

<http://bhxb.buaa.edu.cn> jbuaa@buaa.edu.cn

DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2023.0498

基于直接概率积分的混合可靠性分析方法

朱启滔, 李洪双*

(南京航空航天大学 航空学院, 南京 210016)

摘 要: 针对证据变量和随机变量混合不确定性以及极限状态函数复杂并存的情况, 提出了一种基于直接概率积分法的证据-概率混合可靠性分析方法。该方法从证据理论的概率解释入手, 采用证据变量均匀化方法, 将证据变量转换为随机概率变量, 达到混合变量归一化目的, 进而通过直接概率积分法进行结构可靠性分析。最后通过3个算例对所提方法的性能进行验证, 结果表明: 与现有方法相比, 所提方法在计算精度相近的情况下, 极大地提高了计算效率。

关 键 词: 证据理论; 直接概率积分法; 结构可靠性分析; 混合不确定性; 随机概率变量

中图分类号: V221⁺.3; TB553

文献标志码: A

文章编号: 1001-5965(2025)09-3183-10

实际工程设计中, 结构可靠性分析起着举足轻重的作用。传统的随机可靠性分析是在概率论和数理统计的基础上得以发展的。然而当极限状态函数过于复杂时, 采用传统的随机抽样方法进行结构可靠性分析成本过于昂贵, 效率低下。Chen等^[1-2]提出了直接概率积分法(direct probability integral method, DPIM), 该方法高效地计算静力和动力作用下的线性和非线性结构的响应概率密度函数, 进而计算得出结构的可靠性分析结果。

近年来, 直接概率积分法得到了极大发展。刘思琦^[3]将直接概率积分法应用到车-(轨)-桥耦合系统中, 对其进行随机动力学分析。李小兰^[4]在直接概率积分法的基础上, 建立了求解含多设计点的结构静/动力可靠度优化设计问题的统一框架。李石^[5]将直接概率积分法和一种新的明确时间集成算法结合, 进行了大型结构的随机振动分析。高天骁等^[6]采用直接概率积分法, 对重载铁路梁进行了可靠性分析。Meng等^[7]将直接概率积分法和指数凸模型结合, 进行了混合不确定性传播和可靠性研究。

1977年, Dempster等^[8]最先提出了证据理论, 其学生 Shafer^[9]在其基础上进行了研究和发展, 进

而逐步形成了较为完善的证据理论, 又称 Dempster-Shafer 理论或者 D-S 证据理论。证据理论是认知不确定性理论的重要组成部分, 可以较好地针对复杂系统进行不确定性建模, 近年来, 证据理论已被引入结构可靠性分析领域, 成为一个热点研究方向^[10]。

Oberkampf等^[11]总结了证据理论应用于可靠性分析中的优点和缺点。Bae等^[12]提出了一种基于证据理论的结构静态和动态可靠性分析模型, 并且构建了有关的代理模型。Bai等^[13]将证据理论代理模型相关技术引入可靠性应用。Zhang等^[14]提高了证据理论可靠性分析代理模型的精度。Wang等^[15]将证据理论和逆高斯退化结合, 提出了一种可靠性分析方法。

当概率变量和证据变量同时存在时, 就演变出证据-概率混合可靠性分析问题, 将其应用到具有复杂结构和变量的实际工程问题, 具有极高的实用价值。目前, 关于这方面的研究, 国内外成果尚少, 还处于起步阶段。最初, Du^[16]建立了一种统一框架下的概率-证据混合问题的可靠性灵敏度分析。姜潮等^[17]将证据理论与一次二阶矩法融合, 提出了一种高效的概率-证据混合可靠性分析方法。Tao等^[18]

收稿日期: 2023-07-27; 录用日期: 2023-09-04; 网络出版时间: 2023-09-15 15:01

网络出版地址: link.cnki.net/urlid/11.2625.V.20230914.2020.001

* 通信作者. E-mail: hongshuangli@nuaa.edu.cn

引用格式: 朱启滔, 李洪双. 基于直接概率积分的混合可靠性分析方法 [J]. 北京航空航天大学学报, 2025, 51 (9): 3183-3192.

ZHU Q T, LI H S. A mixed reliability analysis method based on direct probability integral [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2025, 51 (9): 3183-3192 (in Chinese).

提出了和样本点法有关的一种包含概率变量和证据变量的不确定性多目标可靠性分析方法。梁云飞等^[19]基于 Kriging 代理模型,提出了一种概率-证据混合可靠性分析方法,并将其应用到工业机器人定位精度可靠性领域中。曹亮等^[20]将概率-证据混合可靠性问题与子集模拟方法相结合,有效解决了小概率可靠性问题。张梦^[21]将概率-证据混合可靠性与最基本的蒙特卡洛方法联系,对桥梁进行了可靠性评估分析。孟增等^[22]提出了一种适用于概率-证据混合可靠性的自适应共轭分析方法,一定程度上丰富了其发展。

综上所述,已有研究虽然在一定程度上解决随机不确定性和认知不确定性混合问题,但难以解决极限状态函数过于复杂的可靠性问题。本文针对上述问题,提出了一种基于直接概率积分法的证据-概率混合可靠性分析方法,旨在解决具有复杂结构极限状态函数的证据-概率变量并存的实际工程问题。该方法在保持计算精度的同时,显著提高了计算效率。

1 基于证据理论的可靠性分析

证据理论是基于辨识框架所建立的。辨识框架是所有可能发生的相互独立事件的集合,用符号 Θ 表示。

基本概率分配 (basic probability assignment, BPA) 是指确定了辨识框架后,通过专家估计或者测量计算等方法对辨识框架中的每一个子集进行概率赋值。对于一个集合 A 的基本概率分配,记作 $m(A)$,表示对集合 A 的信任支持程度, m 为识别框架上的基本概率分配函数。当 $m(A) > 0$ 时, A 为焦元。BPA 具有以下基本性质:

$$m(A) \geq 0 \quad A \in 2^\Theta \tag{1}$$

$$m(\emptyset) = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{A \in 2^\Theta} m(A) = 1 \tag{3}$$

对于一个命题的信任程度用一个区间上下界形式进行表示: $[\text{Bel}(A), \text{Pl}(A)]$ 。 $\text{Bel}(\ast)$ 和 $\text{Pl}(\ast)$ 分别为信任函数 (belief function, Bel) 和似然函数 (plausibility function, Pl):

$$\text{Bel}(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \tag{4}$$

$$\text{Pl}(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \tag{5}$$

证据理论在工程可靠性领域主要用于认知不确定性的建模。收集原始信息,通过专家估计或者

实际测量等手段来构建证据变量识别框架以及每个焦元对应的 BPA。

根据单个变量的识别框架,采用笛卡儿积 D 来定义联合识别框架 Θ_x 以及联合焦元 D_x :

$$D = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{D_k = [X_{1i}, X_{2i}, \cdots, X_{ni}]\} \tag{6}$$

式中: $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 分别为进行证据合成之后的证据变量的焦元; D_k 为 D 的焦元; $X_{1i}, X_{2i}, \cdots, X_{ni}$ 分别为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的焦元。考虑到证据变量之间的独立性,根据独立性假设,可以构建出多维联合基本可信度分配函数:

$$m(D) = \prod_{i=1}^n m(X_i) \tag{7}$$

对每个联合焦元进行极值分析获得可靠性分析中极限状态函数的极大值和极小值。分析联合焦元与极限状态面的位置关系来判断焦元是否失效。

根据给定的不同阈值,不断重复前面几个步骤,得到不同阈值下的可信度函数数值和似真度函数数值。将其进行连线,进而得到累积可信度函数 (complementary cumulative belief function, CCBF) 曲线和累积似真度函数 (complementary cumulative plausibility function, CCPF) 曲线。不同阈值下可靠度位于 CCBF 曲线和 CCPF 曲线之间。

2 证据-概率混合可靠性分析

当结构中同时存在证据变量和随机变量,原始输入变量表示为 $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, 其极限状态函数可以表示为 $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 。其中 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 表示 n 维输入证据变量,联合证据空间中的各焦元可计算其联合 BPA; $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$ 表示 m 维随机输入变量。值得注意的是:各变量之间相互独立。

$g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) < c$ 时,结构失效, c 为阈值。则失效概率表示为

$$P_f = P_r\{g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) < c\} \tag{8}$$

式中: P_f 为对应结构的失效概率; P_r 为对应结构的可靠度。

根据全概率公式, P_f 展开为

$$P_f = \sum_{i=1}^n P_r\{g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) < c\} P_r\{\mathbf{X}\} \tag{9}$$

其中焦元对应的联合 BPA 为

$$P_r\{\mathbf{X}\} = m_X(X_i) \tag{10}$$

由于无法得到 $P_r\{\mathbf{X}\}$ 的精确值,证据-概率混和可靠性通过其最大值和最小值进行计算:

$$p_f^{\max} = P_r \{g_{\min}(X, Y) < c\} \tag{11}$$

$$p_f^{\min} = P_r \{g_{\max}(X, Y) < c\} \tag{12}$$

最终失效概率的上下边界为似真度(Pl)和可信度(Bel), 表示为

$$Pl(X, Y) = \sum_{i=1}^n P_r \{g_{\min}(X, Y) < c\} \cdot m_X(X_i) \tag{13}$$

$$Bel(X, Y) = \sum_{i=1}^n P_r \{g_{\max}(X, Y) < c\} \cdot m_X(X_i) \tag{14}$$

3 基于直接概率积分法的混合可靠性分析

本文从证据理论均匀化入手, 将证据变量转换为随机变量, 结合直接概率积分法, 高效地开展结构可靠性工作。

3.1 证据变量均匀化

图 1 为包含互不重叠的 5 个焦元的证据变量均匀化过程。对于存在证据变量区间重叠的情况, 通过简单的累加即可, 如图 2 所示。

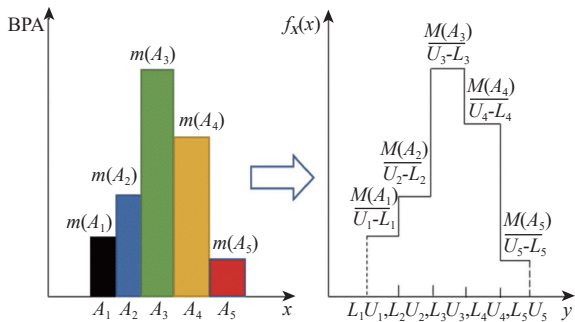


图 1 不重叠证据变量随机化过程

Fig. 1 Randomization process of non overlapping evidence variables

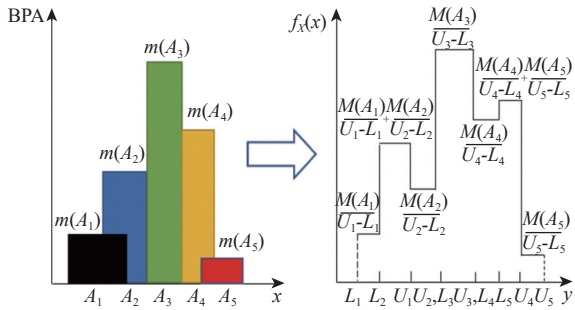


图 2 重叠证据变量随机化过程

Fig. 2 Randomization process of overlapping evidence variables

考虑到证据变量具有严重的离散性, 导致计算量巨大, 在实际工程中运用较为困难。本文采用均匀化方法^[23], 将证据变量转换为具有概率密度函数的随机变量。均匀化公式如下:

$$f_X(x) = \sum_{j=1}^n \delta_j(x) m(A_j) / (U_j - L_j) \tag{15}$$

式中: f_X 表示证据变量均匀化后的随机变量对应的概率密度函数; $\delta_j(x)$ 的取值与焦元的包含关系有关, 当 $x \in A_j$ 时, $\delta_j(x) = 1$, 否则, $\delta_j(x) = 0$; A_j 为证据变量 X 的焦元; n 为焦元数; $m(A_j)$ 为每个焦元对应的 BPA; U_j 和 L_j 分别为对应焦元基本概率分配的上界和下界。

3.2 概率密度积分方程的构建

经过证据变量均匀化后, 证据-概率混合变量可靠性分析问题仅包含随机变量。本文使用直接概率积分法进行结构可靠性分析。直接概率积分法源于概率守恒原理: 由于保守系统不引入其他新的随机因素, 原有的随机因素也没消失, 因此在随机系统的状态演化过程中, 概率保持不变。静力系统和动力系统中的概率守恒原理分别表示为

$$\int_{\Omega_Z} P_Z(z) dz = \int_{\Omega_\theta} P_\theta(\theta) d\theta \tag{16}$$

$$\int_{\Omega_Z} P_Z(z, t) dz = \int_{\Omega_\theta} P_\theta(\theta, t) d\theta \tag{17}$$

式中: θ 和 Ω_θ 分别表示输入随机向量和其对应的样本空间; Z 和 Ω_Z 分别表示输出随机向量和其对应的样本空间; $P_\theta(\theta)$ 和 $P_\theta(\theta, t)$ 分别表示静力系统和动力系统中的原始输入采样点的概率密度函数; $P_Z(z)$ 和 $P_Z(z, t)$ 表示静力系统和动力系统中响应量的概率密度函数。

静力系统或动力系统可以通过具体映射关系表示。实际工程中的映射 G 一般是隐式的, 很难求解。由于狄拉克 δ 函数具有筛选性质, 引入狄拉克函数, n 维输入随机向量的概率密度函数变为

$$P_\theta(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(s) \delta(s - \theta) ds \tag{18}$$

式中: θ 和 s 为输入空间中的相互对称向量。

结合狄拉克 δ 函数与映射 G , 有

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(\theta) \delta[z - g(\theta)] d\theta \tag{19}$$

同理可得, 动力系统输出的概率密度函数为

$$p_Z(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(\theta) \delta[z - g(\theta, t)] d\theta \tag{20}$$

式 (19) 和式 (20) 分别表示静力系统和动力系统 中的概率转换的积分形式, 称为概率密度积分方程 (probability density integral equation, PDIE)^[3]。

3.3 直接概率积分法的数值求解

直接求解概率密度积分方程很困难, 可以采用一些如概率转换方法等间接数值计算方法。DPIM 可以高效地解决这一问题。这一方法包含 2 个重要部分: ①基于广义 F (generalized F, GF) 选点技术进行概率空间剖分^[24]; ②狄拉克 δ 函数平滑化。

采用 Voronoi 单元剖分技术对概率空间进行剖

分生成代表性区域 $\Omega_{\theta,q}$:

$$\Omega_{\theta,q} = \{ \mathbf{x} \in R^n : \| \mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}_q \| \leq \| \mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}_j \| \text{ for all } j \} \quad (21)$$

式中: $q = 1, 2, \dots, N$, $\boldsymbol{\theta}_q$ 表示子域 $\Omega_{\theta,q}$ 的代表点; $\boldsymbol{\theta}_j$ 表示子域 $\Omega_{\theta,j}$ 的代表点; N 为代表点总数。

代表区域的概率测度被分配到对应的代表点, 每个代表点的赋得概率为

$$P_q = \int_{\Omega_{\theta,q}} P_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (22)$$

实现了结构的概率密度积分方程和物理方程的解耦以及离散化求和。静力系统和动力系统的概率密度函数演变为

$$p_Z(\mathbf{z}) = \sum_{q=1}^N \{ \delta[\mathbf{z} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_q)] P_q \} \quad (23)$$

$$p_Z(\mathbf{z}, t) = \sum_{q=1}^N \{ \delta[\mathbf{z} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_q, t)] P_q \} \quad (24)$$

为了提高数值积分的计算精度, 本文选择使用高斯函数进行狄拉克 δ 函数光滑化。高斯函数有

$$\delta(\mathbf{z}, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\mathbf{z}^2/2\sigma^2} \quad (25)$$

式中: σ 为平滑参数。静力系统和动力系统最佳平滑参数表达式分别为

$$\sigma = \frac{A}{N^{1/5}} \min_{q=1,2,\dots,N} \left\{ \text{std}[\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_q)], \frac{\text{iqr}[\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_q)]}{1.34} \right\} \quad (26)$$

$$\sigma = \frac{A}{N^{1/5}} \min_{q=1,2,\dots,N} \left\{ \text{std}[\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_q, t)], \frac{\text{iqr}[\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_q, t)]}{1.34} \right\} \quad (27)$$

式中: A 为光滑化因子, 一般 $A \in (0, 1]$; $\text{iqr}(\ast)$ 表示四分位距; $\text{std}(\ast)$ 表示标准差。

静力系统和动力系统的概率密度函数进一步演变为

$$p_Z(\mathbf{z}) = \sum_{q=1}^N \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-[\mathbf{z} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_q)]^2/2\sigma^2} P_q \right\} \quad (28)$$

$$p_Z(\mathbf{z}, t) = \sum_{q=1}^N \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-[\mathbf{z} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_q, t)]^2/2\sigma^2} P_q \right\} \quad (29)$$

3.4 基于直接概率积分法的可靠性分析流程

对于随机静力系统, DPIM 可以直接对结构响应在失效域上的概率密度函数进行积分来得到失效概率, 即

$$P_f = \int_{\Omega_{f,z}} p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{\Omega_{f,z}} \sum_{q=1}^N \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-[\mathbf{z} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_q)]^2/2\sigma^2} P_q \right\} d\mathbf{z} = \sum_{q=1}^N \left\{ \int_{\Omega_{f,z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-[\mathbf{z} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_q)]^2/2\sigma^2} d\mathbf{z} \right\} \cdot P_q \quad (30)$$

对于动力系统, 结合首次超越准则, 将可靠性

分析转换为时间 $(0, t]$ 内的等价极值映射。最后结合直接概率积分法求解动力系统极值的概率密度函数, 有

$$P_{Z_{\text{ext}}}(\mathbf{z}_{\text{ext}}, t) = \int_{\Omega_{\boldsymbol{\theta}}} \delta[\mathbf{z}_{\text{ext}} - \mathbf{Z}_{\text{ext}}(\boldsymbol{\theta}, t)] p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} = \sum_{q=1}^N \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-[\mathbf{z}_{\text{ext}} - \mathbf{Z}_{\text{ext}}(\boldsymbol{\theta}_q, t)]^2/2\sigma^2} P_q \right\} \quad (31)$$

式中: $\mathbf{Z}_{\text{ext}}$ 表示狄拉克 δ 函数的一个变量。最后, t 时刻的动力可靠度可以由安全域内对时间 $(0, t]$ 内动力响应极值的概率密度函数积分, 即

$$R(t) = \int_{\Omega_s} P_{Z_{\text{ext}}}(\mathbf{z}_{\text{ext}}, t) d\mathbf{z}_{\text{ext}} \quad (32)$$

3.5 混合可靠性分析流程

将本文提出的随机变量和证据变量融合的可靠性分析方法步骤概括如图 3 所示:

步骤 1 确定原始输入信息, 包括 n 维证据模型的不确定性输入以及相对应的 BPA; m 维随机输入变量以及相对应的概率密度函数。

步骤 2 通过证据变量均匀化方法, 将证据变量转化为随机变量。

步骤 3 采用 GF 偏差选点技术, 获得代表点; 并且根据 Voronoi 剖分技术产生代表区域; 计算代表区域的赋得概率。

步骤 4 根据映射 $G: \boldsymbol{\theta} \rightarrow \mathbf{Z}$ 或者 $\mathbf{Z}(t)$ 在每个代表点处求解静态响应 $\mathbf{z}_{l,g} = \mathbf{g}_l(\boldsymbol{\theta}_q)$ 或者动态响应 $\mathbf{z}_{l,g}(t) = \mathbf{g}_l(\boldsymbol{\theta}_q, t)$ 。

步骤 5 对于结构静力系统, 直接对结构响应在失效域上的概率密度函数进行积分来得到失效概率区间。对于结构动力系统则结合首次超越准则和等价极值映射对相应的概率密度函数进行积分, 计算某一时刻的动力可靠度区间, 或者相对应

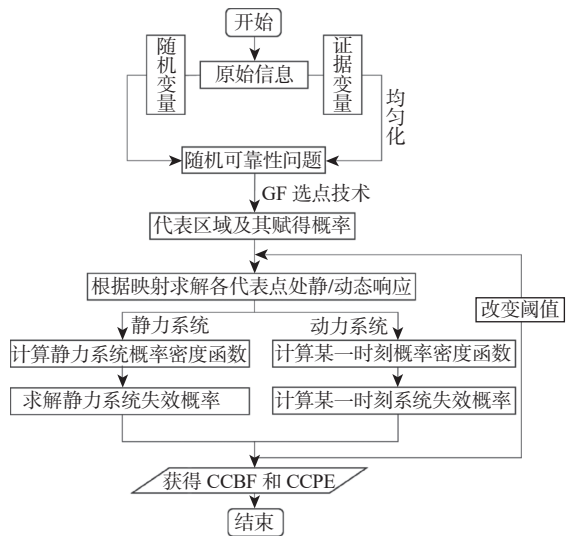


图 3 混合可靠性分析流程

Fig. 3 Hybrid reliability analysis flowchart

的动力失效概率区间。

步骤 6 改变阈值, 重复步骤 4 和步骤 5, 计算可得到不同阈值下的可信度函数数值和似真度函数数值。通过曲线拟合得到 CCBF 曲线和 CCPF 曲线。不同阈值下可靠度结果位于 CCBF 曲线和 CCPF 曲线之间。

4 算例分析

4.1 解析函数

考虑以下数值算例的极限状态函数:

$$g(X_1, Y_1, Y_2) = X_1^2 + Y_1 + Y_2 \tag{33}$$

式中: Y_1 和 Y_2 为随机变量, 具体分布参数见表 1。 X_1 为证据变量, 具体不确定性参数见表 2。该极限函数可靠域为 $g(X_1, Y_1, Y_2) < c$, c 为阈值。

表 1 算例 1 随机变量分布参数

Table 1 Random variable distribution parameters in Example 1			
变量	分布类型	均值	标准差
Y_1	正态	3	0.1
Y_2	正态	2	0.3

表 2 算例 1 证据变量

Table 2 Evidence variable in Example 1		
变量	取值范围	BPA
X_1	[1.0,1.1]	0.3
	[1.1,1.2]	0.3
	[1.2,1.3]	0.4

采用本文方法计算不同阈值下的该极限状态函数可靠度, 计算结果见表 3。相应的 CCBF 和 CCPF 曲线见图 4。

表 3 算例一可靠性分析结果

Table 3 Reliability analysis results of example 1					
阈值	本文方法	IS	与IS相对误差/%	MCS	与MCS相对误差/%
10.0	[1.371 8×10 ⁻⁴ ,0.000 9]	[1.387 2×10 ⁻⁴ ,0.000 8]	[-1.12,11.1]	[1.362 0×10 ⁻⁴ ,0.000 8]	[0.72,11.1]
10.2	[0.000 9,0.003 0]	[0.000 8,0.003 2]	[11.1,-6.67]	[0.000 9,0.002 9]	[0.00,6.66]
10.4	[0.001 3,0.007 9]	[0.001 5,0.007 8]	[-15.4,1.27]	[0.001 3,0.007 7]	[0.00,2.53]
10.6	[0.005 6,0.016 8]	[0.005 2,0.016 7]	[7.14,0.60]	[0.005 5,0.016 6]	[1.79,1.20]
10.8	[0.011 1,0.034 8]	[0.010 5,0.034 6]	[5.41,0.57]	[0.010 9,0.034 2]	[1.80,1.72]
11.0	[0.026 1,0.066 7]	[0.025 8,0.064 8]	[1.15,2.85]	[0.024 5,0.061 7]	[6.13,7.50]
11.2	[0.050 1,0.115 6]	[0.048 7,0.115 1]	[2.79,0.43]	[0.048 1,0.114 6]	[3.99,0.87]
11.4	[0.092 5,0.182 3]	[0.090 1,0.180 8]	[2.59,0.82]	[0.090 2,0.181 0]	[2.49,0.71]
11.6	[0.150 2,0.279 2]	[0.152 0,0.276 6]	[-1.19,0.93]	[0.147 3,0.274 1]	[1.97,1.86]
11.8	[0.237 4,0.381 7]	[0.236 8,0.381 1]	[0.25,0.16]	[0.237 2,0.380 9]	[0.08,0.21]
12.0	[0.335 0,0.499 4]	[0.334 1,0.499 3]	[0.27,0.02]	[0.330 1,0.498 0]	[1.48,0.28]
12.2	[0.442 7,0.611 3]	[0.441 0,0.611 7]	[0.38,-0.07]	[0.442 7,0.611 0]	[0.00,0.05]
12.4	[0.564 8,0.722 0]	[0.563 2,0.721 9]	[0.28,0.01]	[0.561 5,0.720 5]	[0.59,0.21]
12.6	[0.676 0,0.817 5]	[0.676 2,0.816 0]	[-0.03,0.18]	[0.675 6,0.814 2]	[0.06,0.49]
12.8	[0.771 0,0.880 2]	[0.771 0,0.878 8]	[0.00,0.16]	[0.770 8,0.878 8]	[0.02,0.16]
13.0	[0.849 0,0.929 7]	[0.847 0,0.928 9]	[0.24,0.09]	[0.848 4,0.928 1]	[0.23,0.17]
13.2	[0.908 1,0.968 5]	[0.907 2,0.962 7]	[0.10,0.60]	[0.907 2,0.961 0]	[0.10,0.78]
13.4	[0.948 4,0.978 7]	[0.947 9,0.978 0]	[0.05,0.07]	[0.947 8,0.977 8]	[0.06,0.09]
13.6	[0.971 2,0.989 8]	[0.971 1,0.984 0]	[0.01,0.59]	[0.970 1,0.980 6]	[0.11,0.94]
13.8	[0.986 5,0.995 5]	[0.985 5,0.992 7]	[0.10,0.28]	[0.986 0,0.995 0]	[0.05,0.05]
14.0	[0.995 9,0.998 7]	[0.994 0,0.999 1]	[0.19,-0.04]	[0.993 9,0.997 8]	[0.20,0.09]

表 3 中还展示了基于蒙特卡罗模拟法(Monte Carlo simulation, MCS)的传统证据-概率混和可靠性方法计算结果, 以及文献[17]中的方法结合重要抽样方法(importance samplings, IS)的计算结果。可以看出: 本文方法与上述 2 种方法的计算精度基本吻合。在计算效率方面, 本文方法调用极限状态函数 10³ 次, IS 调用极限函数 5×10⁵, MCS 调用极限状态函数 10⁷ 次, 本文方法显著提升了计算效率。

4.2 五层弹性框架静载可靠性分析

考虑如图 5 所示五层弹性框架静载结构^[2]。每个层间刚度 k_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) 是正态分布。

此框架结构的极限状态函数为

$$G = g(\boldsymbol{\theta}) = \bar{Y} - \max_{1 \leq i \leq 5} \{Y_i(\boldsymbol{\theta})\} \tag{34}$$

式中: $\bar{Y}$ 表示地板能承受的位移的最大阈值。

$Y_i(\boldsymbol{\theta})$ 表示框架结构的第 i 层位移, 可由平衡方

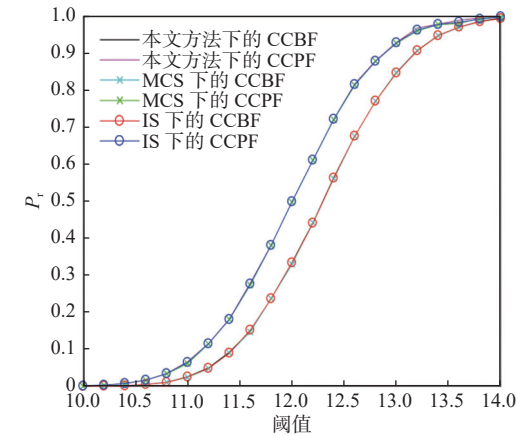


图4 算例1的CCPF和CCBF曲线
Fig. 4 CCPF and CCBF curves of Example 1

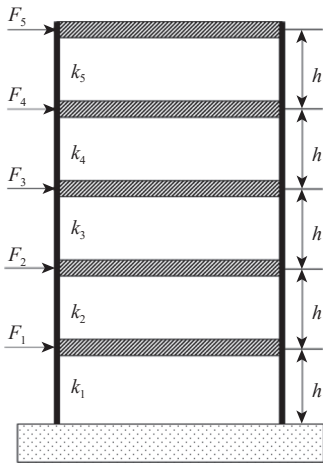


图5 静载作用下的五层剪力式框架结构
Fig. 5 Five story shear frame structure under static load

程求解:

$K(\theta)Y=F$ (35)

式中: $Y=[Y_1,Y_2,\cdots,Y_5]^T$ 表示地板的位移矢量; F 表示载荷矢量; $K(\theta)$ 表示层间刚度, 随机刚度矩阵由式 (36) 构成:

$k_i=\mu_i(1+\theta_iC_i),i=1,2,\cdots,5$ (36)

式中: $\theta_i,i=1,2,\cdots,5$ 表示基本输入随机变量; C_i 表示第 i 个随机变量的变异系数, 本文选取 $C=0.2$ 。

横向作用在楼板上的静载荷 $F_1\sim F_5$ 具体数值为: $F_1=0.5\times10^6\text{ N}$, $F_2=F_3=F_4=2F_1$, $F_5=F_1$ 。

将五层框架结构中前三层的基本随机变量考虑为概率分布并服从正态分布, 具体分布参数见表 4。将第 4 层和第 5 层的基本变量定义为证据变量, 具体数值见表 5。

5 层框架结构可靠性分析结果见表 6, CCPF 和 CCBF 曲线见图 6。

本文方法和 MCS 以及 IS 这 2 种对比方法的计算精度基本吻合, 但是在计算效率方面, 本文方法

表 4 前 3 层结构层间刚度概率分布以及统计特性

Table 4 Probability distribution and statistical characteristics of interlayer stiffness of the first three story frame structure

层数	均值/ $10^{-5}(\text{kN}\cdot\text{m}^{-1})$	变异系数
θ_1	3.8	0.2
θ_2	3.6	0.2
θ_3	3.4	0.2

表 5 第 4、5 层框架结构层间刚度不确定参数

Table 5 Uncertain parameters of interlayer stiffness of the fourth and fifth story frame structure

层数	均值/ $10^{-5}(\text{kN}\cdot\text{m}^{-1})$	基本概率分配
θ_4	[3.0, 3.2]	0.4
	[3.2, 3.4]	0.6
θ_5	[2.8, 3.0]	0.4
	[3.0, 3.2]	0.6

调用极限状态函数 10^3 次, MCS 调用极限状态函数 10^7 次, IS 调用极限状态函数 5×10^5 , 本文方法显著提升了计算效率。

4.3 受非平稳随机激励的弹性薄板可靠性分析

考虑一个矩形薄板^[2]受非平稳随机激励时可靠性分析。矩形薄板的边界条件具有简支 (S)、固支 (C) 以及自由 (F), 具体见图 7。

该问题的物理映射 Γ 如下:

$$\Gamma:\rho h\frac{\partial^2w(x,y,t)}{\partial t^2}+c\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t}+D\nabla^4w(x,y,t)=-\rho hY(\theta_f,t)$$
 (37)

式中: 双调和算子 $\nabla^4=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$; ρ 为板的体积密度; H 为板的厚度; 横向挠度为 $w(x,y,t)$; 板的黏滞阻尼系数 $C=2\rho h\zeta\omega$, 其中, $\zeta=5\%$ 表示板的最大模态阻尼比; ω 表示板的最大固有频率; $Y(\theta_f,t)$ 为非平稳随机过程。

施加完全非平稳随机加速度激励可采用以下时间调制函数:

$f(t)=A(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})$ (38)

式中: 参数 $A=4$ 、 $\alpha=0.099\ 5$ 和 $\beta=2\alpha$ 。

非平稳随机加速度激励的功率谱密度公式为

$$S_Y(t,\omega)=|f(t)|^2\frac{\omega^4}{\omega^4+\omega_h^4}\cdot\frac{1+4\omega^2\zeta_g^2(t)/\omega_g^2(t)}{(1-\omega^2/\omega_g^2(t))^2+4\omega^2\zeta_g^2(t)/\omega_g^2(t)}S_0$$
 (39)

式中: 强度因子 $S_0=1\text{ m}^2/\text{s}^3$, 截止频率 $\omega_n=2\text{ rad/s}$; 地面阻尼比 $\zeta_g(t)=0.64$ 。

谱的非平稳性由下式表示:

表 6 5 层框架结构可靠性分析结果

Table 6 Reliability analysis results of five story frame structure

最大位移阈值/m	本文方法	IS	与IS相对误差/%	MCS	与MCS相对误差/%
0.022	[2.493 7×10 ⁻⁷ ,2.760 8×10 ⁻⁷]	[2.378 4×10 ⁻⁷ ×10 ⁻⁷ ,2.723 1×10 ⁻⁷]	[4.62,1.37]	[2.359 6×10 ⁻⁷ ,2.680 8×10 ⁻⁷]	[5.68,2.98]
0.024	[5.224 5×10 ⁻⁶ ,3.164 6×10 ⁻⁵]	[5.222 6×10 ⁻⁶ ,3.124 6×10 ⁻⁵]	[0.04,1.26]	[5.211 6×10 ⁻⁶ ,3.095 6×10 ⁻⁵]	[0.25,2.23]
0.026	[6.282 9×10 ⁻⁴ ,0.001 8]	[6.235 8×10 ⁻⁴ ,0.001 8]	[0.85,0.00]	[6.126 8×10 ⁻⁴ ,0.001 6]	[0.55,11.1]
0.028	[0.008 9,0.017 6]	[0.007 9,0.016 9]	[11.2,3.98]	[0.008 1,0.016 6]	[8.99,6.02]
0.030	[0.049 7,0.085 3]	[0.047 8,0.084 6]	[3.82,0.82]	[0.045 8,0.083 1]	[8.52,2.65]
0.032	[0.164 9,0.234 2]	[0.162 3,0.228 1]	[1.58,2.60]	[0.162 7,0.222 2]	[1.60,5.40]
0.034	[0.348 8,0.433 9]	[0.346 4,0.415 6]	[0.69,4.22]	[0.343 7,0.433 7]	[1.48,0.05]
0.036	[0.551 6,0.632 7]	[0.554 2,0.636 6]	[-0.47,-0.62]	[0.556 3,0.638 5]	[0.84,0.91]
0.038	[0.723 0,0.780 2]	[0.723 1,0.790 1]	[-0.01,-1.27]	[0.731 9,0.791 4]	[1.21,1.42]
0.040	[0.835 9,0.873 9]	[0.856 0,0.888 8]	[-2.40,-1.71]	[0.850 4,0.886 8]	[-1.73,-1.48]
0.042	[0.911 6,0.934 8]	[0.910 5,0.941 2]	[0.12,-0.68]	[0.920 3,0.940 8]	[-0.95,0.64]
0.044	[0.953 9,0.966 0]	[0.957 2,0.966 6]	[-0.35,-0.06]	[0.958 3,0.969 3]	[0.46,0.34]
0.046	[0.977 9,0.985 1]	[0.978 5,0.984 6]	[-0.06,0.05]	[0.978 1,0.983 8]	[0.06,0.13]
0.048	[0.991 8,0.994 4]	[0.988 9,0.993 8]	[0.29,0.06]	[0.988 3,0.991 2]	[0.35,0.32]
0.050	[0.996 2,0.996 9]	[0.995 8,0.996 5]	[0.04,0.04]	[0.993 5,0.995 1]	[0.27,0.18]
0.052	[0.997 7,0.998 3]	[0.996 8,0.997 9]	[0.09,0.04]	[0.996 3,0.997 1]	[0.14,0.12]
0.054	[0.999 0,0.999 2]	[0.997 2,0.998 0]	[0.18,0.12]	[0.997 8,0.998 2]	[0.12,0.10]
0.056	[0.999 3,0.999 4]	[0.999 0,0.999 1]	[0.03,0.03]	[0.998 6,0.998 9]	[0.10,0.05]
0.058	[0.999 5,0.999 6]	[0.999 2,0.999 5]	[0.03,0.01]	[0.999 1,0.999 2]	[0.04,0.04]
0.060	[0.999 7,0.999 8]	[0.999 4,0.999 7]	[0.03,0.01]	[0.999 4,0.999 5]	[0.03,0.03]
0.062	[0.999 8,0.999 9]	[0.999 8,0.999 9]	[0.00,0.00]	[0.999 6,0.999 8]	[0.02,0.01]

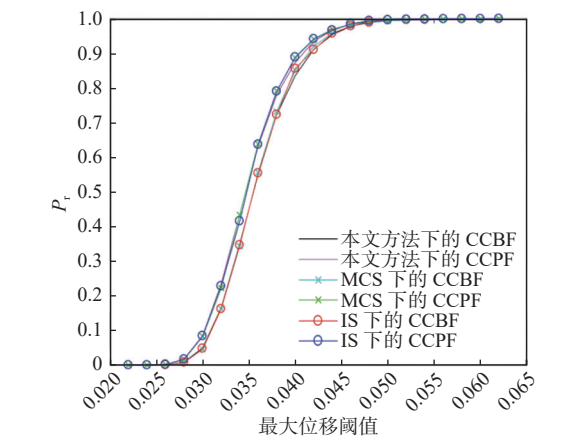


图 6 5 层框架结构的 CCPF 和 CCBF 曲线

Fig. 6 CCPF and CCBF curves of five story shear frame structure

$$\omega_g(t) = \omega_0 - (\omega_0 - \omega_T) \frac{t}{T} \tag{40}$$

式中: T 为随机激励的总持续时间, $T = 25\text{ s}$; ω_0 为初始时刻的地面频率, $\omega_0 = 39.4\text{ rad/s}$; ω_T 为持续时间结束时地面频率, $\omega_T = 4.86\text{ rad/s}$ 。

完全非平稳激励通过使用基于随机函数的谱产生:

$$Y(\theta_f, t) = f(t) \sum_{K=0}^N \sqrt{S(\omega_K) \Delta \omega} \cdot [\cos(\omega_K t) R_K + \sin(\omega_K t) Q_K] \tag{41}$$

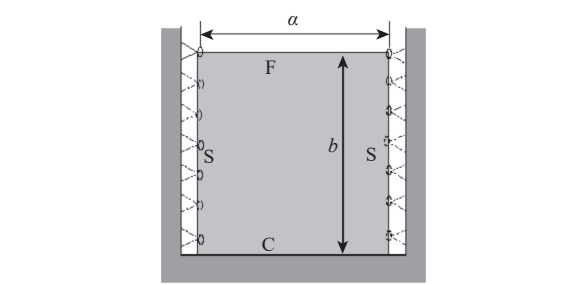


图 7 试验矩形薄板

Fig. 7 Rectangular thin plate

式中: R_k 和 Q_k 表示一对正交随机变量, 将其定义为关于基本随机变量 $\theta_f = [\theta_1, \theta_2]$:

$$R_k = \cos(k\theta_1) + \sin(k\theta_1) \tag{42}$$

$$Q_k = \cos(k\theta_2) + \sin(k\theta_2) \tag{43}$$

失效准则为板的横向挠度首次超过特定阈值, 极限状态函数可表示为

$$Z = g(\theta, t) = \bar{\omega} - \max\{\omega(x, y, t)\} \tag{44}$$

式中: $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$, a 为板长, b 为板宽; $\bar{\omega}$ 为横向挠度 $\omega(x, y, t)$ 的阈值。

将薄板的几何尺寸考虑为随机不确定性变量, 具体数据见表 7。

将薄板的弹性模量、泊松比和质量密度考虑为

表 7 薄板的几何尺寸			
Table 7 Geometric dimensions of the thin plates			
变量	分布形式	均值/m	标准差
板宽 a	正态分布	6	0.03
板长 b	正态分布	8	0.02
板高 h	正态分布	0.12	0.01

证据不确定性变量,具体数据见表 8。

本文方法和 2 种对比方法计算结果见表 9, 计算所得的 CCBF 和 CCPF 曲线如图 8 所示。在计算效率方面,本文方法极限状态函数调用次数为

表 8 薄板的证据不确定性变量		
Table 8 Evidence uncertainty variables for the thin plates		
变量	取值范围	BPA
弹性模量 E/GPa	[35.8,36.2]	0.3
	[36.2,36.6]	0.7
泊松比 ν	[0.15,0.20]	0.3
	[0.20,0.25]	0.7
质量密度 $\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	[2 200,2 400]	0.3
	[2 400,2 600]	0.7

10^3 次,而基于 MCS 的传统方法为 10^6 次,IS 为 2×10^5 , 本文方法显著提升了计算效率。

表 9 薄板结构可靠性分析结果					
Table 9 Reliability analysis results of the thin plate					
横向挠度阈值/m	本文方法	IS	与IS相对误差/%	MCS	与MCS相对误差/%
0.000 60	[0.002 4,0.003 6]	[0.002 4,0.003 5]	[0.00,2.78]	[0.002 3,0.003 5]	[4.17,2.78]
0.000 64	[0.023 0,0.026 0]	[0.022 4,0.025 8]	[2.61,0.77]	[0.022 1,0.025 3]	[3.91,2.70]
0.000 68	[0.091 0,0.117 0]	[0.089 6,0.116 2]	[1.54,0.68]	[0.089 4,0.115 1]	[1.79,1.62]
0.000 72	[0.227 0,0.278 1]	[0.225 2,0.277 9]	[0.79,0.07]	[0.224 8,0.275 2]	[0.97,1.04]
0.000 76	[0.415 8,0.455 9]	[0.414 4,0.455 0]	[0.34,0.20]	[0.413 7,0.454 4]	[0.51,0.33]
0.000 80	[0.617 9,0.649 0]	[0.615 9,0.647 8]	[0.32,0.18]	[0.616 1,0.648 2]	[0.17,0.12]
0.000 84	[0.771 0,0.786 0]	[0.768 8,0.780 2]	[0.29,0.75]	[0.769 7,0.781 5]	[0.17,0.57]
0.000 88	[0.863 9,0.879 1]	[0.861 5,0.876 6]	[0.28,0.28]	[0.859 4,0.874 3]	[0.47,0.42]
0.000 92	[0.926 0,0.939 0]	[0.920 8,0.936 8]	[0.56,0.23]	[0.921 5,0.935 4]	[0.49,0.38]
0.000 96	[0.968 0,0.974 0]	[0.966 6,0.970 2]	[0.14,0.39]	[0.965 2,0.971 5]	[0.29,0.35]
0.001 00	[0.985 0,0.989 9]	[0.981 0,0.988 6]	[0.41,0.13]	[0.981 4,0.988 9]	[0.37,0.10]
0.001 04	[0.992 0,0.994 8]	[0.991 5,0.993 2]	[0.05,0.16]	[0.991 0,0.991 9]	[0.10,0.29]
0.001 08	[0.993 5,0.996 4]	[0.992 6,0.995 8]	[0.09,0.06]	[0.992 1,0.995 0]	[0.14,0.14]
0.001 12	[0.994 6,0.998 0]	[0.993 8,0.997 6]	[0.08,0.04]	[0.994 2,0.997 3]	[0.04,0.07]
0.001 16	[0.997 9,0.999 9]	[0.997 8,0.998 8]	[0.01,0.11]	[0.997 7,0.998 4]	[0.02,0.15]
0.001 20	[0.999 2,0.999 9]	[0.999 1,0.999 9]	[0.01,0.00]	[0.999 0,0.999 6]	[0.02,0.03]

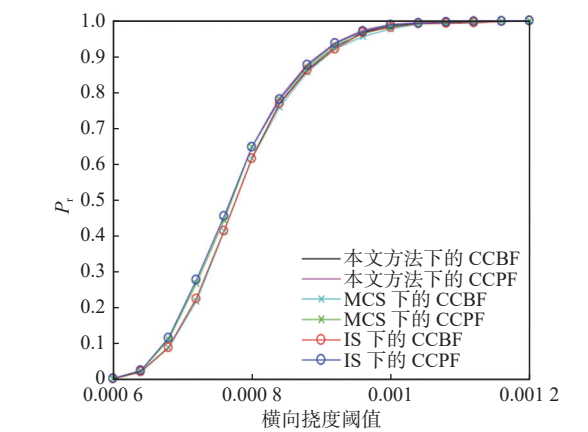


图 8 薄板结构的 CCPF 和 CCBF 曲线
Fig. 8 CCPF and CCBF curves of the thin plate

5 结 论

针对证据变量和随机变量同时存在的混合不确定性问题,同时考虑复杂极限状态函数,提出了一种新的证据-概率混合变量的结构可靠性分析方

法。首先采用证据理论的均匀化方法,将证据变量转换成随机变量,进而采用直接概率积分法进行结构可靠度分析。高效地解决了极限状态函数复杂的混合变量可靠性分析问题。文中利用 3 个算例对所提方法进行了性能分析,可知:本文方法在满足计算精度的同时,避免了直接计算可靠度的复杂性,将嵌套计算进行解耦,很大程度上提高了计算效率。本文方法为工程结构可靠性分析提供了一种新的证据-概率混合可靠性分析方法。

参考文献 (References)

[1] CHEN G H, YANG D X. Direct probability integral method for stochastic response analysis of static and dynamic structural systems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, 357(C): 112612.

[2] CHEN G H, YANG D X. A unified analysis framework of static and dynamic structural reliabilities based on direct probability integral method[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 158: 107783.

- [3] 刘思琦. 基于直接概率积分法的车—(轨)—桥耦合系统随机动力学分析[D]. 大连: 大连理工大学, 2021.
- LIU S Q. Stochastic dynamic analysis of vehicle-(rail)-bridge coupling system based on direct probability integral method[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2021(in Chinese).
- [4] 李小兰. 结构静/动力可靠度分析与优化设计的高效算法研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2021.
- LI X L. Study on efficient algorithms for static/dynamic reliability analysis and reliability-based design optimization of structures[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2021(in Chinese).
- [5] 李石. 结构特性相关的显式时程积分算法性能改进及工程应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2021.
- LI S. Performance improvement and engineering application of explicit structure-dependent time integration algorithms[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2021(in Chinese).
- [6] 高天骁, 李铸坤, 张佳旺, 等. 基于直接概率积分法重载铁路RC梁疲劳可靠度分析[J]. 铁道科学与工程学报, 2023, 20(4): 1416-1424.
- GAO T X, LI Z S, ZHANG J W, et al. Fatigue reliability analysis of RC beams in heavy-haul railways based on direct probability integral method[J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2023, 20(4): 1416-1424(in Chinese).
- [7] MENG Z, ZHAO J Y, CHEN G H, et al. Hybrid uncertainty propagation and reliability analysis using direct probability integral method and exponential convex model[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2022, 228: 108803.
- [8] DEMPSTER A P, LAIRD N M, RUBIN D B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm[J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), 1977, 39(1): 1-22.
- [9] SHAFER G. A mathematical theory of evidence[M]. Princeton: Princeton University Press, 1976.
- [10] 范松. 基于证据理论的机械可靠性分析及优化设计方法[D]. 长沙: 湖南大学, 2015.
- FAN S. An evidence-theory based mechanical reliability analysis method and optimization design method[D]. Changsha: Hunan University, 2015(in Chinese).
- [11] OBERKAMPF W L, HELTON J C. Investigation of evidence theory for engineering application, non-deterministic approaches forum[C]//Proceedings of the 4th Non-Deterministic Approaches Forum. Reston: AIAA, 2002, 43: 8-11.
- [12] BAE H R, GRANDHI R V, CANFIELD R A. Sensitivity analysis of structural response uncertainty propagation using evidence theory[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2006, 31(4): 270-279.
- [13] BAI Y C, HAN X, JIANG C, et al. Comparative study of metamodeling techniques for reliability analysis using evidence theory[J]. Advances in Engineering Software, 2012, 53: 61-71.
- [14] ZHANG Z, JIANG C, HAN X, et al. A response surface approach for structural reliability analysis using evidence theory[J]. Advances in Engineering Software, 2014, 69: 37-45.
- [15] WANG Y W, FENG H L. Reliability analysis based on inverse Gauss degradation process and evidence theory[J]. International Journal of Performability Engineering, 2019, 15(2): 353-361.
- [16] DU X P. Uncertainty analysis with probability and evidence theories[C]// Proceedings of the ASME 2006 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Philadelphia: ASME, 2006: 1025-1038.
- [17] 姜潮, 范松, 张哲, 等. 一种高效的概率-证据混合可靠性分析方法[J]. 计算力学学报, 2016, 33(2): 135-143.
- JIANG C, FAN S, ZHANG Z, et al. An efficient structural reliability analysis method with both probability variable and evidence variable[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2016, 33(2): 135-143(in Chinese).
- [18] TAO Y R, HAN X, DUAN S Y, et al. Reliability analysis for multidisciplinary systems with the mixture of epistemic and aleatory uncertainties[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2014, 97(1): 68-78.
- [19] 梁云飞, 张德权, 彭周源. 一种高效的概率-证据混合工业机器人定位精度可靠性分析方法[J]. 燕山大学学报, 2022, 46(4): 309-318.
- LIANG Y F, ZHANG D Q, PENG Z Y. An efficient reliability analysis method for positioning accuracy of industrial robot through probability and evidence theory[J]. Journal of Yanshan University, 2022, 46(4): 309-318(in Chinese).
- [20] 曹亮, 陈国强, 董丽君, 等. 基于概率论和证据理论的小概率问题可靠性分析[J]. 湖南工程学院学报(自然科学版), 2019, 29(2): 30-35.
- CAO L, CHEN G Q, DONG L J, et al. Reliability analysis of small probability problem based on probability and evidence theory[J]. Journal of Hunan Institute of Engineering (Natural Science Edition), 2019, 29(2): 30-35(in Chinese).
- [21] 张梦. 基于区间-概率混合模型的在役桥梁可靠性评估[J]. 黑龙江交通科技, 2023, 46(3): 80-82,86.
- ZHANG M. Reliability evaluation of in service bridges based on interval stochastic hybrid model[J]. Communications Science and Technology Heilongjiang, 2023, 46(3): 80-82,86(in Chinese).
- [22] 孟增, 汪栋梁, 郝鹏. 面向概率-区间混合可靠性分析的自适应共轭控制方法与应用[J]. 应用力学学报, 2022, 39(6): 1076-1085.
- MENG Z, WANG D L, HAO P. Adaptive conjugate control method for probability-interval hybrid reliability analysis and its engineering application[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2022, 39(6): 1076-1085(in Chinese).
- [23] JIANG C, ZHANG Z, HAN X, et al. A novel evidence-theory-based reliability analysis method for structures with epistemic uncertainty[J]. Computers & Structures, 2013, 129: 1-12.
- [24] CHEN J B, YANG J Y, LI J. A GF-discrepancy for point selection in stochastic seismic response analysis of structures with uncertain parameters[J]. Structural Safety, 2016, 59: 20-31.

A mixed reliability analysis method based on direct probability integral

ZHU Qitao, LI Hongshuang*

(College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: Based on the idea of direct probability integral, a mixed reliability analysis method is proposed for the mixed uncertainty analysis of evidence variables and random variables with a complex limit state function. The proposed method starts with the probability interpretation of evidence theory, adopts the method of unifying evidence variables for converting evidence variables into random variables, and achieve the goal of unifying two types of uncertainty. Then, the structural reliability analysis is carried out through the direct probability integral method. Finally, the performance of the proposed method is validated through three numerical examples. The results show that compared with existing methods, the proposed method greatly improves computational efficiency with similar computational accuracy.

Keywords: evidence theory; direct probability integral method; structure reliability analysis; mixed uncertainty; randow variables