幂等矩阵线性组合表出零矩阵和单位矩阵的研究

杨忠鹏[1] ,连函生[1,2]
(1. 莆田学院数学系 ,福建 莆田 351100 ;2. 大连理工大学应用数学系 ,辽宁 大连 471006)

摘要: 研究 3 个不同的乘积两两可交换的非零幂等矩阵 P_1, P_2 和 P_3 的线性组合表出零矩阵或单位矩阵的所有可能的情况. 使用了与已有文献不同的方法 ,从所对应的{0 ,1}上线性方程组的全非零解的存在性和结构出发 ,对问题作了完整的解答 ;特别是当幂等矩阵 P_1, P_2 和 P_3 线性无关时 ,在置换相似下 ,只有以(1 ,1 ,1) ,(- 1 ,1 ,1) 和 $\frac{1}{2}$(1 ,1 ,1) 为组合系数的 3 种方式来表出单位矩阵.

关键词: 幂等矩阵 ;线性组合 ;零矩阵 ;单位矩阵 ;全非零解 ;基矩阵
中图分类号: O 151. 21 **文献标识码**: A **文章编号**: 0438-0479 (2009) 03-0310-07

设 $C^{n\times n}$ 为复数域 C 上 $n\times n$ 矩阵的集合 , I_n 表示 $n\times n$ 的单位矩阵 ,矩阵 A 的转置与秩分别记为 A^T 与 $\mathrm{rank}A$, $B=\{0,1\}$. 当满足 $P^2=P\in C^{n\times n}$ 时 ,称 P 为幂等矩阵.

文献[1 - 3] 讨论了幂等矩阵 $P_i^2=P_i(\neq 0)\in C^{n\times n}$, $i=1,2,3$ 的线性组合的幂等性问题:

$$P=c_1P_1+c_2P_2+c_3P_3,\ P_i\neq P_j,\ i\neq j;$$
$$P_iP_j=P_jP_i,\ i,j=1,2,3 \tag{1}$$

式(1) 中的系数 c_1, c_2, c_3 (也记 $C=(c_1,c_2,c_3)$) 都是非零的. 文献[1] 定理 3. 2 给出 P 是幂等矩阵的一些充分条件. 文献[2] 在限定条件" $P_2P_3=0$ "下 ,得到 P 为幂等矩阵的充要条件. 最近文献[3] 定理 1 给出了满足式(1) 的所有情况的刻画.

在式(1) 中的幂等矩阵 $P_1, P_2, P_3\in C^{n\times n}$ 满足 $P_2P_3=0$ 的条件下 ,文献[2] 定理 1(a) 给出了式(1) 中 P 为幂等矩阵的充要条件(即文献[2] 定理 1(a) 中的 $(a_1)\sim(a_{10})$ 之一成立 ,其中文献[2] 定理 1(a) 中 (a_{10}) 的叙述为: $P_2+P_3=P_1$ 且 $C=(c,-c,-c)$, $c\neq 0$ 或 $C=(c,-c,1-c)$, $c\neq 0$, $c\neq 1$ 或 $C=(c,1-c,-c)$, $c\neq 0$, $c\neq 1$ 或 $C=(c,1-c,1-c)$, $c\neq 0$, $c\neq 1$) ;文献[3] 定理 1 得到了满足式(1) 的幂等矩阵 $P_1, P_2, P_3\in C^{n\times n}$ 线性组合 P 为幂等矩阵的充要条件(即文献[3] 定理 1 的(a) ～ (m) 之一成立 ,其中文献[3] 定理 1 的(k) 叙述为: $P_j+P_k=P_i$, $P_jP_k=0$ 且 $c_i+c_j=0$, $c_i+c_k=0$ 或 $c_i+c_j=0$, $c_i+c_k=1$ 或 $c_i+c_j=1$, $c_i+c_k=1$). 文献[2 - 3] 实际上证明了 3 个幂等矩阵的线性组合可以表出特殊的幂等矩阵 ——零矩阵. 1994 年 Bart 等研究了 Banach 代数中幂等元的和为零问题[4]. 这样文献[2 - 3] 的讨论可看成是文献[4] 的继续. 对给定的满足式(1) 的幂等矩阵有多少种线性组合表出零矩阵的方法 ,文献[2 - 3] 没有涉及到这个问题. 我们将对满足式(1) 条件下的幂等矩阵的线性组合为零矩阵的所有可能给出一个完整的结论.

文献[1] 将其主要结果应用到 $n=3$ 的情况时得到:

命题 ([1] 定理 1(a)) 设 $P_1, P_2, P_3\in C^{3\times 3}$ 是满足式(1) 的幂等矩阵. 如果 $P_iP_j=0$, $i\neq j$ 且 $P=P_1+P_2+P_3$ 是幂等矩阵 ,则 $P=I_3$.

文献[5 - 6] 讨论了两个幂等矩阵的和与差的可逆性问题 ,文献[6 - 8] 把这个问题深入到两个幂等矩阵的线性组合的情况. 从周知简单事实:"幂等矩阵 $P\in C^{n\times n}$ 是可逆阵 $\Leftrightarrow P=I_n$ "出发 ,可知命题实际上给出了 3×3 的 3 个幂等矩阵的线性组合是可逆的幂等矩阵一个充分条件. 文献[2 - 3] 没有涉及满足(1) 的 3 个幂等矩阵的线性组合表出单位矩阵的问题. 我们将讨论式(1) 条件下的幂等矩阵的线性组合为可逆的幂等矩阵(即为单位矩阵) 的充分必要条件.

我们可得到新结论的主要原因之一在于使用了与文献[1 - 3] 不同的方法.

1 预备知识

设 $\lambda_1(F)$, $\lambda_2(F)$, …, $\lambda_n(F)$ 为 $F\in C^{n\times n}$ 为所有的特征值. 对满足式(1) 的 3 个幂等矩阵在下面式(2) 的意义下 ,记 $\lambda_i=(\lambda_i(P_1),\lambda_i(P_2),\lambda_i(P_3))$, $i=1,2,\cdots,$

收稿日期:2008-06-27
基金项目:福建省自然科学基金(Z0511051) ,福建省教育厅项目(JA08196) ,莆田学院科研基金(2004Q002) 资助
Email :yangzhengpeng @126. com

n.

引理1　设 $P_1, P_2, P_3 \in C^{n\times n}$ 是满足式(1)的幂等矩阵,则有可逆矩阵 S 使

$$P_j = S\mathrm{diag}(\lambda_1(P_j), \lambda_2(P_j), \cdots, \lambda_n(P_j))S^{-1}, \quad j = 1,2,3 \tag{2}$$

证明　由文献[9]定理4.1.1知, $F \in C^{n\times n}$ 为幂等的当且仅当 F 可对角化且每个 $\lambda_i(F) = 0$ 或1. 由 P_1, P_2, P_3 是两两可交换的,应用文献[10]定理1.3.19或文献[1]引理2.1,知式(2)成立.

引理2　(见文献[2]式(4.6)或见文献[3]式(2.1))设 $P_1, P_2, P_3 \in C^{n\times n}$ 是满足式(1)的幂等矩阵,则 $P^2 = P$ 当且仅当 $\Delta(c_1, c_2, c_3) = 0$,其中

$$\Delta(c_1, c_2, c_3) = \sum_{i=1}^{3} c_i(c_i - 1)P_i + 2c_1c_2P_1P_2 + 2c_1c_3P_1P_3 + 2c_2c_3P_2P_3 \tag{3}$$

引理3　(见文献[11],P30)设 $F \in C^{m\times n}$, $f \in C^n$,则线性方程组 $Fx = f$ 有解当且仅当秩满足 $\mathrm{rank}F = \mathrm{rank}(F, f)$,且在 (F, f) 的行的初等变换下 $Fx = f$ 的解是不变的.

由式(1),(2)和文献[9]定理4.1.1知幂等矩阵 P_1, P_2, P_3 与 $A = [\lambda_1^T, \lambda_2^T, \cdots, \lambda_n^T]^T \in B^{n\times 3}$ 是互为确定的,其中 $\lambda_i = (\lambda_i(P_1), \lambda_i(P_2), \lambda_i(P_3)) \in B^3$;此时称

$$Ax = b, A = [\lambda_1^T, \lambda_2^T, \cdots, \lambda_n^T]^T \in B^{n\times 3}, b \in B^3 \tag{4}$$

为式(1)所确定的 B 上的线性方程组;如果有非零复数 c_1, c_2, c_3 满足式(4),称 $C = (c_1, c_2, c_3)$ 为式(4)的一个全非零解. 设

$S_P = \{C = (c_1, c_2, c_3) \mid$ 非零复数 c_1, c_2, c_3 使式(1)中 $P^2 = P\}$,

$S_A = \{C = (c_1, c_2, c_3) \mid$ 存在 $b \in B^3$ 使 c_1, c_2, c_3 为式(4)的全非零解$\}$.

引理4　设 $P_1, P_2, P_3 \in C^{n\times n}$ 是满足式(1)的幂等矩阵,则 $S_P = S_A$.

证明　由式(1)和(2)知 P 是可对角化的且

$$P = S\mathrm{diag}(c_1\lambda_1(P_1) + c_2\lambda_1(P_2) + c_3\lambda_1(P_3), \cdots, c_1\lambda_n(P_1) + c_2\lambda_n(P_2) + c_3\lambda_n(P_3))S^{-1} \tag{5}$$

从式(5)和文献[9]定理4.1.1知 $P^2 = P$ 当且仅当有非零数 c_1, c_2, c_3 使

$$c_1\lambda_i(P_1) + c_2\lambda_i(P_1) + c_3\lambda_i(P_1) = b_i \in B = \{0,1\}, i = 1,2,\cdots,n \tag{6}$$

这样由式(5)和(6)可得 $S_P = S_A$.

引理4表明式(1)中矩阵 P 的幂等性可归结为 B 上线性方程组式(4)所有可能的全非零解的研究. 我们的研究方法与文献[1-3]不同的就在于此. 下面的引理5,6和7是简单的,但却是得到本文主要结果的重要依据.

引理5　设 $P_1, P_2, P_3 \in C^{n\times n}$ 是满足式(1)和(2)的幂等矩阵,则由式(4)中 A 的第 j 列元素所确定的对角矩阵

$$\widetilde{P}_j = S^{-1}P_jS = \mathrm{diag}(\lambda_1(P_j), \lambda_2(P_j), \cdots, \lambda_n(P_j)), j = 1,2,3 \tag{7}$$

与 P_j 是互为确定的.

引理6　设 $P_1, P_2, P_3 \in C^{n\times n}$ 是满足式(1)的幂等矩阵,则 $\mathrm{rank}A = 2$ 或3.

证明　如果 $P_1 = aP_2, a(\neq 0) \in C$,那么 $P_1 = aP_2 = P_1^2 = a^2P_2^2 \neq 0, a^2 - a = a(a-1) = 0$,因此 $a = 1$ 这矛盾于式(1)所设. 由此知向量组$\{P_1, P_2, P_3\}$的秩大于1,注意到式(4)中的 A 是 $n\times 3$ 的,这样从引理5知 $\mathrm{rank}A = 2$ 或3.

因为由 P_1, P_2, P_3 生成的矩阵空间的维数是由向量组$\{P_1, P_2, P_3\}$的秩来确定的,注意到 $\mathrm{rank}(P_1, P_2, P_3) = \mathrm{rank}(A) = 2$ 或3. 这样由引理5和6得:

引理7　设 $P_1, P_2, P_3 \in C^{n\times n}$ 是满足式(1)和(2)的幂等矩阵,则

$\mathrm{rank}(A) = 2 \Leftrightarrow \{P_1, P_2, P_3\}$ 线性相关;

$\mathrm{rank}(A) = 3 \Leftrightarrow \{P_1, P_2, P_3\}$ 线性无关.

由引理7知当式(1)中 P_1, P_2, P_3 线性相关(或无关)时,式(4)中 A 的行空间的基 λ_1, λ_2(或 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$)是 $B^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$ 中线性无关的向量,称(或)为 A 的基矩阵.

由引理3知对 (A, b) 作行的初等变换不改变式(4)的解,因此可约定 A 的基矩阵中的行向量是按字典序排出的.

引理8　设 $P_1, P_2, P_3 \in C^{n\times n}$ 是满足式式(1)的幂等矩阵,如果式(4)的矩阵 A 的秩 $\mathrm{rank}(A) = 2$,则 A 的基矩阵只有3种可能情况:

$$A_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_{03} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

证明　设 λ_1, λ_2 为 A 的行空间的按字典序排出的基,即

$$[\lambda_1^T, \lambda_2^T]^T \left(= \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(P_1) & \lambda_1(P_2) & \lambda_1(P_3) \\ \lambda_2(P_1) & \lambda_2(P_2) & \lambda_2(P_3) \end{bmatrix} \right)$$

为基矩阵,从 $\mathrm{rank}(A) = 2$ 可设

$$\lambda_i (= (\lambda_i(P_1), \lambda_i(P_2), \lambda_i(P_3))) = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 \in B^3, i = 1,2,\cdots,n, a_1, a_2 \in C \tag{9}$$

如果$[\lambda_1^T,\lambda_2^T]^T$有一列为全零,不妨设$\lambda_1(P_3)=\lambda_2(P_3)=0$,从式(9)可得每个$\lambda_i(P_3)=0$,从式(2)得与式(1)矛盾事实$P_3=0$.如果$[\lambda_1^T,\lambda_2^T]^T$中至少有两列是相同的,不妨设$\lambda_1(P_1)=\lambda_1(P_2)$,$\lambda_2(P_1)=\lambda_2(P_2)$,由式(9)知每个$\lambda_i(P_1)=\lambda_i(P_2)$,从式(2)得与式(1)矛盾事实$P_1=P_2$.这就证明了此时基矩阵只有式(8)所表示的3种情况.

引理9 设$P_1,P_2,P_3\in C^{n\times n}$是满足式(1)的幂等矩阵,$M$为由(4)中$A$的第$t_1,t_2,\cdots,t_q$行向量$\lambda_{t_1}$,$\lambda_{t_2},\cdots,\lambda_{t_q}$构成的$A$的基矩阵.令由$M$的第$j$列元素确定的对角矩阵为$Q_j$,如果$\lambda_i\in\{0,\lambda_{t_1},\cdots,\lambda_{t_q}\}$,$i=1,2,\cdots,n$.那么$Q_1,Q_2,Q_3$满足的乘法及线性运算也适用于$P_1,P_2,P_3$.

证明 $[M^T,\lambda_i^T]^T$相对于M只是增加了一个重复的行向量或零向量,因此$[M^T,\lambda_i^T]^T$各列元素确定的对角矩阵必满足M各列元素确定的对角矩阵Q_1,Q_2,Q_3的乘法及线性运算性质,由此知式(7)中$\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2,\widetilde{P}_3$必满足$Q_1,Q_2,Q_3$的乘法及线性运算性质,再从式(2)和(7)知结论成立.

2 3个幂等矩阵线性组合为零的刻画

由式(1)和引理4知,此时相当求出式(4)的$b=0$的齐次线性方程组式(8)所有全非零解.

$$Ax=0,A=[\lambda_1^T,\lambda_2^T,\cdots,\lambda_n^T]^T\in B^{n\times 3}\tag{10}$$

定理1 设$P_1,P_2,P_3\in C^{n\times n}$是满足式(1)的幂等矩阵,则$P=0$当且仅当下述之一成立;

(i) $P_1P_2=0$且$C=(-c,-c,c)$,$\forall c(\neq 0)\in C$使式(10)成立;

(ii) $P_2P_3=0$且$C=(c,-c,-c)$,$\forall c(\neq 0)\in C$使式(10)成立;

(iii) $P_1P_3=0$且$C=(-c,c,-c)$,$\forall c(\neq 0)\in C$使式(10)成立.

证明 当$P=0$时,从引理4知此时式(8)有非零解,由式(1),(2)和引理5知$\mathrm{rank}(A)=2$,进而从引理8知

$$A_{0i}x=0,(A_{0i}\text{由式(8)所确定},i=1,2,3)\tag{11}$$

与式(10)同解.

按引理9的约定由A_{01}确定的对角矩阵$Q_1=\mathrm{diag}(0,1)$,$Q_2=\mathrm{diag}(1,0)$,$Q_3=I_2$满足

$$Q_1Q_2=0,Q_1+Q_2-Q_3=0\tag{12}$$

且$A_{01}x=0$的一般解为$C=(-c,-c,c)$,$\forall c(\neq 0)\in C$.相对A_{01},由式(9)知A任一行向量$\lambda_i=(\lambda_i(P_1),\lambda_i(P_2),\lambda_i(P_3))=(a_2,a_1,a_1+a_2)\in B^3$;从所有可能取值$(a_1,a_2)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$分别得$\lambda_i=0,\lambda_2,\lambda_1$和矛盾事实$\lambda_i(P_3)=a_1+a_2=2$;由式(12)和引理9可得(i).

当A的基矩阵为式(8)中的A_{02}或A_{03}且$P=0$,类似的知(ii)或(iii)成立.

当(i)成立时,由引理4知$-cP_1-cP_2+cP_3=0$,即$P_1+P_2-P_3=0$是幂等的.

同理可证当(ii)或(iii)成立有:$P_1-P_2-P=P=0$或$-P_1+P_2-P_3=P=0$.

定理1给出了满足式(1)幂等矩阵P_1,P_2,P_3的线性组合为零的充要条件,所得结论表明$P=0$时表出系数有且仅有3种:$(-c,-c,c)$或$(-c,c,-c)$或$(c,-c,-c)$ $(c\neq 0)$.因此当不计非零数c时,线性表出零矩阵有且仅有的3种情况.这样由定理1可得:

定理2 设$P_1,P_2,P_3\in C^{n\times n}$是满足式(1)的幂等矩阵,则$P=0$当且仅当$P_1P_2=0$且$P_1+P_2=P_3$或$P_2P_3=0$且$P_2+P_3=P_1$或$P_1P_3=0$且$P_1+P_3=P_2$.

文献[2]是在假设$P_2P_3=0$下得到其定理1(a_{10})的.文献[3]定理1(k)将“$P_j+P_k=P_i$”与“$P_jP_k=0$”作为两个独立条件列出的.实际上

定理3 设$P_1,P_2,P_3\in C^{n\times n}$是满足式(1)的幂等矩阵,如果$i,j,k$是1,2,3全排列,则$P=0$当且仅当$P_i+P_j=P_k$.

证明 当$P=0$时,由定理2的必要性知$P_i+P_j=P_k$.

当$P_i+P_j=P_k$时,从式(1)所设$P_k^2=P_i+2P_iP_j+P_j=P_k$,必有$P_iP_j=0$,这样由定理2的充分性知$P=0$.

3 3个幂等矩阵线性组合为单位阵的刻画

由式(1)和引理4知,此时等价于求出与式(4)同解的下述式(13)所有可能的全非零解.

$$Ax=1=[1\ 1\cdots 1]^T=b,$$
$$A=[\lambda_1^T,\lambda_2^T,\cdots,\lambda_n^T]^T\in b^{n\times 3}\tag{13}$$

定理4 设$P_1,P_2,P_3\in C^{n\times n}$是满足式(1)的线性相关的幂等矩阵,则$P=I_n$当且仅当下述之一发生:

(i) $P_3=P_1+P_2=I_n$且$C=(1-c,1-c,c)$,$c\neq 0$,$c\neq 1$满足式(13);

(ii) $P_2=P_1+P_3=I_n$且$C=(1-c,c,1-c)$,$c\neq 0$,$c\neq 1$满足式(13);

(iii) $P_1=P_2+P_3=I_n$且$C=(c,1-c,1-c)$,$c\neq 0$,$c\neq 1$满足式(13).

证明　当 $P = I_n$(也是幂等的)时,由引理4知有全非零解 c_1, c_2, c_3 满足式(13)且 $\lambda_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$. 从定理1证明知相应于式(8)中的基矩阵为 $A_{01} = [\lambda_1^T, \lambda_2^T]^T = \begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$,有 $\lambda_i \in \{\lambda_1,\lambda_2\}, i=1,2,\cdots,n$,即 A 的第3列确定的对角阵 $\widetilde{P}_3 = I_n$ 时,从式(1)与(2)得 $P_3 = I$;同时从 A_{01} 的各个列确定的对角矩阵满足 $Q_1Q_2=0, Q_3 = Q_1+Q_2 = I_2$,由引理9知 $P_3 = P_1+P_2 = I_n$;因为此时式(13)与 $A_{01}x = 1$ 是同解的,这样由 $[A_{01},1]$ 所得的 $c_2 = c_1 = 1-c$,知式(13)的全非零解 $C = (1-c,1-c,c), c\neq 0, c\neq 1$;即(i)成立.

类似由基矩阵 $A_{02} = \begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ 时,A_{02} 的各个列所确定对角矩阵满足的运算性质和引理9得 $P_2 = P_1+P_3 = I_n$,且从 $A_{02}x = 1$ 得 $c_3 = c_1 = 1-c$,得式(13)的全非零解 $C=(1-c,c,1-c), c\neq0, c\neq1$,即(ii)成立.

当 A 的基矩阵为式(8)中的 A_{03} 时,类似于上面的讨论,可得到(iii)。

当(i)成立时,由式(1)和引理4知

$$P = (1-c)P_1 + (1-c)P_2 + cP_3 = P_1+P_2 - c(P_1+P_2-P_3) = P_1+P_2 = P_3 = I_n.$$

同理知当(ii)或(iii)成立时,总有式(1)中的 $P = I_n$ 成立.

引理10　设 $P_1,P_2,P_3\in C^{n\times n}$ 是满足式(1)的线性无关的幂等矩阵,若线性方程组式(13)有全非零解,则式(13)的系数矩阵 A 的基矩阵只有如下可能:

$$A_1 = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix} \tag{14}$$

证明　由引理7可设 A 的基矩阵为 $M = [\lambda_1^T,\lambda_2^T,\lambda_3^T]^T$,这样可将式(13)转化为同解式(15)的讨论:

$$MC^T = 1, M = [\lambda_1^T,\lambda_2^T,\lambda_3^T]^T \in B^{3\times3} \tag{15}$$

因为基矩阵中的行向量是按字典排出的,所以式(15)有

$\lambda_1 \in \{(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$.

(i) 当 $\lambda_1 = (0,0,1)$ 时,λ_2 可从 $\{(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0)\}$ 中选择. 如果 $\lambda_2 = (0,1,1)$,由式(15)

$$[M,1] = \begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&1\\\lambda_3(P_1)&\lambda_3(P_2)&\lambda_3(P_3)&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&0\\\lambda_3(P_1)&\lambda_3(P_2)&\lambda_3(P_3)&1\end{bmatrix}$$

得 $c_2 = 0$;如果 $\lambda_2 = (1,0,1)$,从式(15)有

$$[M,1] = \begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&1\\\lambda_3(P_1)&\lambda_3(P_2)&\lambda_3(P_3)&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\\lambda_3(P_1)&\lambda_3(P_2)&\lambda_3(P_3)&1\end{bmatrix}$$

得 $c_1 = 0$;这些矛盾事实,说明只可选择 $\lambda_2 = (0,1,0)$ 或 $(1,0,0)$ 或 $(1,1,0)$.

(a) 当 $\lambda_2 = (0,1,0)$ 时,λ_3 可从 $\{(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ 中选择. 因为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 线性无关,所以 $\lambda_3 \neq (0,1,1)$;如果 $\lambda_3 = (1,0,1)$,则从式(15)

$$[M,1] = \begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\1&0&1&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},$$

得 $c_1 = 0$;如果 $\lambda_3 = (1,1,0)$,则从式(15)

$$[M,1] = \begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&0&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},$$

得 $c_1 = 0$;这些矛盾事实,说明只可选择 $\lambda_3 = (1,0,0,)$ 或 $\lambda_3 = (1,1,1)$,即只有选择

$$\lambda_3 \in \{(1,0,0),(1,1,1)\}, \text{当 } \lambda_1 = (0,0,1) \text{ 且 } \lambda_2 = (0,1,0) \text{ 时} \tag{16}$$

(b) 当 $\lambda_2 = (1,0,0)$ 时,λ_3 可从 $\{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ 中选择. 因为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 线性无关,所以 $\lambda_3 \neq (1,0,1)$;如果 $\lambda_3 = (1,1,0)$,则从式(15)

$$[M,1] = \begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&1\\1&1&0&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},$$

得 $c_2 = 0$;这与式(15)所设矛盾. 因此只有选择

$$\lambda_1 = (0,0,1), \lambda_2 = (1,0,0), \lambda_3 = (1,1,1) \tag{17}$$

(c) 当 $\lambda_2 = (1,1,0)$ 时,仅有的选择 $\lambda_3 = (1,1,1)$,如果 $\lambda_3 = (1,1,1)$,则 $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$ 这与秩 $M = 3$ 矛盾.

(ii) 当 $\lambda_1 = (0,1,0)$ 时,λ_2 可从 $\{(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0)\}$ 中选择,如果 $\lambda_2 = (0,1,1)$ 或 $\lambda_2 = (1,1,0)$,类似(i)的讨论由式(15)可得矛盾事实 c_3

$=0$ 或 $c_1=0$;因此可能的选择只有 $\lambda_2=(1,0,0)$ 或 $\lambda_2=(1,0,1)$.

(a) 当 $\lambda_2=(1,0,0)$ 时,λ_3 可从 $\{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ 中选择. 如果 $\lambda_3=(1,0,1)$,则从式(15)类似(i)的讨论可得矛盾事实 $c_3=0$;如果选择了 $\lambda_3=(1,1,0)$,则 $\lambda_3=\lambda_1+\lambda_2$ 这与秩 $M=3$ 矛盾. 这说明此时只有一种可能的选择

$$\lambda_1=(0,1,0),\lambda_2=(1,0,0),\lambda_3=(1,1,1) \quad (18)$$

(b) 当 $\lambda_2=(1,0,1)$ 时,仅有的选择 $\lambda_3=(1,1,0)$ 或 $(1,1,1)$,类似(i)的讨论可知这些都与秩 $M=3$ 矛盾的.

(iii) 当 $\lambda_1=(0,1,1)$ 时,λ_2 可从 $\{(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0)\}$ 中选择;如果 $\lambda_2=(1,1,0)$,那么 $\lambda_3=(1,1,1)$,类似(i)的讨论由式(15)可得矛盾事实 $c_1=0$;因此可能的选择只有 $\lambda_2=(1,0,0)$ 或 $(1,0,1)$.

(a) 当 $\lambda_2=(1,0,0)$ 时,λ_3 可从 $\{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ 中选择. 因为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 线性无关,所以 $\lambda_3\neq(1,1,1)$;如果 $\lambda_3=(1,0,1)$ 或 $(1,1,0)$,则从式(15)类似(i)的讨论可得矛盾事实 $c_3=0$ 或 $c_2=0$.

(b) 若 $\lambda_2=(1,0,1)$,则 λ_3 可从 $\{(1,1,0),(1,1,1)\}$ 中选择;如果 $\lambda_3=(1,1,1)$,则从式(15)类似(i)的讨论可得矛盾事实 $c_2=0$;只有可能

$$\lambda_1=(0,1,1),\lambda_2=(1,0,1),\lambda_3=(1,1,0) \quad (19)$$

(iv) 当 $\lambda_1=(1,0,0)$ 时,λ_2 可从 $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$ 中选择;类似(i)的讨论可知,其中的每个选择由式(15)都要得矛盾事实 $c_1=0$ 或 $c_2=0$.

(v) 当 $\lambda_1=(1,0,1)$ 时,仅有的选择 $\lambda_2=(1,1,0)$,$\lambda_3=(1,1,1)$ 从式(15),类似(i)的讨论要得到矛盾事实 $c_2=0$.

综上由式(16)～(19)可知与式(13)同解系数矩阵 A 的基矩阵只能从式(14)中选择.

定理 5 设 $P_1,P_2,P_3\in C^{n\times n}$ 是满足式(1)的线性无关的幂等矩阵,如果 i,j,k 是 1,2,3 全排列,则 $P=I_n$ 当且仅当下述之一成立:

(i) $P_iP_j=0,i\neq j,\mathrm{tr}(P_1+P_2+P_3)=n,C=(1,1,1)$;

(ii) $P_1P_2=P_1P_3=P_2P_3=P_i,\mathrm{tr}(-P_i+P_j+P_k)=n,C=(c_1,c_2,c_3),c_i=-1,c_j=c_k=1$;

(iii) $P_i=P_i(P_j+P_k),\mathrm{tr}(P_1+P_2+P_3)=2n,C=\frac{1}{2}(1,1,1)$.

证明 由引理 7 知此时式(13)中系数矩阵秩 $A=3$,从引理10知当式(1)中 $P=I_n$ 时,和式(13)有相同全非零解的由基矩阵 A_k(由式(14)所定义)所确定的线性方程组包含在式(20)所列出的 5 种情况之中:

$$A_kx=1,k=1,2,3,4,5;$$
$$A_k=[\lambda_1^T,\lambda_2^T,\lambda_3^T]^T\in B^{3\times3},k=1,2,3,4,5 \quad (20)$$

线性方程组(20)的增广矩阵记为 $\overline{A_t}=[A_t,1]$(也用它表示这个线性方程组),由式(13)和(20)可设式(13)增广矩阵的 $[A,1]$ 任一行向量:

$$(\lambda_i,1)=a_1(\lambda_1,1)+a_2(\lambda_2,1)+a_3(\lambda_3,1),$$
$$i=1,2,\cdots,n \quad (21)$$

(i) 由式(14)和式(20)知,$[A_1,1]$ 有唯一全非零解 $C=(1,1,1)$,且由基矩阵 $A_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ 各个列所确定的对角矩阵满足

$$Q_iQ_j=0,i\neq j,Q_1+Q_2+Q_3=I_3;$$
$$i,j,k \text{ 是 } 1,2,3 \text{ 全排列} \quad (22)$$

由式(14)和(21)得 $(\lambda_i,1)=(a_3,a_2,a_1,a_1+a_2+a_3)\in B^4$,这样从 $a_1+a_2+a_3=1$ 得 $(a_1,a_2,a_3)=(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$,即 $\lambda_i\in\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$,进而由引理 9 和式(22),得 $P_iP_j=0,i\neq j,P_1+P_2+P_3=P$,$i,j,k$ 是 1,2,3 全排列;由式(13)中 $b=[1,1,\cdots,1]^T$ 确定幂等矩阵 P 的特征值都是 1,知 $P=I_n$ 且 $\mathrm{tr}(P_1+P_2+P_3)=\mathrm{tr}I_n=n$,这就证明了定理 5(i).

(ii) 由式(20)易知,$[A_2,1]$ 有唯一全非零解 $C=(-1,1,1)$ 且由基矩阵 $A_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$ 各个列所确定的对角矩阵满足

$$Q_1Q_2=Q_1Q_3=Q_2Q_3=Q_1,$$
$$-Q_1+Q_2+Q_3=I_3 \quad (23)$$

由式(13)和(21)知

$$(\lambda_i,1)=(a_3,a_2+a_3,a_1+a_3,$$
$$a_1+a_2+a_3(=1))\in B^4 \quad (24)$$

(a) 由式(24)知,当 $a_3=0$ 时,$a_1+a_2=1-a_3=1$ 且 $(\lambda_i,1)=(0,a_2,a_1,a_1+a_2(=1))\in B^4$,因此 $(a_1,a_2,a_3)\in\{(1,0,0),(0,1,0)\}$,进而从式(21)得 $\lambda_i\in\{\lambda_1,\lambda_2\}$.

(b) 由式(24)知,当 $a_3=1$ 时,$(\lambda_i,1)=(1,a_2+1,a_1+1,a_1+a_2+1(=1))\in B^4$ 且 $a_1+a_2=0$;如果 $a_2+1=0$(即 $a_2=-1$),则 $(a_1,a_2,a_3)=(1,-1,1)$ 这样有矛盾事实 $a_1+1=2\notin B$;因此必有 $a_2+1=1$(即 $a_2=0$),注意到 $a_1+a_2=0$ 知 $(a_1,a_2,a_3)=(0,0,1)$,应用式(24)得 $\lambda_i=\lambda_3$.

(a)和(b)说明 $\lambda_i\in\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$,这样应用式(23)和引理 9 得 $P_1P_2=P_1P_3=P_2P_3=P_1$,$-P_1+P_2+P_3=P$,同于(i)的讨论知 $P=I_n$ 且 $\mathrm{tr}(-P_1+P_2+P_3)=\mathrm{tr}I_n=n$,即

$$P_1P_2 = P_1P_3 = P_2P_3 = P_1,$$
$$-P_1 + P_2 + P_3 = P \text{ 且 } \mathrm{tr}(-P_1 + P_2 + P_3) = n,$$
$$C = (-1,1,1) \quad (25)$$

(iii) 由式(20)易知,$[A_3,1]$有唯一全非零解 $C = (1,-1,1)$ 且由基矩阵 $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 各个列所确定的对角矩阵满足

$$Q_1Q_2 = Q_1Q_3 = Q_2Q_3 = Q_2, Q_1 - Q_2 + Q_3 = I_3 \quad (26)$$

由式(13),(14)和(21)此时知

$$(\lambda_i,1) = (a_2 + a_3, a_3, a_1 + a_3, a_1 + a_2 + a_3(=1)) \in B^4 \quad (27)$$

(a) 由式(27)知,当 $a_3 = 0$ 时,$a_1 + a_2 = 1 - a_3 = 1$ 且 $a_2 + a_3 = a_2 \in B = \{0,1\}$. 如果 $a_2 = 0$,则$(a_1,a_2,a_3) = (1,0,0)$;如果 $a_2 = 1$,则$(a_1,a_2,a_3) = (0,1,0)$;故从式(21)得 $\lambda_i \in \{\lambda_1,\lambda_2\}$.

(b) 由式(27)知,当 $a_3 = 1$ 时,$a_1 + a_2 = 1 - a_3 = 0$ 且 $a_1 + a_3 = a_1 + 1 \in B = \{0,1\}$. 这样如果 $a_1 + 1 = 0$,则$(a_1,a_2,a_3) = (-1,1,1)$ 此矛盾于 $a_2 + a_3 \in B = \{0,1\}$;如果 $a_1 + 1 = 1$,则$(a_1,a_2,a_3) = (0,0,1)$;从式(21)知此时 $\lambda_i = \lambda_3$.

(a)和(b)说明 $\lambda_i \in \{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$,这样应用式(26)和引理9类似于(ii)的讨论得

$$P_1P_2 = P_1P_3 = P_2P_3 = P_2, P_1 - P_2 + P_3 = P \text{ 且 } \mathrm{tr}(P_1 - P_2 + P_3) = n, C = (1,-1,1) \quad (28)$$

(iv) 由式(20)易知$[A_4,1]$有唯一全非零解 $C = (1,1,-1)$ 且由基矩阵 $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 各个列所确定的对角矩阵满足

$$Q_1Q_2 = Q_1Q_3 = Q_2Q_3 = Q_3, Q_1 + Q_2 - Q_3 = I_3 \quad (29)$$

由式(13),(14)和(21)此时知

$$(\lambda_i,1) = (a_2 + a_3, a_1 + a_3, a_3, a_1 + a_2 + a_3(=1)) \in B^4 \quad (30)$$

注意到式(30)与(27)的构成的相近性,应用式(26)和引理9类似于(iii)的讨论得 $P_1P_2 = P_1P_3 = P_2P_3 = P_3, P_1 + P_2 - P_3 = P$ 且 $\mathrm{tr}(P_1 + P_2 - P_3) = n, C = (1,1,-1)$.

进而从式(25)和(28)知定理5(ii)成立.

(v) 由式(20)易知$[A_5,1]$有唯一全非零解 $C = \frac{1}{2}(1,1,1)$ 且由基矩阵 $A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 各个列所确定的对角矩阵满足

$$Q_i = Q_i(Q_j + Q_k), \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2 + Q_3) = I_3;$$
$$i,j,k \text{ 是 } 1,2,3 \text{ 全排列} \quad (31)$$

由式(13)和(21)知此时

$$(\lambda_i,1) = (a_2 + a_3, a_1 + a_3, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3(=1)) \in B^4 \quad (32)$$

由式(32)知当 $a_2 + a_3 = 0$ 时,$a_1 = 1 - a_2 - a_3 = 1$,$(\lambda_i,1) = (0,1 + a_3,1 + a_2,1) \in B^4$.

如果 $1 + a_3 = 0$ 或 $1 + a_2 = 0$,则$(a_1,a_2,a_3) = (1,1,-1)$或$(1,-1,1)$;这些都要得到与式(32)矛盾事实:$a_1 + a_3 = 2$ 或 $a_1 + a_2 = 2$. 所以必 $1 + a_3 = 1$ 且 $1 + a_2 = 1$,即$(a_1,a_2,a_3) = (1,0,0)$.

由式(32)知当 $a_2 + a_3 = 1$ 时,$a_1 = 1 - a_2 - a_3 = 0$,$(\lambda_i,1) = (1,a_3,a_2,1) \in B^4$,因此$(a_1,a_2,a_3) \in \{(0,1,0),(0,0,1)\}$.

由定理5(i),5(ii)的讨论和式(21)知 $\lambda_i \in \{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$,这样应用式(31)和引理9类似于上面的讨论得

$$P_i = P_i(P_j + P_k), \mathrm{tr}(P_1 + P_2 + P_3) = 2n,$$
$$i,j,k \text{ 是 } 1,2,3 \text{ 全排列}; C = \frac{1}{2}(1,1,1).$$

即定理5(iii)成立.

注意幂等矩阵的一个简单性质:

$$\mathrm{tr}W = \mathrm{rank}W, W^2 = W \quad (33)$$

当定理5(i)成立时,由式(3)知 $\Delta(1,1,1) = 2P_1P_2 + 2P_1P_3 + 2P_2P_3 = 0$,从引理2知 $P_1 + P_2 + P_3$ 是幂等矩阵,再由 $\mathrm{tr}(P_1 + P_2 + P_3) = \mathrm{tr}(P) = \mathrm{rank}(P) = n$ 和式(33)知 P 可逆,进而 $P = I_n$.

当定理5(ii)成立时,从 $P^2 = P_i + P_j + P_k - 2P_iP_j - 2P_iP_k + 2P_jP_k = -P_i + P_j + P_k = P$ 知 P 是幂等矩阵,再由 $\mathrm{tr}(-P_i + P_j + P_k) = n$ 和式(33)知 $P = I_n$.

当定理5(iii)成立时,由(3)知

$$\Delta(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)P_i + \frac{1}{2}P_1P_2 + \frac{1}{2}P_1P_3 + \frac{1}{2}P_2P_3 = \frac{1}{4}[-P_1 + P_1^2(P_2 + P_3) - P_2 + P_2^2(P_1 + P_3) - P_3 + P_3^2(P_1 + P_2)] = \frac{1}{4}[-P_1 + P_1(P_2 + P_3) - P_2 + P_2(P_1 + P_3) - P_3 + P_3(P_1 + P_2)] = \frac{1}{4}(-P_1 + P_1 - P_2 + P_2 - P_3 + P_3) = 0.$$

从引理2知 $\frac{1}{2}(P_1 + P_2 + P_3) = P$ 是幂等的,$\mathrm{tr}\frac{1}{2}(P_1 + P_2 + P_3) = n$ 和式(33)知 $P = I_n$.

由定理 4 和 5 可得

定理 6 设 $P_1, P_2, P_3 \in C^{n\times n}$ 是满足式(1) 的幂等矩阵,如果 $i, j, k = 1,2,3$ 且 i, j, k 是 1,2,3 全排列,则 $P = I_n$ 当且仅当下述之一发生:

(i) $C = (1,1,1)$ 且 $P_i P_j = 0, i \neq j = 1,2,3, i, j = 1,2,3, \mathrm{tr}(P_1 + P_2 + P_3) = n$;

(ii) $P_1 P_2 = P_1 P_3 = P_2 P_3 = P_i, \mathrm{tr}(-P_i + P_j + P_k) = n, C = (c_1, c_2, c_3), c_i = -1, c_j = c_k = 1$;

(iii) $C = \frac{1}{2}(1,1,1)$ 且 $P_i = P_i(P_j + P_k), \mathrm{tr}(P_1 + P_2 + P_3) = 2n$;

(iv) $C = (c_1, c_2, c_3)$ 且 $P_i + P_j = P_k = I_n, c_i = c_j = 1 - c, c_k = c(c \neq 0$ 或 $1)$.

文献[12] 已经证明特征为零的域上的每个 $n \times n$ 矩阵都是 3 个幂等矩阵的线性组合,我们的工作表明,这样的线性组合的形式可能是不唯一的.

当 $n = 3$ 时,由定理 5(i) 可得到文献[1]所给出的命题.但我们的结果表明,文献[1] 的结论也仅是我们结果的一种特殊情况.

参考文献:

[1] Halim Ozdemir, Ahmet Angar Ozban. On idempotency of linear combinations of idempotent matrices [J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 159(2): 439 - 448.

[2] Oskar Maria Baksalary. Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are disjoint[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2004, 388: 67 - 78.

[3] Oskar Maria Baksalary, Julio Benitez. Idempotency of linear combinations of three idempotent, two of which are commuting [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2007, 424: 320 - 337

[4] Bart H, Ehrhardt T, Silbermann B. Zero sums of idempotents in Banach algebras[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1994, 19(2): 125 - 134.

[5] Gross J, Trenkler G. Nonsingularity of defference of two oblique projectors[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1999, 213(2): 390 - 395.

[6] Koliha J J, Rakocevic V, Straskraba I. The difference and sum of projectors [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2004, 388: 279 - 288.

[7] Jerjy K Baoksalary, Oskar Maria Baksalary. Nonsingularity of linear combinations of idempotent matrices[J]. Linear Algebra and its Applications, 2004, 388: 25 - 29.

[8] Du Hongke, Yao Xiycun, Keng Chunyuan. Invertiblity of linear combinations of two idempotents[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2005, 34(5): 1451 - 1457.

[9] Zhang Fuzhen. Matrix theory: basic results and techniques [M]. New York: Springer, 1999.

[10] Horm R A, Johnson C R. Matrix analysis [M]. New York: Cambridge University Press, 1985.

[11] Marvin Marcus, Henryk Minc. A survey of matrix theory and matrix inequalities [M]. New York: Dover Publications Inc, 1992.

[12] Vyacheslav Rabanovich. Every matrix is a linear combination of three idempotents [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2004, 390: 137 - 143.

The Researches on the Zero Matrices and Identity Matrices for Linear Expression of Idempotent Matrices

YANG Zhong-peng[1], LIAN Han-sheng[1,2]

(1. Department of Mathematics, Putian University, Putian 351100, China;

2. Department of Mathematics, Dalian University of Science and Technology, Dalian 471006, China)

Abstract: This paper studied all the situations that the zero matrix and identity can be denoted by the linear combination of three nonzero idempotent matrices, which are not different from each other and the product of any two matrices is commutative. The method is different from previous literatures. Starting from the existence and structure of all the nonzero solutions for the system of linear equations, the complete resolve for the question is proposed. Specially, when the three matrices are linearly independent, under the permutation similarity, the identity is only denoted by the three ways of the combined coefficients with $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$ and $\frac{1}{2}(1,1,1)$.

Key words: idempotent matrix; linear combination; zero matrix; identity matrix; all-nonzero solution; basis matrices