【电子与信息科学 / Electronics and Information Science】

四翼混沌系统及其 Hopf 分岔控制

颜闽秀^{1,2}, 徐 辉¹

1) 沈阳化工大学信息工程学院, 辽宁沈阳 110142;

2) 工业环境-资源协同控制与优化技术辽宁省高校重点实验室, 沈阳化工大学, 辽宁沈阳 110142

摘 要: 为满足 Hopf 分岔控制的实际需要和通信保密对复杂混沌系统的需求, 设计一个四翼混沌吸引子和基于 washout 滤波器的分岔控制器. 基于 Lorenz 系统构建新的四翼系统, 通过分岔图、李雅普诺夫指数和吸引子仿真分析系统的动力学演化, 确定其混沌特性. 基于高维 Hopf 分岔理论分析系统 Hopf 分岔的存在性, 设计了一个基于 washout 滤波器, 由线性项和非线性项组成的 Hopf 分岔控制器. 该控制器在不改变系统平衡点的情况下, 可实现系统在预期位置产生 Hopf 分岔, 完成对极限环幅值和稳定性的控制. 仿真结果表明, 极限环幅值和分岔参数的临界值是可以控制的, 验证了控制器的合理性和有效性. 该研究拓展了混沌系统 Hopf 分岔控制的多样性, 在通信和图像加密领域有潜在的应用.

关键词: 系统学; 四翼混沌系统; Hopf 分岔; 分岔控制; 极限环; 非线性系统; 保密通信

中图分类号: TP273

文献标志码: A

doi: 10.3724/SP.J.1249.2021.02180

Four-wing chaotic system and its Hopf bifurcation control

YAN Minxiu^{1, 2} and XU Hui¹

1) College of Information Engineering, Shenyang University of Chemical Technology, Shenyang 110142, Liaoning Province, P. R. China

2) Key Laboratory for Industrial Environment-Resources Cooperative Control and Optimization Technology, Shenyang University of Chemical Technology, Shenyang 110142, Liaoning Province, P. R. China

Abstract: In order to meet the practical needs of Hopf bifurcation control and communication security, we propose a four-wing chaotic attractor and a bifurcation controller based on washout filter. We analyze the dynamic evolution of system by means of bifurcation diagram, Lyapunov exponent and attractor simulation to determine its chaotic characteristics. Based on the high-dimensional bifurcation theory, we discuss the existence of Hopf bifurcation, and design a Hopf bifurcation controller based on washout filter, which is composed of linear and nonlinear terms. Without changing the equilibrium point of system, the controller can generate the Hopf bifurcation of system at the expected position, and realize the control of amplitude and stability of the limit cycle. The simulation results show that the amplitude of the limit cycle and the critical value of bifurcation parameters can be controlled, which verifies the rationality and effectiveness of the controller. This study expands the diversity of Hopf bifurcation control in chaotic system and has potential applications in communication and image encryption.

Key words: systematics; four-wing chaotic system; Hopf bifurcation; bifurcation control; limit cycle; nonlinear system; secure communication

Received: 2020-05-20; Accepted: 2020-07-20

Foundation: China-Macedonia Intergovernmental Scientific and Technological Cooperation Project ([2017]25;5-5)

Corresponding author: Associate professor YAN Minxiu. E-mail: yanminxiu@syuct.edu.cn

Citation: YAN Minxiu, XU Hui. Four-wing chaotic system and its Hopf bifurcation control [J]. Journal of Shenzhen University Science and Engineering, 2021, 38(2): 180-187. (in Chinese)

混沌由于其独有的貌似无规则、类随机的动力学特性, 在通信保密、生物医学和化学等领域有着广泛的应用^[1-2]. 自 20 世纪 60 年代初, LORENZ^[3] 发现混沌吸引子以来, 多翼或多涡卷混沌系统、超混沌系统、分数阶混沌系统等非线性动力系统被相继提出, 这些具有不同动力学特性和拓扑结构的混沌系统丰富了混沌理论, 提高了人们对混沌的认识^[4-8]. 目前, 构造新的非线性混沌系统仍然是混沌理论研究中的热点.

Hopf 分岔分析及其控制是非线性系统研究中的重要方向, 在经济、气象、电力和航天等工程中有广泛应用, 具有很高的理论和应用价值^[9-11]. Hopf 分岔控制的主要任务是设计控制器改变系统的分岔特性, 如消除 Hopf 分岔或在预期位置产生 Hopf 分岔, 控制极限环的幅值和稳定性等以避免不良后果, 或者有目的地创建或强化有益的分岔, 使其为实际所需要. 主要控制方法有规范型方法、线性或非线性状态反馈控制法和滤波器方法等^[12-15]. 随着混沌理论的发展, 对混沌系统的研究主要集中在混沌控制和混沌同步方面^[16], 有关 Hopf 分岔控制的研究相对较少, 也未完全成熟.

CHEN 等^[17-18] 对非线性系统的分岔控制理论和方法作了系统的报道, 为混沌系统的 Hopf 分岔控制的发展奠定了基础. CAI 等^[19] 针对一个新混沌系统, 提出用一种状态反馈与参数控制相结合的混合控制器来实现系统 Hopf 分岔控制, 基于中心流形定理和规范型理论验证了控制策略可行性. ZHANG 等^[20-21] 采用非线性状态反馈的方法对一类 Pan 混沌系统和超混沌 Pan 系统进行分岔控制, 实现系统 Hopf 分岔延迟. ESHAGHI 等^[22] 对一个新分数阶混沌系统的 Hopf 分岔作了研究, 利用线性反馈控制实现对系统的稳定控制, 消除系统的 Hopf 分岔. 这些控制研究拓展了混沌系统 Hopf 分岔控制的多样性, 在混沌理论及实际应用中具有重要意义.

本研究以 Lorenz 系统为基础, 增加非线性项和线性项构建出新四翼混沌系统, 并基于高维分岔理论设计基于 washout 滤波器的混合控制器以实现对该系统的 Hopf 分岔控制.

1 新四翼混沌系统

受 Lorenz 系统的启发, 本研究提出的四翼混沌系统模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = -a(x - yz) \\ \dot{y} = bx - xz + dy \\ \dot{z} = -cz + xy + ey \end{cases} \quad (1)$$

其中, x 、 y 和 z 为状态变量; a 、 b 、 c 、 d 和 e 为系统的控制参数.

若将方程中的 yz 替换成 y , 系统在一定条件下仍存在解, 此时, 当 $e = 0$, 为 Lorenz 系统. 这里, 系统参数 a 、 b 、 c 、 d 和 e 均为正实数. 考虑新增线性项 ey 对系统混沌特性和吸引子形态的影响, 这里假设 $a = 12$, $b = 1$, $c = 5$, $d = 5$, 绘制以 e 控制参数的分岔图和基于 Wolf 法的李雅普诺夫 (Lyapunov) 指数谱^[23] 来阐明系统的动力学演化, 结果如图 1. 其中, $e \in (0, 1]$, (x, y, z) 的初始条件为 $(1, 1, 1)$, 参数 e 的变化步长为 0.01; λ_{L1} 、 λ_{L2} 和 λ_{L3} 为系统的 3 个 Lyapunov 指数.

(a) 关于 e 的分岔图

(b) Lyapunov 指数随参数 e 的变化趋势

图 1 分岔图和 Lyapunov 指数

Fig. 1 Bifurcation diagram and Lyapunov exponents

图 1 表明, 当 $e \in (0, 1]$ 时, 系统有周期和混沌两种状态. 特别地, 当 $e \in (0.88, 1]$ 时, 系统可产生四翼混沌吸引子. 当 $e = 1$ 时, 四翼混沌吸

引子如图 2.

由图 2 可见, 吸引子有四翼, 上下各两翼. 与 Lorenz 系统的吸引子相比, 四翼吸引子的拓扑结构更为复杂.

图 2 四翼吸引子及其相图

Fig. 2 Four wing attractor and the phase diagram

2 Hopf 分岔的存在性

观察系统(1)可知, 参数 a 的变化不影响平衡点的位置. 为简化计算, 保持参数 $b = 1, c = d = 5, e = 1$ 不变, 以 a 为分岔参数. 令系统(1)中 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, 求解得到系统的 5 个平衡点 $A(0, 0, 0)$, $B(-4.537, 2.533, -1.791)$, $C(-6.762, -2.422, 2.791)$, $D(3.537, -1.974, -1.791)$ 和 $E(5.762, 2.064, 2.791)$. 由此可见, 平衡点中不含参数 a , 平衡点之间不存在对称性. 系统(1)在平衡点 A 处的系数矩阵的特征方程为

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (2)$$

其中, $a_0 = -25$; $a_1 = -25$; $a_2 = a$; $a_3 = 1$. 由高维分岔理论^[24]可知, 若 $a_1a_2 - a_0a_3 = 0$, $a_i > 0$ 均成立且满足横截条件, 其中 $i = 0, 1, 2, 3$, 则参数 a 穿过某一值时系统(1)会在平衡点 A 处发生 Hopf 分岔. 因本研究中 $a_0 < 0$, $a_1 < 0$, 平衡点 A 处不会发生 Hopf 分岔. 同时由 Routh-Hurwitz 判据可知, 在参数 a 的定义域内, 平衡点 A 是不稳定的. 系统(1)在平衡点 B 处的系数矩阵的特征方程为

$$b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0 \quad (3)$$

其中, $b_0 < 93.7a$; $b_1 = -1.42a - 8.95$; $b_2 = a$; $b_3 = 1$. 可见, 在参数 a 的范围内 $b_1 < 0$, 系统(1)在平衡点 A 处不会发生 Hopf 分岔, 并且该平衡点是不稳定的. 系统(1)在平衡点 C 处的系数矩阵的特征方程为

$$c_3\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0 \quad (4)$$

其中, $c_0 = 139a$; $c_1 = 14 - 0.867a$; $c_2 = a$; $c_3 = 1$. 当 $a > 0$ 时, $c_1c_2 - c_0c_3 < 0$ 恒成立, 可知系统不会因 a 的变化在平衡点 C 处发生 Hopf 分岔, 且平衡点 C 是不稳定的. 系统(1)在平衡点 D 处的系数矩阵的特征方程为

$$d_3\lambda^3 + d_2\lambda^2 + d_1\lambda + d_0 = 0 \quad (5)$$

这里, $d_0 = 3.025a$; $d_1 = 1.102a - 8.953$; $d_2 = a$; $d_3 = 1$. 因此, 可求得式(5)中 a 的解 $a_D = 4.3898$, 使 $d_1d_2 - d_0d_3 = 0$, $d_i > 0$ 恒成立, $i = 0, 1, 2, 3$. 此时, 特征方程(5)有一对纯虚特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm \omega_D i$ 和一个负实根 $\lambda_3 = -74.3898$. 其中, $\omega_D = 8.5455$. 进一步对式(5)求 λ 关于 a 的导数, 并用 f'_1 代替 λ' , 则可得

$$f'_1 = -\frac{\lambda^2 + 1.102\lambda + 3.025}{3\lambda^2 + 2a\lambda + 1.102a - 8.953} \quad (6)$$

将 $a = a_D$ 和 $\lambda = \omega_D i$ 代入式(6), 得到 $\text{Re}(f'_1) = -0.0073 \neq 0$, 满足横截条件, a_D 为 Hopf 分岔的临界值, 参数 a 穿过 a_D 时系统会在平衡点 D 处发生 Hopf 分岔. 另外, 当 $a > a_D$ 时, 平衡点 D 是稳定的; 否则, 平衡点 D 是不稳定的. 对平衡点 E 做相同处理, 有

$$e_3\lambda^3 + e_2\lambda^2 + e_1\lambda + e_0 = 0 \quad (7)$$

其中, $e_0 = 118.446a$; $e_1 = 0.739a + 13.963$; $e_2 = a$; $e_3 = 1$. 可知, 在 a 的定义域内, $e_i > 0$ 恒成立, $i = 0, 1, 2, 3$. 当 $e_1e_2 - e_0e_3 = 0$ 时, 求得式(7)中 a 的解 $a_E = 141.464$. 此时, 特征方程(7)有一对纯虚特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm \omega_E i$ 和一个负实根 $\lambda_3 = -141.464$. 其中, $\omega_E = 10.8833i$. 对式(7)求 λ 关于 a 的导数, 并用 f'_2 代替 λ' , 则可得

$$f_2' = -\frac{\lambda^2 + 0.739\lambda + 118.446}{3\lambda^2 + 2a\lambda + 0.739a + 13.963} \quad (8)$$

将 $a = a_E$ 和 $\lambda = \omega_E i$ 代入式(8), 得到 $\text{Re}(f_2') = -0.0026 \neq 0$, 可知横截条件满足, 故 $a_E = 141.464$ 是系统在平衡点 E 发生 Hopf 分岔的临界值.

综上所述, 以 a 为分岔参数时系统(1) 仅在平衡点 D 和 E 处发生 Hopf 分岔, 它们的分岔临界值分别为 $a_D = 74.3898$ 和 $a_E = 141.464$. 现以平衡点 D 为例来仿真, 选择 a_D 左侧数值 $a_{DL} = 74.2898$ 和右侧数值 $a_{DR} = 74.4899$ 来进行数值仿真, 图3展示了 a_{DL} 和 a_{DR} 时的吸引子.

图3 a 值为 a_{DL} 和 a_{DR} 时的吸引子

Fig.3 Attractors for $a = a_{DL}$ and $a = a_{DR}$

图3表明, 系统在穿过参数 $a_D = 74.3898$ 时发生 Hopf 分岔, $a < a_D$ 时存在周期解, 运动轨迹收敛于极限环, $a > a_D$ 时运动轨迹稳定于不动点.

3 Hopf 分岔控制

Washout 滤波器作为一种高通滤波器, 具有保

持原系统平衡点位置不变的优点, 被广泛用于工业领域. 本研究基于 Washout 滤波器对系统设计非线性控制器进行 Hopf 分岔控制. 这里, 引入新变量 w 并对系统(1) 进行 Hopf 分岔控制, 对原系统施加控制 u 并构建受控系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = -a(x - yz) + u \\ \dot{y} = bx - xz + dy \\ \dot{z} = -cz + xy + ey \\ \dot{w} = x - mw \end{cases} \quad (9)$$

其中, 滤波器常数 $m > 0$; u 为控制器,

$$u = k_1(x - mw) + k_2(x - mw)^3 \quad (10)$$

这里, k_1 和 k_2 为控制增益. 由式(10)可见, 新增变量 w 和控制 u 不改变原系统平衡点的位置. 保持其他参数不变, 以 a 为分岔参数, 研究与 D 对应的平衡点 $D'(3.537, -1.974, -1.791, 3.537/m)$ 的 Hopf 分岔. 调整受控参数 k_1 与 m 可改变分岔参数的临界值, 实现分岔在预期位置发生. 调整受控参数 k_2 能够改变系统分岔解的稳定性与分岔方向. 以下将基于高维分岔理论来分析控制器的有效性和合理性.

在平衡点 D' 处对受控系统线性化, 得到系数矩阵的特征方程为

$$h_4\lambda^4 + h_3\lambda^3 + h_2\lambda^2 + h_1\lambda + h_0 = 0 \quad (11)$$

其中, $h_0 = 73.0253am$; $h_1 = 73.0253a + 8.9526k_1 - 8.9526m + 1.102am$; $h_2 = 1.102a + am - 8.9526$; $h_3 = a - k_1 + m$; $h_4 = 1$. 由高维分岔理论可知, 此时若要受控系统发生 Hopf 分岔, 则参数需满足式(12)和式(13).

$$\begin{aligned} f = h_1h_3 = 2h_3 - h_0h_3^2 - h_1^2 &= 0, \\ h_i &> 0, i = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\lambda'(a) \Big|_{\substack{a=a_0, m=m_0 \\ \lambda=i\omega_0, k_1=k_0}} = \frac{-(\lambda^3 + g_0\lambda^2 + g_1\lambda + g_2)}{4\lambda^3 + 3g_3\lambda^2 + 2g_4\lambda + g_5} \neq 0 \quad (13)$$

其中, $g_0 = 1.102 + m$; $g_1 = 73.0253 + 1.102m$; $g_2 = 73.0253m$; $g_3 = a - k_1 + m$; $g_4 = 1.102a - 8.95263 + am$; $g_5 = 73.0253a + 8.952(k_1 - m) + 1.102am$; $a = a_0$, $m = m_0$ 和 $k_1 = k_0$ 是满足式(12)中的解; $i\omega_0$ 是式(11) 在参数 a_0 , m 和 k_0 下的一个纯虚特征根.

式(12)和式(13)表明, Hopf 分岔参数的临界值仅与受控参数 k_1 和 m 有关, 即可通过调整受控参数 k_1 和 m 来实现 Hopf 分岔在指定位置产生. 为便于确定受控参数值, 可先找出满足式(12)的值, 再

代入式(13)验证. 考虑到参数 $a > 0$, $m > 0$, 取 $a \in (0, 250]$, $m \in (0, 5]$, $k_1 \in (50, 50]$, 由式(13)绘制出符合其条件的分岔参数 a 和受控参数 k_1 和 m 的局部曲面图和平面图, 如图 4.

图 4 分岔参数与受控参数局部图

Fig. 4 Function diagrams of bifurcation parameter and controlled parameter

图 4 中曲面上的任意一点都满足式(12), 一般来说, 在这个曲面上可以找到实现指定位置 a 处发生 Hopf 分岔的受控参数值 k_1 和 m . 继续增大 k_1 的变化区间, 可在更大的范围内调整系统的分岔临界值. 表 1 给出了曲面上实现 Hopf 分岔提前和延后, 且满足横截性条件式(13)的任意各一组值.

表 1 参数 a , k_1 和 m 的取值

Table 1 Values of parameters of a , k_1 and m

a	k_1	m	v_0	$\lambda'(a)$
70	-5.659	0.200 0	8.180 1	-0.006 7+0.005 7i
80	-10.000	1.359 6	8.009 8	-0.005 5+0.006 6i

进一步分析受控参数 k_2 对受控系统分岔的方向、临界性、极限环稳定性和幅值影响. 据表 1 选择 Hopf 分岔临界值 $a = 80$ 来研究, 对比原系统可

知 Hopf 分岔推迟. 此时, 受控系统在平衡点 D' 的特征方程(11) 有一对纯虚特征根 $\lambda_{21} = \lambda_{22} = \pm v_0 i = \pm 8.009 8i$ 和两个负实根 $\lambda_{23} = -1.376 1$, $\lambda_{24} = -89.983 5$. 求出 λ_{21} , λ_{23} 和 λ_{24} 所对应的特征向量分别为 $v_{21} = [1, -0.286 4 - 0.305 8i, -0.308 2 + 0.216 3, 0.020 6 - 0.121 4]^T$, $v_{23} = [1, -2.420 8, -3.575 3, -60.530 5]^T$, $v_{24} = [1, -0.028 5, 0.024 8, -0.011 3]^T$. 那么, 对系统作如下变换

$$X = x_{D'} + PZ \quad (14)$$

其中, $X = [x, y, z, w]^T$; $Z = [z_1, z_2, z_3, z_4]^T$; $x_{D'} = [3.537, -1.974, -1.791, 3.537/1.359 6]^T$; $P = [\text{Re}(v_{21}), -\text{Im}(v_{21}), v_{23}, v_{24}]$. 因此, 可得受控系统的规范形为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -v_0 z_2 + f_1(z_i, k_2) \\ \dot{z}_2 = v_0 z_1 + f_2(z_i, k_2) \\ \dot{z}_3 = \lambda_{23} z_3 + f_3(z_i, k_2) \\ \dot{z}_4 = \lambda_{24} z_4 + f_4(z_i, k_2) \end{cases} \quad (15)$$

其中, $f_i(z_i, k_2)$ 为非线性函数, 其表达式过于繁琐故此处不予列出. 由式(15)可求出相关的必要特征量为

$$G_{21} = \frac{1}{8} \left[\frac{\partial^3 f_1}{\partial z_1^3} + \frac{\partial^3 f_1}{\partial z_1 \partial z_2^2} + \frac{\partial^3 f_2}{\partial z_1^2 \partial z_2} + \frac{\partial^3 f_2}{\partial z_2^3} + i \left(\frac{\partial^3 f_2}{\partial z_1^3} + \frac{\partial^3 f_2}{\partial z_1 \partial z_2^2} - \frac{\partial^3 f_1}{\partial z_1^2 \partial z_2} - \frac{\partial^3 f_1}{\partial z_2^3} \right) \right] = k_2(0.059 - 0.723 5i) \quad (16)$$

$$g_{11} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_2^2} + i \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z_2^2} \right) \right] = 0.062 3 + 0.648 i \quad (17)$$

$$g_{02} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_2^2} - 2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1 \partial z_2} + i \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial z_2^2} + 2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1 \partial z_2} \right) \right] = 0.260 2 + 0.726 9i \quad (18)$$

$$g_{20} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_2^2} + 2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1 \partial z_2} + i \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial z_2^2} - 2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1 \partial z_2} \right) \right] = -0.042 9 + 1.634 i \quad (19)$$

$$G_{110,1} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1 \partial z_3} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z_2 \partial z_3} + i \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1 \partial z_3} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_2 \partial z_3} \right) \right] = -1.862 2 + 14.073 i \quad (20)$$

$$G_{110,2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1 \partial z_4} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z_2 \partial z_4} + i \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1 \partial z_4} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_2 \partial z_4} \right) \right] = 0.133\ 3 + 1.000\ 3i \quad (21)$$

$$G_{101,1} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1 \partial z_3} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial z_2 \partial z_3} + i \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1 \partial z_3} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_2 \partial z_3} \right) \right] = 2.766\ 9 + 12.789\ 6i \quad (22)$$

$$G_{101,2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1 \partial z_4} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial z_2 \partial z_4} + i \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1 \partial z_4} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_2 \partial z_4} \right) \right] = 0.065\ 8 + 0.125\ 4i \quad (23)$$

$$w_{11,1} = \frac{1}{4\lambda_{23}} \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial z_2^2} \right) = 0.000\ 8 \quad (24)$$

$$w_{11,2} = \frac{1}{4\lambda_{24}} \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial z_2^2} \right) = 0.009\ 1 \quad (25)$$

$$w_{20,1} = \frac{1}{4(2iv_0 - \lambda_{23})} \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial z_2^2} - 2i \frac{\partial^2 f_3}{\partial z_1 \partial z_2} \right) = 0 \quad (26)$$

$$w_{20,2} = \frac{1}{4(2iv_0 - \lambda_{24})} \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial z_2^2} - 2i \frac{\partial^2 f_3}{\partial z_1 \partial z_2} \right) = 0.067 - 0.002\ 6i \quad (27)$$

$$g_{21} = G_{21} + (G_{110,1}w_{11,1} + G_{101,1}w_{20,1} + G_{110,2}w_{11,2} + G_{101,2}w_{20,2}) = k_2(0.059 - 0.723\ 5i) + 0.005\ 1 + 0.050\ 5i \quad (28)$$

$$C = \frac{i}{2v_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2} = k_2(0.029\ 5 - 0.361\ 8i) - 0.002\ 1 - 0.106\ 3i \quad (29)$$

根据式(1)至式(28)和表1, 可求出判断受控系统 Hopf 分岔解的稳定性指标 β_2 和分岔方向指标 μ_2 分别为

$$\mu_2 = -\operatorname{Re}(C)/\varphi' = 5.321\ 8k_2 - 0.375\ 8 \quad (30)$$

$$\beta_2 = -2\mu_2\varphi' = 0.059k_2 - 0.004\ 2 \quad (31)$$

其中, φ' 为表1中 $a = 80$ 时 $\varphi'(a)$ 对应的实部; 函数 β_2 和 μ_2 关于参数 k_2 的局部关系如图5.

式(30)、式(31)和图5表明, 受控系统分岔解的稳定性与分岔方向仅与非线性项的参数 k_2 有关. 一般地, 为保证 Hopf 分岔出现稳定的周期解, 即保证极限环的稳定性, 应取 $k_2 < 0.070\ 6$. 此时有 $\beta_2 < 0$ 和 $\mu_2 < 0$, 则受控系统会在 $a = a_0 = 80$ 处发生超临界的 Hopf 分岔. 分岔方向为 $a < a_0$, 即在

图5 β_2 和 μ_2 与 k_2 关系的函数图

Fig. 5 Function diagram of β_2 , μ_2 and k_2

a_0 的左侧出现稳定的极限环. 现取 $k_2 = -0.2$, 临界值 $a_0 = 80$ 的两侧数值 $a_{0L} = 79.9$ 和 $a_{0R} = 80.1$ 进行仿真, 结果如图6.

图6 a 值为 a_{0L} 和 a_{0R} 时的吸引子

Fig. 6 Attractors with $a = a_{0L}$ and $a = a_{0R}$

图 6 表明, 系统在 $a_0 = 80$ 时发生 Hopf 分岔, 对比图 3 可知, Hopf 分岔推迟. 当 $a < a_0$ 时, 系统产生极限环; 当 $a > a_0$ 时, 系统轨道稳定于不动点. 且对于 $a < a_0$, 当 $|a - a_0| \ll 1$ 时, 受控系统的极限环幅值 r 与分岔参数 a 和受控参数 k_2 有如式 (32) 的近似解析关系.

$$r = \sqrt{-\frac{\varphi'(a - a_0)}{\operatorname{Re}(C)}} = \sqrt{\frac{a - 80}{5.3218k_2 - 0.3758}} \quad (32)$$

图 7 给出了式 (32) 中函数 r 与参数 a 和 k_2 的局部函数图. 由图 7 可见, 当参数 a 固定时, 极限环的幅值随受控参数 k_2 的增大而增大; 当参数 k_2 固定时, 极限环的幅值随分岔参数 a 的增大而减小.

图 8 给出了受控系统在不同的 k_2 和 a 值下产生的极限环. 由图 8 可见, 受控参数 k_2 和分岔参数 a 能够控制极限环的幅值. 综上所述, 控制器能够改变分岔的临界值, 分岔解的稳定性和分岔方向, 证

明控制器设计合理且可行.

图 7 极限环幅值 r 与 k_2 和 a 的关系图

Fig. 7 The relationship graph among the limit cycle amplitude r , k_2 and a maximization step

图 8 不同 k_2 和 b 值下的极限环

Fig. 8 Limit cycles with different k_2 and b

结 语

提出一个新的四翼混沌系统, 通过混沌理论中相关的混沌判据验证了四翼系统的混沌特性. 同时设计了一种非线性反馈控制器, 实现了对新混沌系统的 Hopf 分岔控制, 通过调控受控参数能够改变系统 Hopf 分岔的临界点到期望值, 控制极限环的稳定性和幅值.

基金项目: 国家科技部中国-马其顿政府间科技合作资助项目 (国科外[2017]25: 5-5)

作者简介: 颜闽秀 (1972—), 沈阳化工大学副教授、博士. 研究方向: 复杂系统控制和混沌理论. E-mail: yanminxiu@syuct.edu.cn

引文: 颜闽秀, 徐 辉. 四翼混沌系统及其 Hopf 分岔控制 [J]. 深圳大学学报理工版, 2021, 38(2): 180-187.

<http://journal.szu.edu.cn>

参考文献 / References:

- [1] CHEN Ping, YU Simin, ZHANG Xiaoyang, et al. ARM-embedded implementation of a video chaotic secure communication via WAN remote transmission with desirable security and frame rate [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 86(2): 725-740.
- [2] GAN Qiuye, YU Simin, LI Chengqing, et al. Design and ARM-embedded implementation of a chaotic map-based multicast scheme for multiuser speech wireless communication [J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 2017, 45(11): 1849-1872.
- [3] LORENZ E N. Deterministic non-periodic flow [J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1963, 20 (2): 130-141.

- [4] 庄志本, 李 军, 刘静漪, 等. 基于新的五维多环多翼超混沌系统的图像加密算法[J]. 物理学报, 2020, 69(4): 50-63.
ZHUANG Zhiben, LI Jun, LIU Jingyi, et al. Image encryption algorithm based on new five-dimensional multiring and multi-wing hyperchaotic system [J]. Acta Physica Sinica, 2020, 69(4): 50-63. (in Chinese)
- [5] 贾美美, 蒋浩刚, 李文静. 新 Chua 多涡卷混沌吸引子的产生及应用[J]. 物理学报, 2019, 68(13): 61-73.
JIA Meimei, JIANG Haogang, LI Wenjing. Generation and application of novel Chua multi-scroll chaotic attractors [J]. Acta Physica Sinica, 2019, 68(13): 61-73. (in Chinese)
- [6] HU Xiaoyu, LIU Chongxin, LIU Ling, et al. Chaotic dynamics in a neural network under electromagnetic radiation [J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 91(3): 1541-1554.
- [7] BAO Bochong, LIU Zhong, XU Jianping. New chaotic system and its hyper chaos generation [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2009, 20(6): 1179-1187.
- [8] NI Junkang, LIU Ling, LIU Chongxin, et al. Fractional order fixed-time nonsingular terminal sliding mode synchronization and control of fractional order chaotic systems [J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 89(3): 2065-2083.
- [9] KAI G, ZHANG W, JIN Z, et al. Hopf bifurcation and dynamic analysis of an improved financial system with two delays [J]. Complexity, 2020, 2020(1): 1-13.
- [10] DIJKSTRA H A. Numerical bifurcation methods applied to climate models: analysis beyond simulation [J]. Nonlinear Processes in Geophysics, 2019, 26(4): 359-369.
- [11] 史昭娣, 张靠社, 黄越辉, 等. 基于 Hopf 分岔的风电集群系统电压稳定分析[J]. 电力系统保护与控制, 2017, 45(14): 9-16.
SHI Zhaodi, ZHANG Kaoshe, HUANG Yuehui, et al. Analysis of voltage stability in wind power cluster system based on Hopf bifurcation [J]. Power System Protection and Control, 2017, 45(14): 9-16. (in Chinese)
- [12] KANG Wang, KRENER A J. Extended quadratic controller normal form and dynamic state feedback linearization of nonlinear systems [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1992, 30(6): 1319-1337.
- [13] 刘素华, 唐驾时. Langford 系统 Hopf 分叉的线性反馈控制[J]. 物理学报, 2007, 56(6): 120-126.
LIU Suhua, TANG Jiashi. Linear feedback control of Hopf bifurcation in Langford system [J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(6): 120-126. (in Chinese)
- [14] YU P, CHEN Guanrong. Hopf bifurcation control using nonlinear feedback with polynomial functions [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2004, 14(5): 1683-1704.
- [15] CHENG Zhunshui. Anti-control of Hopf bifurcation for Chen's system through washout filters [J]. Neurocomputing, 2010, 73(16): 3139-3146.
- [16] 毛北行, 王战伟. 一类分数阶复杂网络系统的有限时间同步控制[J]. 深圳大学学报理工版, 2016, 33(1): 96-101.
MAO Beixing, WANG Zhanwei. Finite-time synchronization control of a class of fractional-order complex network systems [J]. Journal of Shenzhen University Science and Engineering, 2016, 33(1): 96-101. (in Chinese)
- [17] CHEN Guanrong, LI Changpin. A note on bifurcation control [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2003, 13(3): 667-669.
- [18] CHEN Guanrong, HILL D J, YU Xinghuo. Bifurcation control: theory and applications [M]. New York, USA: Springer Science and Business Media, 2003: 1-26.
- [19] CAI P, YUAN Z Z. Hopf bifurcation and chaos control in a new chaotic system via hybrid control strategy [J]. Chinese Journal of Physics, 2017, 55(1): 64-70.
- [20] ZHANG Liang, TANG Jiashi, HAN Qin. Hopf bifurcation control of a Pan-like chaotic system [J]. Chinese Physics B, 2018, 27(9): 094702.
- [21] 张 良. 一个五维超混沌系统 Hopf 分岔控制[J]. 工程数学学报, 2019, 36(3): 322-332.
ZHANG Liang. Hopf bifurcation control of a five-dimensional hyperchaotic system [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2019, 36(3): 322-332. (in Chinese)
- [22] ESHAGHI S, GHAZIANI R K, ANSARI A. Hopf bifurcation, chaos control and synchronization of a chaotic fractional-order system with chaos entanglement function [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2020, 172: 321-340.
- [23] WOLF A, SWIFT J B, SWINNEY H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1985, 16(3): 285-317.
- [24] MARSDEN J E, MCCracken M. The Hopf bifurcation and its applications [M]. New York, USA: Springer Science and Business Media, 2012: 63-85.

【中文责编: 英 子; 英文责编: 木 柯】