入双球紧致化内部球半径相等时的Einstein宇宙场方程(3)–(5)式, 并进行线性化处理后得到如下涨落方程:

$$3\ddot{p}(t) + 6\ddot{q}(t) = \frac{6}{b_0^2} q(t), \quad (\text{a14})$$

$$\ddot{p}(t) = \frac{6}{b_0^2} q(t), \quad (\text{a15})$$

$$\ddot{q}(t) = -\frac{2}{b_0^2} q(t), \quad (\text{a16})$$

这里涨落解设为 $p(t) = p_0 \cdot e^{\pm i\omega t}$, $q(t) = q_0 \cdot e^{\pm i\omega t}$, p_0, q_0 为常系数, 根据涨落方程(a14)–(a16)式可得如下振动频率:

$$\omega^2 = \frac{2}{b_0^2}. \quad (\text{a17})$$

所以 $\omega^2 = m_\phi^2$, 即频率和正文中(29)式得到的半径子质量相同, 当 $(\partial^2 V(\phi) / \partial \phi^2)|_{\phi=0} > 0$ 时, 势能也处于稳定状态. 此时质量 $m_\phi^2 > 0$ 对应的振动频率 $\omega^2 > 0$, 即 ω 为实数, 那么这时 $p(t) = p_0 \cdot e^{\pm i\omega t}$, $q(t) = q_0 \cdot e^{\pm i\omega t}$ 均产生微振动, 所以涨落解也是稳定的.

The deformation of extra dimensional compact sphere space and modified calculation of K-K particles mass

LI CongXiao, YAN Jun^{*} & YU Yi

Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China

In this paper, the deformation of extra dimensional space and the correction of K-K particle mass are studied according to Einstein cosmological field equation in high dimensional space-time. It is assumed that to exist high-order gauge fields and vacuum energy densities in the interior space of the model, then the radius of compact single sphere and compact double sphere and the corresponding mass of K-K particles are calculated respectively. In addition, the modified values of radius and K-K particle mass are calculated by using single-parameter deformation and double-parameters deformation of internal sphere metric. The number of extra dimensions and deformation effect on internal sphere radius and K-K particle mass are also analyzed and discussed. We also study the variation of fluctuation solutions in single-sphere and double-sphere compactification, i.e., assuming that the static solutions around the scale factor to produce a small fluctuation with time, we carefully analyze the growth properties of solutions for linear fluctuation equation corresponding to Einstein field equation. It is found that the fluctuation solutions in single-sphere and double-sphere compactification can reach stable state, and this conclusion is in good agreement with the stability results of scalar field potential energy, thus the fluctuations of metric in space-time can lead masses generation of K-K particle.

extra dimension space, high-order gauge field, metric deformation parameter, K-K particle mass

PACS: 04.20.Gz, 11.10.Kk, 11.25.Mj, 98.80.Cq

doi: [10.1360/SSPMA-2019-0043](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0043)