doi:10.6043/j.issn.0438-0479.202003008

# 40 阶群和 56 阶群的同构分类

李德乐[1],曹慧芹[2*]

(1.福建水利电力职业技术学院公共基础部,福建 永安 366000;2.厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005)

**摘要**:设 $G$ 是 40(即 $2^3 \cdot 5$)阶群,$P \in \mathrm{Syl}_2(G)$,$Q \in \mathrm{Syl}_5(G)$,本文运用王慧群等的相关结果,以及 Sylow 定理对 $G$ 进行了完全分类,证明了 $G$ 共有 14 种同构类型:1) 若 $P \lhd G$,则 $G$ 有 5 种同构类型;2) 若 $P \ntriangleleft G$,则 $G$ 有 9 种同构类型.进而,同理构造了 56 阶群的 13 种同构类型.

**关键词**:有限群;同构分类;生成关系;40 阶;56 阶

**中图分类号**:O 152.7 **文献标志码**:A **文章编号**:0438-0479(2021)01-0058-05

设 $G$ 是 40 阶群,即是 $2^3 \times 5$ 阶群.张远达[1]和徐明曜[2]已经分析了 40 阶群的构造,但是群的构造比较抽象[1,3],缺乏具体构造方法.本文将继续沿着文献[4]的思路,运用文献[5]的方法,利用 Sylow 定理,构造 $G$ 的 14 种同构类型的群(同构意义下,同构群视为一类群).

对于 40 阶群,根据 Sylow 定理,容易看出 Sylow 5-子群是正规子群.本文将证明如下定理:

**定理 1** 设 $G$ 是 40 阶群,$P \in \mathrm{Syl}_2(G)$,$Q \in \mathrm{Syl}_5(G)$.$G$ 有 14 种同构类型:(i) $P \lhd G$,则 $G$ 有 5 种同构类型,见表 1 中序号 1~5 所对应的群;(ii) $P \ntriangleleft G$,则 $G$ 有 9 种同构类型,见表 1 中序号6~14 所对应的群.进而应用定理 1 的方法同理构造了 13 种 56 阶群的同构类型.

## 1 预备知识

在证明定理 1 之前需要下面一些基本结论:

**引理 1** 设 $N,H$ 为有限群,$(|H|,|N|)=1$,记 $\Omega=\mathrm{Hom}(H,\mathrm{Aut}(N))$ 为 $H$ 在 $N$ 上所有作用构成的集合,$\Gamma=\mathrm{Aut}(N)\times\mathrm{Aut}(H)$ 可以自然地作用在 $\Omega$ 上.对于两个群作用 $\varphi$ 和 $\psi: H\to\mathrm{Aut}(N)$,设 $G_\varphi=N\rtimes_\varphi H$ 和 $G_\psi=N\rtimes_\psi H$ 是对应的两个半直积,则 $G_\varphi\cong G_\psi$ 当且仅当 $\varphi$ 和 $\psi$ 属于同一个 $\Gamma$-轨道.

**证明** 参见文献[5]中定理 1 的证明.

**推论 1** 在引理 1 的条件和符号下,所有可能的半直积同构类个数恰好等于 $\Omega$ 的 $\Gamma$-轨道个数.

**证明** 参见文献[5]中推论 1 的证明.

**引理 2(Sylow 定理)** 设 $G$ 是有限群,$p$ 是素数且 $p^n \parallel |G|$(即 $p^n \mid |G|$ 但 $p^{n+1} \nmid |G|$),则

(i) $G$ 必有 $p^n$ 阶子群(称为 $G$ 的 Sylow$p$-子群).

(ii) $G$ 的任意 Sylow$p$-子群皆在 $G$ 中共轭.

(iii) $G$ 的任意 Sylow$p$-子群的个数 $n_p$ 是 $G$ 的因子,且 $n_p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$.

**证明** 具体参考文献[2]证明.

## 2 定理 1 的证明

设 $G$ 是 $40=2^3\times 5$ 阶群,则 $G$ 必是可解群.设 $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$,$Q \in \mathrm{Syl}_5(G)$,根据 Sylow 定理,可得 $Q \lhd G$.下面只考虑 $P \lhd G$ 或 $P \ntriangleleft G$ 两种情况.$P$ 同构于 8 阶群的 5 种不同类型:

(i) 循环群 $C_8$,(ii) 交换群 $C_{4\times 2}$,即(4,2)-型交换群,(iii) 初等交换群 $K_8$,(iv) 二面体群 $D_8$,(v) 四元数群 $Q_8$,且 $Q=C_5$ 是 5 阶循环群.

**情形 1**:当 $P \lhd G$,$Q \lhd G$ 时,则 $G$ 有 5 种同构类型:

1) $G=\langle a,b \mid a^5=b^8=1,[a,b]=1\rangle$(循环群),

**收稿日期**:2020-03-06 **录用日期**:2020-09-25

**基金项目**:国家自然科学基金(12071386);福建省中青年教师教育科研项目(JA15796)

**通信作者**:caohuiqin66@163.com

**引文格式**:李德乐,曹慧芹.40 阶群和 56 阶群的同构分类[J].厦门大学学报(自然科学版),2021,60(1):58-62.

**Citation**:LI D L,CAO H Q. Isomorphic classification of order 40 and order 56 groups[J]. J Xiamen Univ Nat Sci,2021,60(1):58-62. (in Chinese)

表1　40阶群的生成关系表

Tab.1　Generating relation table of groups of order 40

| 序号 | 生成关系 | 同构 |
|---|---|---|
| 1 | $G=\langle a,b\mid a^5=b^8=1,[a,b]=1\rangle$ | $C_{40}$ |
| 2 | $G=\langle a,b,c\mid a^5=b^4=c^2=1,[a,b]=[b,c]=[c,a]=1\rangle$ | $C_{10}\times C_4$ |
| 3 | $G=\langle a,b,c,d\mid a^5=b^2=c^2=d^2=1,[a,b]=[b,c]=[c,d]=[d,a]=1\rangle$ | $C_5\times K_8$ |
| 4 | $G=\langle a,b,c\mid a^5=b^4=c^2=1,bc=cb^{-1},[a,b]=[a,c]=1\rangle$ | $C_5\times D_8$ |
| 5 | $G=\langle a,b,c\mid a^5=b^4=1,b^2=c^2,bc=cb^{-1},[a,b]=[a,c]=1\rangle$ | $C_5\times Q_8$ |
| 6 | $G=\langle a,b\mid a^5=b^8=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$ | $C_5\rtimes C_8$($C_8$通过取逆元作用在$C_5$) |
| 7 | $G=\langle a,b\mid a^5=b^8=1,b^{-1}ab=a^2\rangle$ | $C_5\rtimes C_8$($C_8$通过取平方元作用在$C_5$) |
| 8 | $G=\langle a,b,c\mid a^5=b^4=c^2=1,bc=cb,b^{-1}ab=a^2,ac=ca\rangle$ | $GA(1,5)\times C_2$ |
| 9 | $G=\langle a,b,c\mid a^5=b^4=c^2=1,bc=cb,c^{-1}ac=a^{-1},ab=ba\rangle$ | $D_{10}\times C_4$ |
| 10 | $G=\langle ab,bc\mid a^5=b^4=c^2=1,ac=ca,b^{-1}ab=a^{-1},bc=cb\rangle$ | $Q_{40}$ |
| 11 | $G=\langle a,b,c,d\mid a^5=b^2=c^2=d^2=1,[b,c]=[c,d]=[d,b]=1,b^{-1}ab=a^{-1},[a,c]=[a,d]=1\rangle$ | $D_{10}\times K_4$ |
| 12 | $G=\langle ab,c\mid a^5=b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1},ab=ba,c^{-1}ac=a^{-1}\rangle$ | $D_{40}$ |
| 13 | $G=\langle a,b,c\mid a^5=b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1},b^{-1}ab=a^{-1},ca=ac\rangle$ | |
| 14 | $G=\langle ab^2,c,b^2\mid a^5=b^4=1,b^2=c^2,c^{-1}bc=b^{-1},ab=ba,c^{-1}ac=a^{-1}\rangle$ | $Q_{20}\times C_2$ |

注:其中$C_n$表示$n$阶循环群,$K_n$表示$n$阶初等交换2-群,$D_n$表示$n$阶二面体群,$Q_n$(其中$n\geqslant 8$)表示$n$阶广义四元数群,$GA(1,5)=\langle a,b|a^5=b^4=1,b^{-1}ab=a^2\rangle$表示5元域上的一维的一般仿射群.

2) $G=\langle a,b,c\mid a^5=b^4=c^2=1,[a,b]=[b,c]=[c,a]=1\rangle$(交换群),

3) $G=\langle a,b,c,d\mid a^5=b^2=c^2=d^2=1,[a,b]=[b,c]=[c,d]=[d,a]=1\rangle$(交换群),

4) $G=\langle a,b,c\mid a^5=b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1},[a,b]=[a,c]=1\rangle(C_5\times D_8)$,

5) $G=\langle a,b,c\mid a^5=b^4=1,b^2=c^2,bc=cb^{-1},[a,b]=[a,c]=1\rangle(C_5\times Q_8)$,

其中$a\in Q,b$、$c$、$d\in P$.

$G$的结构由$P$完全决定.令$Q=\langle a\rangle=C_5$,$P$是8阶群,有5种不同的结构.当$P$依次取遍8阶群5种不同的结构,相应地可得到$G$的结构,类型1),2),3)是交换群,类型4),5)是非交换群.

**情形2**:当$P\ntriangleleft G,Q\triangleleft G$时,则$G$有9种同构类型,即

6) $G=\langle a,b\mid a^5=b^8=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$,

7) $G=\langle a,b\mid a^5=b^8=1,b^{-1}ab=a^2\rangle$,

8) $G=\langle a,b,c\mid a^5=b^4=c^2=1,bc=cb,b^{-1}ab=a^2,ac=ca\rangle$,

9) $G=\langle a,b,c\mid a^5=b^4=c^2=1,bc=cb,c^{-1}ac=a^{-1},ab=ba\rangle$,

10) $G=\langle ab,bc\mid a^5=b^4=c^2=1,ac=ca,b^{-1}ab=a^{-1},bc=cb\rangle$,

11) $G=\langle a,b,c,d\mid a^5=b^2=c^2=d^2=1,[b,c]=[c,d]=[d,b]=1,b^{-1}ab=a^{-1},[a,c]=[a,d]=1\rangle$,

12) $G=\langle ab,c\mid a^5=b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1},ab=ba,c^{-1}ac=a^{-1}\rangle$,

13) $G=\langle a,b,c\mid a^5=b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1},b^{-1}ab=a^{-1},ca=ac\rangle$,

14) $G=\langle ab^2,c,b^2\mid a^5=b^4=1,b^2=c^2,c^{-1}bc=b^{-1},ab=ba,c^{-1}ac=a^{-1}\rangle$.

因为$Q\triangleleft G$,根据$N/C$定理可知$G/C_G(Q)\leqslant\mathrm{Aut}(Q)\cong C_4$,又$Q\triangleleft C_G(Q)$,于是$(G/Q)/(C_G(Q)/Q)\cong P/C_G(Q)\cap P\leqslant C_4$,所以$P$在$Q$上作用核是2,4或8阶群.

考虑同态$\phi:P\rightarrow\mathrm{Aut}(Q)$,设$P$在$Q$上作用核$K=C_G(Q)\cap P$,当$K$是8阶群时,得到$G$是幂零群,即$P\triangleleft G,Q\triangleleft G$,回归到情形1讨论.故只考虑核$K$是2或4阶群的情形.根据引理1和推论1,可知作用核是循环群(2阶或4阶)的所有作用都在一个$\Gamma$-轨道里,作用核是非循环群(4阶)的所有作用也都在一个$\Gamma$-轨道里,其中$\Gamma=\mathrm{Aut}(P)\times\mathrm{Aut}(Q)$,因而上述作用最多是3个轨道.设$P$中元素作用在$Q$上的非平凡作用就是取平方、取三次方、取逆(即取四次方).下面围绕$P$同构于8阶群的5种不同类型进行讨论:

(i) 当 $P=\langle b \mid b^8=1\rangle$ 是循环群时,因为 $K$ 的阶为 2 或 4,所以 $K$ 的生成元只有两种不同情况:$\langle b^2\rangle$,$\langle b^4\rangle$.

当 $K=\langle b^2\rangle$ 时,$K$ 是 4 阶循环群,此时 $b(b\in P$ 且 $b\notin K)$ 诱导 $Q$ 的自同构是 2 阶,即 $a^b=b^{-1}ab\neq a$ 且 $a^{b^2}=a$. 设 $a^r=a^b(2\leqslant r\leqslant 4)$,则 $a^{b^2}=(a^r)^b=a^{r^2}=a$,即 $r^2\equiv 1(\mathrm{mod}5)$,解得 $r=4$,因此 $a^b=a^4=a^{-1}$. $P$ 中元素 $b$ 导出 $Q$ 的求逆自同构满足 $a^b=b^{-1}ab=a^{-1}$,得到上述结构 6).

当 $K=\langle b^4\rangle$ 时,$K$ 是 2 阶群,此时 $b(b\in P$ 且 $b\notin K)$ 诱导 $Q$ 的自同构是 4 阶,即 $a^b=b^{-1}ab\neq a$,且 $a^{b^4}=a$. 设 $a^r=a^b(2\leqslant r\leqslant 4)$,则 $a^{b^2}=(a^r)^b=a^{r^2}\neq a$,$a^{b^3}=a^{r^3}\neq a$,$a^{b^4}=a^{r^4}=a$ 可得 $r^4\equiv 1(\mathrm{mod}5)$,解得 $r=2,3$. 即

$$\begin{cases}a^b=b^{-1}ab=a^2,\\ a^b=b^{-1}ab=a^3.\end{cases}$$

当 $b$ 在 $a$ 上的作用是取平方时,

$$a^b=a^2,(a^2)^b=a^4,(a^4)^b=a^8=a^3,(a^3)^b=a^6=a.$$

当 $b$ 在 $a$ 上的作用是取三次方时,$a^b=a^3,(a^3)^b=a^9=a^4,(a^4)^b=a^{12}=a^2,(a^2)^b=a^6=a$.

由此可见取三次方与取平方互为逆作用,二者作用效果实质相同,所以只需取平方和三次方两者中的一种情形即可. 当 $K=\langle b^4\rangle$ 时,不妨令 $b$ 取求平方自同构,即 $b^{-1}ab=a^2$,从而得到上述结构 7).

综上所述,此时 $G$ 有两种不同类型的群:

$$G=\begin{cases}\langle a,b \mid a^5=b^8=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle,\\ \langle a,b \mid a^5=b^8=1,b^{-1}ab=a^2\rangle.\end{cases}$$

根据(i)中计算可知:当 $K$ 是 2 阶群时,则元素 $b(b\in P$ 且 $b\notin K)$ 中诱导 $Q$ 的自同构是 4 阶,此时 $b$ 诱导 $Q$ 取平方自同构;当 $K$ 是 4 阶群时,则 $b(b\in P$ 且 $b\notin K)$ 中诱导 $Q$ 的自同构是 2 阶,此时 $b$ 诱导 $Q$ 取逆自同构.

(ii) 当 $P=\langle b,c \mid b^4=c^2=1,bc=cb\rangle$ 是(4,2)-型交换群时,因为 $K$ 的阶为 2 或 4,所以 $K$ 的生成元只有 3 种不同情况:$\langle b\rangle$,$\langle c\rangle$,$\langle b^2,c\rangle$.

当 $K=\langle c\rangle$ 时,$K$ 是 2 阶群,得到元素 $b(b\in P$ 且 $b\notin K)$ 引起 $Q$ 自同构为取平方,即 $b^{-1}ab=a^2$. 记 $GA(1,5)=\langle a,b \mid a^5=b^4=1,b^{-1}ab=a^2\rangle$ 为 5 元域上的一维的一般仿射群,可得:$G=GA(1,5)\times C_2$,从而得到上述结构 8).

当 $K=\langle b\rangle$ 时,$K$ 是 4 阶循环群,由元素 $c(c\in P$ 且 $c\notin K)$ 引起求逆自同构,于是有 $c^{-1}ac=a^{-1}$,即 $G=D_{10}\times C_4$,得到上述结构 9).

当 $K=\langle b^2,c\rangle$ 时,$K$ 是 4 阶初等交换群. 根据元素 $b\in P,b\notin K$ 但是 $b^2\in K$,可得 $a^b\neq a$ 且 $a^{b^2}=a$. 设 $a^r=a^b(2\leqslant r\leqslant 4)$,则 $a^{b^2}=(a^r)^b=a^{r^2}=a$,即 $r^2\equiv 1(\mathrm{mod}5)$,解得 $r=4$,因此 $a^b=a^4=a^{-1}$,所以此时 $P$ 中元素 $b$ 导出 $Q$ 的求逆自同构满足 $a^b=b^{-1}ab=a^{-1}$. 令 $x=ab,y=bc,G=\langle x,y \mid x^{20}=1,x^{10}=y^2,y^{-1}xy=x^{-1}\rangle=Q_{40}$,得到上述结构 10).

综上所述,此时 $G$ 有 3 种不同类型的群:

$$G=\begin{cases}\langle a,b,c \mid a^5=b^4=c^2=1,bc=cb,\\ \quad b^{-1}ab=a^2,ac=ca\rangle=GA(1,5)\times C_2,\\ \langle a,b,c \mid a^5=b^4=c^2=1,bc=cb,\\ \quad c^{-1}ac=a^{-1},ab=ba\rangle=D_{10}\times C_4,\\ \langle ab,bc \mid a^5=b^4=c^2=1,ac=ca,\\ \quad b^{-1}ab=a^{-1},bc=cb\rangle=Q_{40}.\end{cases}$$

根据(ii)中计算,可得当 $K$ 是 4 阶初等交换群,此时元素 $b\in P,b\notin K$ 且 $b^2\in K$,并且 $b$ 诱导 $Q$ 的求逆自同构.

(iii) 当 $P=\langle b,c,d \mid b^2=c^2=d^2=1,[b,c]=[c,d]=[d,b]=1\rangle$ 是初等交换群时,由于 $P$ 中无 4 阶元,因此同态映射 $P\rightarrow\mathrm{Aut}(Q)\cong C_4$ 不可能是满同态,所以 $K$ 的生成元只有一种情况:$\langle c,d\rangle$. 当 $K=\langle c,d\rangle$ 时,$K$ 是 4 阶初等交换群,此时元素 $b(b\in P$ 且 $b\notin K)$ 诱导 $Q$ 的自同构是 2 阶,即 $a^b=b^{-1}ab\neq a$ 且 $a^{b^2}=a$. 设 $a^r=a^b(2\leqslant r\leqslant 4)$,则 $a^{b^2}=(a^r)^b=a^{r^2}=a$,即 $r^2\equiv 1(\mathrm{mod}5)$,解得 $r=4$,因此 $a^b=a^4=a^{-1}$,所以 $P$ 中元素 $b$ 导出 $Q$ 的求逆自同构满足 $a^b=b^{-1}ab=a^{-1}$,于是有 $b^{-1}ab=a^{-1}$,即

$$G=\langle a,b,c,d \mid a^5=b^2=c^2=d^2=1,[b,c]=[c,d]=[d,b]=1,b^{-1}ab=a^{-1},[a,c]=[a,d]=1\rangle=D_{10}\times K_4,$$

从而得到上述结构 11).

(iv) 当 $P=\langle b,c \mid b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1}\rangle$ 是二面体群结构时,由于同态映射 $P\rightarrow\mathrm{Aut}(Q)\cong C_4$ 不可能是满同态,否则 $C_4\cong P/Z(P)$,得到 $P$ 是交换群,与 $P$ 是二面体群相矛盾,故 $K$ 的生成元可有两种不同情况:$\langle b\rangle$,$\langle b^2,c\rangle$.

当 $K=\langle b\rangle$ 时,$K$ 是 4 阶循环群,由元素 $c(c\in P$ 且 $c\notin K)$ 引起求逆自同构,于是有 $c^{-1}ac=a^{-1}$,令 $x=ab,y=c$,则 $G=\langle x,y \mid x^{20}=y^2=1,y^{-1}xy=x^{-1}\rangle=D_{40}$,得到上述结构 12).

当 $K=\langle b^2,c\rangle$ 时,$K$ 是 4 阶初等交换群,由 $b$ 引起求逆自同构,于是有 $b^{-1}ab=a^{-1}$,得到上述结构 13).

综上所述,此时 $G$ 有两种不同类型的群:

$$G=\begin{cases}\langle ab,c \mid a^5=b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1},\\ \quad ab=ba,c^{-1}ac=a^{-1}\rangle=D_{40},\\ \langle a,b,c \mid a^5=b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1},\\ \quad b^{-1}ab=a^{-1},ca=ac\rangle.\end{cases}$$

(v) 当 $P=\langle b,c \mid b^4=1,b^2=c^2,c^{-1}bc=b^{-1}\rangle$ 是广义四元数群时,$P$ 中有唯一的 2 阶元,所以核 $K$ 不能是 4 阶初等交换群.由于同态映射 $P\to \mathrm{Aut}(Q)\cong C_4$ 不可能是满同态,否则 $C_4\cong P/Z(P)$,得到 $P$ 是交换群,与 $P$ 是四元数群相矛盾,故 $K$ 的生成元只有一种情况:$\langle b\rangle$. 当 $K=\langle b\rangle$ 时,$K$ 必是 4 阶循环群,由 $c(c\in P$ 且 $c\notin K)$ 引起 $Q$ 求逆自同构,于是有 $c^{-1}ac=a^{-1}$. 令 $x=ab^2,y=c,z=b^2$,则 $G=\langle x,y,z \mid x^{10}=y^2=z^2=1,x^5=y^2,y^{-1}xy=x^{-1},zx=xz,zy=yz\rangle=Q_{20}\times C_2$,得到 $G=\langle ab^2,c,b^2 \mid a^5=b^4=1,b^2=c^2,c^{-1}bc=b^{-1},ab=ba,c^{-1}ac=a^{-1}\rangle=Q_{20}\times C_2$,

即上述结构 14). 定理 1 证毕.

## 3 应　用

利用上述的理论,很容易构造 56 群的 13 种同构类型.由 Sylow 定理可知:56 阶群不可能是单群.设 $G$ 是 56 阶群,即是 $2^3\times 7$ 阶群,也是可解群,并设 $P\in \mathrm{Syl}_2(G),Q\in \mathrm{Syl}_7(G)$,要分成(i) $P\lhd G,Q\lhd G$;(ii) $P\ntriangleleft G,Q\lhd G$;(iii) $P\lhd G,Q\ntriangleleft G$ 3 种情况加以讨论.设 $Q=\langle a\rangle=C_7$.

**情形 1**:当 $P\lhd G,Q\lhd G$ 时,则 $G$ 有 5 种同构类型:

15) $G=\langle a,b \mid a^7=b^8=1,[a,b]=1\rangle$(循环群),

16) $G=\langle a,b,c \mid a^7=b^4=c^2=1,[a,b]=[b,c]=[c,a]=1\rangle$(交换群),

17) $G=\langle a,b,c,d \mid a^7=b^2=c^2=d^2=1,[a,b]=[b,c]=[c,d]=[d,a]=1\rangle$(交换群),

18) $G=\langle a,b,c \mid a^7=b^4=c^2=1,bc=cb^{-1},[a,b]=[a,c]=1\rangle(C_7\times D_8)$,

19) $G=\langle a,b,c \mid a^7=b^4=1,b^2=c^2,bc=cb^{-1},[a,b]=[a,c]=1\rangle(C_7\times Q_8)$,

因为 $P\lhd G,Q\lhd G$,$G$ 的结构由 $P$ 完全决定.$P$ 是 8 阶群,有 5 种不同的结构.当 $P$ 依次取遍 8 阶群 5 种不同的结构,相应地可得到 $G$ 的结构,类型 15),16),17)是交换群,类型 18),19)是非交换群.

**情形 2**:当 $P\ntriangleleft G,Q\lhd G$ 时,则 $G$ 有 7 种不同构类型:

20) $G=\langle a,b \mid a^7=b^8=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle=C_7\rtimes C_8$,

21) $G=\langle ab,bc \mid a^7=b^4=c^2=1,bc=cb,ba=ab,c^{-1}ac=a^{-1}\rangle=Q_{56}$,

22) $G=\langle a,b,c \mid a^7=b^4=c^2=1,bc=cb,b^{-1}ab=a^{-1},ca=ac\rangle=D_{28}\times C_2$,

23) $G=\langle a,b,c,d \mid a^7=b^2=c^2=d^2=1,[b,c]=[c,d]=[d,b]=1,b^{-1}ab=a^{-1},[a,c]=[a,d]=1\rangle=D_{14}\times K_4$,

24) $G=\langle ab,c \mid a^7=b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1},ba=ab,c^{-1}ac=a^{-1}\rangle=D_{56}$,

25) $G=\langle a,b,c \mid a^7=b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1},b^{-1}ab=a,ca=ac\rangle$,

26) $G=\langle ab^2,c,b^2 \mid a^7=b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1},ab=ba,c^{-1}ac=a\rangle$.

因为 $Q\lhd G$,根据 $N/C$ 定理可知:$G/C_G(Q)\leqslant \mathrm{Aut}(Q)=\mathrm{Aut}(C_7)\cong C_6$,考虑到 $P$ 作用 $Q$ 上的是非平凡作用,因为 $Q\lhd C_G(Q)$,所以 $P$ 在 $Q$ 上作用核只能是 4 阶群.设 $P$ 在 $Q$ 上作用核 $K=C_G(Q)\cap P$,根据引理 1 和推论 1,可知要构造 $G$ 的关系就是确定作用核 $K$ 和 $P$ 中诱导 $Q$ 的求逆自同构的元素.

(a) 当 $P=\langle b \mid b^8=1\rangle$ 是循环群时,则对应 4 阶群唯一,即 $K=\langle b^2\rangle$,且为 4 阶循环群.因为 $b(b\in P$ 且 $b\notin K)$ 诱导 $Q$ 的自同构是 2 阶,所以 $a^b=b^{-1}ab\neq a$ 且 $a^{b^2}=a$. 设 $Q=\langle a \mid a^7=1\rangle$,由于 $a^b=b^{-1}ab\neq a$,则 $a^{b^2}=a$,设 $a^r=a^b(2\leqslant r\leqslant 6)$,则 $a^{b^2}=(a^r)^b=a^{r^2}=a$,即 $r^2\equiv 1(\mathrm{mod}7)$,解得:$r=6$,即 $a^b=a^6=a^{-1}$. $P$ 中元素 $b$ 导出 $Q$ 的求逆自同构,即 $a^b=b^{-1}ab=a^{-1}$,得到上述结构 20).由此可知:当 $K$ 是 4 阶群时,则 $P$ 中元诱导 $Q$ 的自同构是 2 阶,此时 $P$ 中元诱导取逆自同构,即 $G=\langle a,b \mid a^7=b^8=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle=C_7\rtimes C_8$.

(b) 当 $P=\langle b,c \mid b^4=c^2=1,bc=cb\rangle$ 是(4,2)型交换群时,因为 $K$ 的阶为 4,所以 $K$ 的生成元只有两种不同情况:$\langle b\rangle,\langle b^2,c\rangle$.

当 $K=\langle b\rangle$ 时,$K$ 是 4 阶循环群.根据 $c(c\in P$ 且 $c\notin K)$ 诱导 $Q$ 的自同构是 2 阶,即 $c(c\in P$ 且 $c\notin K)$ 引起求逆自同构,于是有 $c^{-1}ac=a^{-1}$. 令 $x=ab,y=bc$,则 $G=\langle x,y \mid x^{28}=1,x^{14}=y^2,y^{-1}xy=x^{-1}\rangle=Q_{56}$,得到上述结构 21).

当 $K=\langle b^2,c\rangle$ 时,$K$ 是 4 阶初等交换群.因为 $b\in P,b\notin K$ 且 $b^2\in K$,所以 $b$ 引起求逆自同构,可取 $b^{-1}ab=a^{-1}$,即 $G=D_{28}\times C_2$,得到上述结构 22).

综上所述,此时 $G$ 有两种不同类型的群:

$$G=\begin{cases}\langle ab,bc \mid a^7=b^4=c^2=1,bc=cb,\\ \quad ba=ab,c^{-1}ac=a^{-1}\rangle=Q_{56},\\ \langle a,b,c \mid a^7=b^4=c^2=1,bc=cb,\\ \quad b^{-1}ab=a^{-1},ca=ac\rangle=D_{28}\times C_2.\end{cases}$$

(c) 当 $P=\langle b,c,d \mid b^2=c^2=d^2=1,[b,c]=[c,d]=[d,b]=1\rangle$ 是初等交换群时,因为 $K$ 是 4 阶初等交换群,则 $K=\langle c,d\rangle$,此时元素 $b(b\in P$ 且 $b\notin K)$ 诱导 $Q$ 的自同构是 2 阶,即 $a^b=b^{-1}ab\neq a$ 且 $a^{b^2}=a$. 设 $a^r=a^b(2\leqslant r\leqslant 6)$,则 $a^{b^2}=(a^r)^b=a^{r^2}=a$,即 $r^2\equiv 1(\mathrm{mod}7)$,解得 $r=6$,即 $a^b=a^6=a^{-1}$. $P$ 中元素 $b$ 导出 $Q$ 的求逆自同构,即 $a^b=b^{-1}ab=a^{-1}$,即 $G=\langle a,b,c,d \mid a^7=b^2=c^2=d^2=1,[b,c]=[c,d]=[d,b]=1,b^{-1}ab=a^{-1},[a,c]=[a,d]=1\rangle=D_{14}\times K_4$,

得到上述结构 23).

(d) 当 $P=\langle b,c \mid b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1}\rangle$ 是二面体群结构时,$K$ 的生成元可有两种不同情况:$\langle b\rangle$,$\langle b^2,c\rangle$.

当 $K=\langle b\rangle$ 时,$K$ 是 4 阶循环群. 元素 $c(c\in P$ 且 $c\notin K)$ 引起 $Q$ 求逆自同构,于是有 $c^{-1}ac=a^{-1}$. 令 $x=ab,y=c$,则 $G=\langle x,y \mid x^{28}=y^2=1,y^{-1}xy=x^{-1}\rangle=D_{56}$,得到上述结构 24).

当 $K=\langle b^2,c\rangle$ 时,$K$ 是 4 阶初等交换群. 因为 $b\in P,b\notin K$ 且 $b^2\in K$,所以由 $b$ 引起求逆自同构,于是有 $b^{-1}ab=a^{-1}$,得到上述结构 25).

综上所述,此时 $G$ 有两种不同类型的群:

$$G=\begin{cases}\langle ab,c \mid a^7=b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1},\\ \quad ba=ab,c^{-1}ac=a^{-1}\rangle=D_{56},\\ \langle a,b,c \mid a^7=b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1},\\ \quad b^{-1}ab=a,ca=ac\rangle.\end{cases}$$

(e) 当 $P=\langle b,c \mid b^4=1,b^2=c^2,c^{-1}bc=b^{-1}\rangle$ 是四元数群时,$P$ 中有唯一的 2 阶元,因此 $K$ 不能是 4 阶初等交换群,此时 $K$ 的生成元只有一种情况:$\langle b\rangle$. 即 $K=\langle b\rangle$ 必是 4 阶循环群,由 $c(c\in P$ 且 $c\notin K)$ 引起 $Q$ 求逆自同构,于是有 $c^{-1}ac=a^{-1}$. 令 $x=ab^2,y=c,z=b^2$,则 $G=\langle x,y,z \mid x^{14}=y^2=z^2=1,x^7=y^2,y^{-1}xy=x^{-1},zx=xz,zy=yz\rangle=Q_{28}\times C_2$,得到 $G=\langle ab^2,c,b^2 \mid a^7=b^4=1,b^2=c^2,c^{-1}bc=b^{-1},ab=ba,c^{-1}ac=a^{-1}\rangle=Q_{28}\times C_2$,即上述结构 26).

**情形 3**:当 $P\lhd G,Q\ntriangleleft G$ 时,则 $G$ 有一种不同构类型:

27) $G=\langle a,b,c,d \mid a^7=b^2=c^2=d^2=1,[b,c]=[c,d]=[d,b]=1,a^{-1}ba=d^{-1},a^{-1}ca=bd^{-1},a^{-1}da=c\rangle$.

由于 $P\lhd G,Q\ntriangleleft G$ 时,可知 $G=P\rtimes Q$. 因 $G$ 是非幂零群,$Q$ 是 7 阶群,只能是忠实作用,故在 8 阶群有 5 种不同类型中,只能取初等交换群 $K_8$,得到结构 27)(详见文献[6]定理 1 和文献[1]).

## 参考文献:


[1] 张远达. 有限群构造(上下册)[M]. 北京:科学出版社,1982.

[2] 徐明曜. 有限群导引(上册)[M]. 北京:科学出版社,1999.

[3] 陈松良,欧阳建新,李惊雷. $pq^3$ 阶群的完全分类[J]. 海南师范大学学报,2010,23(3):253-255.

[4] 李德乐. 低阶群的特征标表[D]. 厦门:厦门大学,2008.

[5] 王慧群,曾吉文. 关于半直积同构的一点注记[J]. 厦门大学学报(自然科学版),2007,46(2):149-152.

[6] 黄本文. $2^3p(p=3,7)$阶群构造的简化证明[J]. 贵州大学学报(自然科学版),1991,8(5):85-89.


# Isomorphic classification of order 40 and order 56 groups


LI Dele[1], CAO Huiqin[2*]

(1. Fujian College of Water Conservancy and Electric Power, Yongan 366000, China;

2. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)



**Abstract**: Let $G$ be finite groups of order 40. Let $P$ be Sylow 2-subroups and $Q$ be a Sylow 5-subroup. Using the corresponding conclusions of Wang H Q's and Sylow theorem we have completely classified and showed that $G$ consists of 14 non-isomorphic types. Here, we have provided two proofs, namely 1) If $P$ is normal, $G$ consists of 5 non-isomorphic types; and 2) If $P$ is non-normal, $G$ consists of 9 non-isomorphic types. Finally, we use the similar methods to completely classify the finite groups of order 56.



**Keywords**: finite groups; isomorphic classification; generated relations; 40 order; 56 order