

空间分布阶时间分数阶扩散方程的高精度算法

龚珊珊¹, 陈景华^{1,2*}, 刘欣然¹

(1. 集美大学理学院, 福建 厦门 361021; 2. 集美大学理学院数字福建大数据建模与智能计算研究所, 福建 厦门 361021)

摘要: [目的] 目前空间分布阶方程的求解多为时间整数阶, 且空间的收敛阶大多为二阶和三阶, 很难达到四阶, 为了提高 Riesz 空间分布阶 Caputo 时间分数阶扩散方程求解过程中的空间收敛精度, 提出一种高阶的有限差分法. [方法] 基于数值解法对 Caputo 时间分数阶导数采用 L1 插值逼近离散; 分布阶导数利用复化 Simpson 求积公式, 将分布阶微分方程转化为一个多项 Riesz 空间分数阶导数的微分方程; 从而构造方程的高阶数值离散格式, 并运用矩阵分析的方法证明该数值格式具有稳定性和收敛性. [结果] 在求解该分布阶微分方程中, 该数值方法使得空间和分布阶的收敛阶都达到了四阶, 时间上的收敛阶达到了 $2-\beta$ 阶. [结论] 本文构造出的 Riesz 空间分布阶 Caputo 时间分数阶扩散方程的高阶差分格式, 可使得空间上的收敛阶达到四阶, 适用于高精度求解场景.

关键词: 分布阶; 有限差分; 稳定性; 收敛性

中图分类号: O 241.82

文献标志码: A

文章编号: 0438-0479(2024)02-0321-08

High precision algorithm for spatial distributed-order time fractional diffusion equation

GONG Shanshan¹, CHEN Jinghua^{1,2*}, LIU Xinran¹

(1. School of Sciences, Jimei University, Xiamen 361021, China; 2. Digital Fujian Big Data Modeling and Intelligent Computing Institute, Xiamen 361021, China)

Abstract: [Objective] Effectively, distributed-order differential equations can describe anomalous diffusion phenomena in multifractal media. Regarding the solution of spatial distributed-order equations, we find that the integer order is mostly studied in the time domain, whereas the spatial convergence order is mostly second and third orders, resulting in difficulties to achieve fourth order. To improve the spatial convergence accuracy in solving the Riesz spatial distributed-order Caputo time fractional diffusion equation, herein we propose a high-order finite difference method. [Methods] By using the composite Simpson quadrature formula, the distributed differential equation is transformed into a multi-term fractional derivative differential equation in Riesz space, and the fractional derivative of Caputo time is approximated by L1 interpolation. Next, the high-order numerical discrete scheme of the equation is constructed and the stability and convergence of the scheme are proved by the matrix analysis. Finally, a numerical example is given to demonstrate the stability and convergence of the scheme. [Results] In solving this distributed-order differential equation, our numerical method achieves a spatial convergence order of four for both spatial and distributed orders, and a time convergence order of $2-\beta$. [Conclusions] We construct a high-order difference format for the Riesz spatial distributed-order Caputo time fractional diffusion equation and achieve a spatial convergence order of four. Because distributed-order equations with spatial convergence orders have been studied mostly at the second or third order, the effectiveness of the proposed method is observed.

收稿日期: 2022-03-20 录用日期: 2022-07-05

基金项目: 福建省自然科学基金 (2022J01338, 2020J01703); 福建省教育厅基金项目 (JAT210231); 集美大学校级基金项目 (ZP2020054, ZP2020062); 集美大学数字福建大数据建模与智能计算研究所开放基金

* 通信作者: cjhddz@163.com

引文格式: 龚珊珊, 陈景华, 刘欣然. 空间分布阶时间分数阶扩散方程的高精度算法[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2024, 63(2): 321-328.

Citation: GONG S S, CHEN J H, LIU X R. High precision algorithm for spatial distributed-order time fractional diffusion equation[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2024, 63(2): 321-328. (in Chinese)



Keywords: distributed-order; the finite difference; stability; convergence

近年来,分数阶微分方程引起了广大学者的关注,实际生活中很多数学模型都可以抽象成分数阶微分方程,分数阶微积分理论作为分形几何和分数维动力学的基础,被证明是模拟许多物理现象的一种强有力的工具.关于分数阶微分方程的理论研究有大量文献^[1-10],但是近年来一些研究者发现一些反常扩散用一般分数阶算子来模拟并不能取得很好的效果.比如非均质多孔和裂隙介质中的溶质迁移试验,由于复杂流体流动的力学性质会随时空尺度变化而发生一定的变化,因此污染物等溶质扩散将产生所谓的多尺度效应,其扩散状态可能在超扩散、次扩散和标准扩散 3 种状态之间转化.对于这种多重分形介质中的反常扩散现象,仅用分数阶微分方程去模拟是不合适的,而分布阶微分方程更能描述这些反常扩散.空间分布阶导数形如 $\int_1^2 p(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial |x|^\alpha} d\alpha$, 在数学上可以看成是分数阶导数在给定范围内关于其阶数的一个积分,空间分布阶导数的一个物理解释可以看成是作用在多维空间尺度上的一个空间积分.

近年来关于时间分布阶微分方程数值方法已有比较多的成果^[11-15],但关于空间分布阶微分方程的研究较少.2017 年 Li 等^[6]提出一种有限体积法求解空间分布阶对流扩散方程,给出了一个时间和空间上均为二阶的数值格式,并证明了该方法的稳定性和有效性.2018 年 Fan 等^[16]提出用非结构网格不规则域的有限元求解二维空间分布阶扩散方程,但该方法的空间收敛阶只达到二阶精度.2020 年,杨莹莹^[17]研究了求解 Riesz 空间分布阶时间分数阶扩散方程的有限体积法,得到空间的三阶精度数值格式,并证明了数值格式的稳定性 and 收敛性.2021 年 Yang 等^[18]研究了一种求解非线性变系数双边空间分布阶扩散方程的新的有限体积方法,建立了空间和时间方向上具有二阶精度的稳定性和收敛性的格式.2021 年,陈景华等^[9]用有限差分法求解 Riesz 空间分布阶扩散方程,但时间仍采用整数阶导数.2022 年 Abdelkawy 等^[19]采用基于混合 Gauss-Lobatto 和 Gauss-Radau Legendre 的高精度配置法求解 Riesz 空间分布阶扩散方程,但所讨论方程在时间方向上为整数阶导数.本文在文献[16-17]的基础上做了一些推广和改进,研究时间 Caputo 分数阶导数,空间 Riesz 分布阶导数的扩散方程,并得到空间的四阶高精度格式.

本文考虑空间分布阶时间分数阶扩散方程^[17]

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\beta u(x,t) = \int_1^2 p(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial |x|^\alpha} d\alpha + f(x,t), & (1) \\ x \in (0,L), t \in (0,T], & (2) \\ u(x,0) = \varphi(x), x \in (0,L), & (3) \\ u(0,t) = 0, u(L,t) = 0, t \in (0,T], & (3) \end{cases}$$

其中: $f(x,t)$ 是源项; $\varphi(x)$ 为已知函数,且 $\varphi(0) = 0, \varphi(L) = 0$; $p(\alpha) \in C^1[1,2]$ 是非负权函数,且满足条件

$$p(\alpha) \geq 0, p(\alpha) \neq 0, \alpha \in (1,2), 0 < \int_1^2 p(\alpha) d\alpha < \infty;$$

${}_0^C D_t^\beta u(x,t)$ 是阶数为 $\beta(0 < \beta < 1)$ 的 Caputo 分数阶导数^[20], 定义为

$${}_0^C D_t^\beta u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} \frac{\partial u(x,s)}{\partial s} ds.$$

其中: $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数, $\int_1^2 p(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial |x|^\alpha} d\alpha$ 称为 Riesz 空间分布阶导数,这里 $\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial |x|^\alpha}$ 是阶数为 α 的 Riesz 分数阶导数,它是左侧 Riemann-Liouville(R-L) 分数阶导数与右侧 R-L 分数阶导数加权和,即为:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial |x|^\alpha} = -\frac{1}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}} [{}_0^R D_x^\alpha u(x,t) + {}_x^R D_L^\alpha u(x,t)],$$

$$1 < \alpha < 2,$$

其中: ${}_0^R D_x^\alpha u(x,t), {}_x^R D_L^\alpha u(x,t)$ 分别表示有限域 $[0,L]$ 上 α 阶的左侧和右侧 R-L 分数阶导数,定义如下:

$${}_0^R D_x^\alpha u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^x \frac{u(s,t)}{(x-s)^{\alpha-1}} ds,$$

$$0 < x < L,$$

$${}_x^R D_L^\alpha u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_x^L \frac{u(s,t)}{(s-x)^{\alpha-1}} ds,$$

$$0 < x < L.$$

1 积分项的离散

引理 1 (复化 Simpson 公式): 设函数 $p(\alpha) \in C^4[1,2]$, 将区间 $[1,2]$ 作 $2J$ 等分, 步长 $\Delta\alpha = \frac{1}{2J}, 2J$ 个小子区间为 $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, ($k = 0, 1, 2, \dots, 2J-1$), 分点坐标为 $\alpha_\ell = 1 + \ell \cdot \Delta\alpha$, ($\ell = 0, 1, 2, \dots, 2J$). 则:

$$\int_1^2 p(\alpha) d\alpha = \Delta\alpha \sum_{\ell=0}^{2J} d_\ell \cdot p(\alpha_\ell) - \frac{(\Delta\alpha_\ell)^4}{180} p^{(4)}(\xi),$$

$$\xi \in (1,2).$$

其中系数

$$d_\ell = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \ell = 0, 2J, \\ \frac{2}{3}, & \ell = 2, 4, \dots, 2J-2, \\ \frac{4}{3}, & \ell = 1, 3, \dots, 2J-1. \end{cases}$$

2 差分格式的建立

本节建立方程(1)~(3)的差分格式,首先对时间和空间离散.取整数 J, M, N . 设 $\Delta t = \tau$ 是时间步长,且 $t_n = n\tau (0 \leq n \leq N)$, 记 $\Delta x = h = \frac{L}{M}$ 是空间步长,节点 $x_i = ih (0 \leq i \leq M)$, 记 $u_j^n = u(jh, n\tau)$, $\varphi_i = \varphi(x_i)$, 记步长 $\Delta\alpha = \frac{1}{2J}$, $\alpha_\ell = 1 + \ell\Delta\alpha (0 \leq \ell \leq 2J)$, 空间区域 $\Omega_h = \{x_i | 0 \leq i \leq M\}$, 时间区域 $\Omega_\tau = \{t_n | 0 \leq t_n \leq N\}$, 定义如下的网格函数空间:

$$u_h = \{u | u = (u_0, \dots, u_M)\},$$

$$\overset{\circ}{u}_h = \{u | u \in u_h, u_0 = u_M = 0\}.$$

应用引理1,可将方程(1)~(3)中由积分项表示的分布阶导数化为多项 Riesz 空间导数之和:

$$\int_1^2 p(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial |x|^\alpha} d\alpha = \Delta\alpha \sum_{\ell=0}^{2J} d_\ell \cdot p(\alpha_\ell) \frac{\partial^{\alpha_\ell} u(x, t)}{\partial |x|^{\alpha_\ell}} + O((\Delta\alpha)^4). \quad (4)$$

定理1^[20] (Caputo 导数的 $L1$ 逼近) 设 $0 < \beta < 1$, τ 为时间步长, $\tau = T/N$, $t_n = n\tau$, $0 \leq n \leq N$, 有: ${}^\circ D_t^\beta \phi(t_n) = D_t^\beta \phi(t_n) + O(\tau^{2-\beta})$, 其中

$$D_t^\beta \phi(t_n) = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \left[a_0^{(\beta)} \phi(t_n) - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-k-1}^{(\beta)} - a_{n-k}^{(\beta)}) \phi(t_k) - a_{n-1}^{(\beta)} \phi(t_0) \right], \quad (5)$$

其中,系数 $a_\ell^{(\beta)} = (\ell+1)^{1-\beta} - \ell^{1-\beta}$, $\ell \geq 0$, 且有 $1 = a_0^{(\beta)} > a_1^{(\beta)} > a_2^{(\beta)} > \dots > a_\ell^{(\beta)} > 0$, $a_\ell^{(\beta)} \rightarrow 0$, 当 $\ell \rightarrow \infty$ 时. (6)

为了离散方程(1)中的 Riesz 导数,引入以下定理.

定理2^[21] 设函数 $u(x, t) \in C^7(\mathbb{R})$, $u(x, \cdot)$ 关于 x 直到七阶导数存在,且属于 $L_1(R)$. 设

$$L_\theta u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k^{(\alpha)} u(x - (k+\theta)h, t),$$

$$\theta = -1, 0, 1, \alpha \in (1, 2),$$

这里系数

$$g_k^{(\alpha)} = \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} - k + 1\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + k + 1\right)}, \quad (7)$$

则有

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial |x|^\alpha} = \frac{1}{h^\alpha} \left[\frac{\alpha}{24} L_{-1} u(x, t) - \left(1 + \frac{\alpha}{12}\right) L_0 u(x, t) + \frac{\alpha}{24} L_1 u(x, t) \right] + O(h^4). \quad (8)$$

式(7)中的系数 $g_k^{(\alpha)}$ 有如下性质:

引理2^[20] 系数 $\{g_k^{(\alpha)}\}$ 有如下递推关系: $g_0^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}$, $g_k^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{\frac{\alpha}{2}+k}\right) g_{k-1}^{(\alpha)}$, $k \geq 1$, $g_{-k}^{(\alpha)} = g_k^{(\alpha)}$, $k \geq 1$.

以下在节点 (x_m, t_n) 处考虑微分方程,应用引理1和定理2可将方程(1)~(3)中的分布阶导数离散为

$$\int_1^2 p(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x_m, t_n)}{\partial |x|^\alpha} d\alpha = \Delta\alpha \sum_{\ell=0}^{2J} d_\ell \cdot p(\alpha_\ell) \left[\frac{\alpha_\ell}{24h^{\alpha_\ell}} \sum_{k=-M+m+1}^{m-1} g_k^{(\alpha_\ell)} u_{m-k-1}^n + \frac{\alpha_\ell}{24h^{\alpha_\ell}} \sum_{k=-M+m+1}^{m-1} g_k^{(\alpha_\ell)} u_{m-k+1}^n - \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12}\right) \frac{1}{h^{\alpha_\ell}} \sum_{k=-M+m+1}^{m-1} g_k^{(\alpha_\ell)} u_{m-k}^n \right] + O(h^4 + (\Delta\alpha)^4). \quad (9)$$

记 $r = \tau^\beta \Gamma(2-\beta)$, 由定理1及式(9),得到方程(1)~(3)在点 (x_m, t_n) 处的表达式:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[u_m^n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-k-1}^{(\beta)} - a_{n-k}^{(\beta)}) u_m^k - a_{n-1}^{(\beta)} u_m^0 \right] = \Delta\alpha \sum_{\ell=0}^{2J} d_\ell \cdot p(\alpha_\ell) \cdot \\ & \left[\frac{\alpha_\ell}{24h^{\alpha_\ell}} \sum_{k=-M+m+1}^{m-1} g_k^{(\alpha_\ell)} u_{m-k-1}^n + \frac{\alpha_\ell}{24h^{\alpha_\ell}} \sum_{k=-M+m+1}^{m-1} g_k^{(\alpha_\ell)} u_{m-k+1}^n - \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12}\right) \frac{1}{h^{\alpha_\ell}} \sum_{k=-M+m+1}^{m-1} g_k^{(\alpha_\ell)} u_{m-k}^n + \mathfrak{R}_m^n \right] + \\ & f_m^n, 1 \leq m \leq M-1, 1 \leq n \leq N, \\ & u_m^0 = \varphi_m, 1 \leq m \leq M-1, \\ & u_0^n = 0, u_M^n = 0, 0 \leq n \leq N, \end{aligned} \right. \quad (10)$$

其中 $\mathfrak{R}_m^n$ 是截断误差,有下式成立:

$$|\mathfrak{R}_m^n| \leq C_1 (h^4 + (\Delta\alpha)^4 + \tau^{2-\beta}), 1 \leq m \leq M-1, 1 \leq n \leq N,$$

其中 C_1 是与 $h, \Delta\alpha, \tau$ 无关的正常数.

在方程(10)中略去截断误差 $\mathfrak{R}_m^n$, 并用数值解 U_m^n 代替精确解 u_m^n , 得方程(1)~(3)的如下差分格式:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[U_m^n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-k-1}^{(\beta)} - a_{n-k}^{(\beta)}) U_m^k - a_{n-1}^{(\beta)} U^0 \right] = \\ & \Delta \alpha \sum_{\ell=0}^{2J} d_\ell \cdot p(\alpha_\ell) \left[\frac{\alpha_\ell}{24h^{\alpha_\ell}} \sum_{k=-M+m+1}^{m-1} g_k^{(\alpha_\ell)} U_{m-k+1}^n - \right. \\ & \left. g_k^{(\alpha_\ell)} U_{m-k-1}^n + \frac{\alpha_\ell}{24h^{\alpha_\ell}} \sum_{k=-M+m+1}^{m-1} g_k^{(\alpha_\ell)} U_{m-k+1}^n - \right. \\ & \left. \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12} \right) \frac{1}{h^{\alpha_\ell}} \sum_{k=-M+m+1}^{m-1} g_k^{(\alpha_\ell)} U_{m-k}^n \right] + f_m^n, \\ & 1 \leq m \leq M-1, 1 \leq n \leq N, \\ & U_m^0 = \varphi_m, 1 \leq m \leq M-1, \\ & U_0^n = 0, U_m^n = 0, 0 \leq n \leq N. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

记

$$\begin{aligned} U^n &= (U_1^n, \dots, U_{M-1}^n)^T, \\ F^n &= (f_1^n, f_2^n, \dots, f_{M-1}^n)^T. \end{aligned} \quad (12)$$

为了方便,引入记号 $C_i^{(\ell)} = \frac{d_\ell p(\alpha_\ell)}{h^{\alpha_\ell}} g_i^{(\alpha_\ell)}, i = 2 -$

$M, \dots, M-3, \ell = 0, 1, 2, \dots, 2J$. 由引理 2 可知系数 $g_k^{(\alpha_\ell)} = g_k^{(\alpha_\ell)} (k \geq 1)$. 则线性系统(11)可以写成以下矩阵的形式:

$$\begin{aligned} (I + G)U^n &= (a_0^{(\beta)} - a_1^{(\beta)})U^{n-1} + \\ & (a_1^{(\beta)} - a_2^{(\beta)})U^{n-2} + \dots + (a_{n-2}^{(\beta)} - a_{n-1}^{(\beta)})U^1 + \\ & a_{n-1}^{(\beta)}U^0 + rF^n, \end{aligned} \quad (13)$$

这里 I 是一个 $(M-1) \times (M-1)$ 单位矩阵. 矩阵 $G = rG_1 - rG_2 - rG_3$, 这里

$$G_1 = \begin{pmatrix} \Delta \alpha \sum_{\ell=0}^{2J} \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12} \right) C_0^{(\ell)} & \Delta \alpha \sum_{\ell=0}^{2J} \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12} \right) C_{-1}^{(\ell)} & \cdots & \Delta \alpha \sum_{\ell=0}^{2J} \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12} \right) C_{2-M}^{(\ell)} \\ \Delta \alpha \sum_{\ell=0}^{2J} \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12} \right) C_1^{(\ell)} & \Delta \alpha \sum_{\ell=0}^{2J} \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12} \right) C_0^{(\ell)} & \cdots & \Delta \alpha \sum_{\ell=0}^{2J} \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12} \right) C_{3-M}^{(\ell)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta \alpha \sum_{\ell=0}^{2J} \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12} \right) C_{M-2}^{(\ell)} & \Delta \alpha \sum_{\ell=0}^{2J} \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12} \right) C_{M-3}^{(\ell)} & \cdots & \Delta \alpha \sum_{\ell=0}^{2J} \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12} \right) C_0^{(\ell)} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_{-1}^{(\ell)} & \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_{-2}^{(\ell)} & \cdots & \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_{2-M}^{(\ell)} & 0 \\ \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_0^{(\ell)} & \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_{-1}^{(\ell)} & \cdots & \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_{3-M}^{(\ell)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_{M-1}^{(\ell)} & \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_{M-2}^{(\ell)} & \cdots & \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_0^{(\ell)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_0^{(\ell)} & \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_{-1}^{(\ell)} & \cdots & \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_{3-M}^{(\ell)} \\ 0 & \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_1^{(\ell)} & \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_0^{(\ell)} & \cdots & \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_{4-M}^{(\ell)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_{M-2}^{(\ell)} & \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_{M-3}^{(\ell)} & \cdots & \frac{\Delta \alpha}{24} \sum_{\ell=0}^{2J} \alpha_\ell C_1^{(\ell)} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

这里 $g_k^{(\alpha_\ell)} = \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha_\ell + 1)}{\Gamma(\frac{\alpha_\ell}{2} - k + 1) \Gamma(\frac{\alpha_\ell}{2} + k + 1)}$ 如引理 2

定义,且

$$g_k^{(\alpha_\ell)} = g_{-k}^{(\alpha_\ell)} (k = 2-M, 3-M, \dots, M-3, M-2).$$

3 稳定性收敛性分析

3.1 稳定性分析

本节采用矩阵分析方法证明稳定性.

定义 1^[20]

形如 $T_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{1-n} \\ t_1 & t_0 & \cdots & t_{2-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_0 \end{pmatrix}$ 的

矩阵称为 Toeplitz 矩阵.

定义 2^[20]

若 Toeplitz 矩阵中的元素 $\{t_k\}_{k=1-n}^{n-1}$ 是函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数,即

$$t_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

则称函数 $f(x)$ 为矩阵 T_n 的生成函数.

引理 3^[20] (**Grenander-Szegö 定理**) 对于上述 Toeplitz 矩阵 T_n , 如果函数 $f(x)$ 是定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的连续实值函数, 记 T_n 的最小特征值和最大特征值分别为 $\lambda_{\min}(T_n)$ 和 $\lambda_{\max}(T_n)$, $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的最小值和最大值分别为 $f_{\min}$ 和 $f_{\max}$, 则有 $f_{\min} \leq \lambda_{\min}(T_n) \leq \lambda_{\max}(T_n) \leq f_{\max}$. 而且, 如果有 $f_{\min} < f_{\max}$, 那么对任意 $n > 0$, 矩阵 T_n 的所有特征值 λ 满足

$$f_{\min} < \lambda < f_{\max},$$

更进一步有, 若 $f_{\min} > 0$, 则 T_n 是正定矩阵.

定理 3 矩阵 G 是正定矩阵.

证明 根据定义 2, 设 G_1 中元素 $\left\{ \Delta\alpha \sum_{\ell=0}^{2J} d_\ell p(\alpha_\ell) \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12}\right) \frac{1}{h^{\alpha_\ell}} g_k^{\alpha_\ell} \right\}_{k=0}^{M-2}$ 是函数 F_{G_1} 的 Fourier 系数, 即 $\Delta\alpha \sum_{\ell=0}^{2J} d_\ell p(\alpha_\ell) \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12}\right) \frac{1}{h^{\alpha_\ell}} g_k^{\alpha_\ell} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_{G_1} e^{ikx} dx$, 则 F_{G_1} 为矩阵 G_1 的生成函数. 即

$$F_{G_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\Delta\alpha \sum_{\ell=0}^{2J} d_\ell p(\alpha_\ell) \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12}\right) \frac{1}{h^{\alpha_\ell}} g_k^{\alpha_\ell} \right] e^{ikx}.$$

同理, F_{G_2} 和 F_{G_3} 分别是矩阵 G_2, G_3 的生成函数, 则

$$F_{G_2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\Delta\alpha \sum_{\ell=0}^{2J} d_\ell p(\alpha_\ell) \frac{\alpha_\ell}{24h^{\alpha_\ell}} g_k^{\alpha_\ell} \right] e^{i(k-1)x},$$

$$F_{G_3} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\Delta\alpha \sum_{\ell=0}^{2J} d_\ell p(\alpha_\ell) \frac{\alpha_\ell}{24h^{\alpha_\ell}} g_k^{\alpha_\ell} \right] e^{i(k+1)x}.$$

下面证明矩阵 G 是正定矩阵.

由上述 G_1, G_2, G_3 的生成函数知 G 的生成函数

$$F_G = r \cdot (F_{G_1} - F_{G_2} - F_{G_3}), \text{ 且}$$

$$F_G = r \cdot$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\Delta\alpha \sum_{\ell=0}^{2J} d_\ell p(\alpha_\ell) \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12}\right) \frac{1}{h^{\alpha_\ell}} g_k^{\alpha_\ell} \right] e^{ikx} - \right. \\ & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\Delta\alpha \sum_{\ell=0}^{2J} d_\ell p(\alpha_\ell) \frac{\alpha_\ell}{24h^{\alpha_\ell}} g_k^{\alpha_\ell} \right] e^{i(k-1)x} - \\ & \left. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\Delta\alpha \sum_{\ell=0}^{2J} d_\ell p(\alpha_\ell) \frac{\alpha_\ell}{24h^{\alpha_\ell}} g_k^{\alpha_\ell} \right] e^{i(k+1)x} \right\} = \\ & r \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta\alpha \sum_{\ell=0}^{2J} d_\ell p(\alpha_\ell) \left[\left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12}\right) \frac{1}{h^{\alpha_\ell}} - \right. \\ & \left. \cos x \cdot \frac{\alpha_\ell}{12} \frac{1}{h^{\alpha_\ell}} \right] g_k^{\alpha_\ell} e^{ikx} = r \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta\alpha \sum_{\ell=0}^{2J} d_\ell p(\alpha_\ell) \cdot \\ & \left. \frac{1}{6h^{\alpha_\ell}} \left(6 + \alpha_\ell \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \right) \left| 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|^{\alpha_\ell} \right] \geq 0. \end{aligned}$$

由引理 3 可知, G 是正定矩阵. 证毕.

引理 4^[21] Φ 是一个 $(M-1)$ 阶的正定矩阵, 对于任意 $\sigma > 0$, 有下面不等式成立:

$$\| (I + \sigma\Phi)^{-1} \|_\infty \leq 1,$$

$$\| (I - \sigma\Phi)(I + \sigma\Phi)^{-1} \|_\infty \leq 1.$$

定理 4 假定 $\hat{u}_i^n$ 和 $u_i^n (i = 1, 2, 3, \dots, M-1, n = 0, 1, 2, \dots, N)$ 分别为数值格式 (13) 的近似解和数值解, 并 $\epsilon_i^n = \hat{u}_i^n - u_i^n, Y^n = [\epsilon_1^n, \epsilon_2^n, \dots, \epsilon_{M-1}^n]^T$, 误差 Y^n 满足

$$Y^n = (I + G)^{-1} [(a_0^{(\beta)} - a_1^{(\beta)}) Y^{n-1} + (a_1^{(\beta)} - a_2^{(\beta)}) Y^{n-2} + \dots + (a_{n-2}^{(\beta)} - a_{n-1}^{(\beta)}) Y^1 + a_{n-1}^{(\beta)} Y^0],$$

则有 $\|Y^n\|_\infty \leq \|Y^0\|_\infty$ 成立, 则该数值格式 (13) 是无条件稳定的.

证明 用数学归纳法证明差分格式 (13) 的稳定性.

当 $n = 1$ 时, 将 $\epsilon_i^n = \hat{u}_i^n - u_i^n$ 代入式 (13), 得 $Y^1 = (I + G)^{-1} Y^0$, 由定理 3 可知 G 是 $(M-1) \times (M-1)$ 阶正定矩阵, 由定理 3 和引理 4 可得 $\|(I + G)^{-1}\|_\infty \leq 1$, 则

$$\|Y^1\|_\infty = \|(I + G)^{-1} Y^0\|_\infty \leq \|(I + G)^{-1}\|_\infty \|Y^0\|_\infty \leq \|Y^0\|_\infty.$$

假设当 $n \leq k-1$, $\|Y^{k-1}\|_\infty \leq \|Y^0\|_\infty$, 则当 $n = k$ 时, 有

$$\begin{aligned} \|Y^k\|_\infty &= \|(I + G)^{-1} [(a_0^{(\beta)} - a_1^{(\beta)}) Y^{k-1} + (a_1^{(\beta)} - a_2^{(\beta)}) Y^{k-2} + \dots + (a_{n-2}^{(\beta)} - a_{n-1}^{(\beta)}) Y^1 + a_{n-1}^{(\beta)} Y^0]\|_\infty \\ &\leq \|(I + G)^{-1}\|_\infty [(a_0^{(\beta)} - a_1^{(\beta)}) \|Y^{k-1}\|_\infty + (a_1^{(\beta)} - a_2^{(\beta)}) \|Y^{k-2}\|_\infty + \dots + (a_{n-2}^{(\beta)} - a_{n-1}^{(\beta)}) \|Y^1\|_\infty + a_{n-1}^{(\beta)} \|Y^0\|_\infty] \\ &\leq \|(I + G)^{-1}\|_\infty [(a_0^{(\beta)} - a_1^{(\beta)}) \|Y^{k-1}\|_\infty + \dots + (a_{n-2}^{(\beta)} - a_{n-1}^{(\beta)}) \|Y^1\|_\infty + (a_{n-1}^{(\beta)}) \|Y^0\|_\infty] \\ &\leq \|(I + G)^{-1}\|_\infty [(a_0^{(\beta)} - a_1^{(\beta)}) + (a_1^{(\beta)} - a_2^{(\beta)}) + \dots + (a_{n-2}^{(\beta)} - a_{n-1}^{(\beta)}) + a_{n-1}^{(\beta)}] \|Y^0\|_\infty \\ &= \|(I + G)^{-1}\|_\infty \cdot a_0^{(\beta)} \|Y^0\|_\infty = \|(I + G)^{-1}\|_\infty \|Y^0\|_\infty \leq \|Y^0\|_\infty. \end{aligned}$$

因此, 可以得到 $\|Y^n\|_\infty \leq \|Y^0\|_\infty$. 证毕.

3.2 收敛性分析

定理 5 假设 U^n 和 u^n 分别是原方程 (1)~(3) 的数值解和精确解, 则当 $\Delta\alpha, h, \tau$ 趋近于零时, 存在正常数 C , 有

$$\|U^n - u^n\|_\infty \leq C(\tau^{2-\beta} + \Delta\alpha^4 + h^4),$$

则该数值格式收敛. 其中: $U^n = (U(x_1, t_n), U(x_2, t_n), \dots, U(x_{M-1}, t_n))^T, u^n = (u(x_1, t_n), u(x_2, t_n), \dots, u(x_{M-1}, t_n))^T$.

证明 用数学归纳法证明该格式的收敛性.

设 e_m^n 是点 (x_m, t_n) 处的误差, 令 $e_m^n = u_m^n - U_m^n$, $0 \leq m \leq M, 0 \leq n \leq N$. 定义

$$E^n = (e_1^n, e_2^n, \dots, e_{M-1}^n)^T,$$

$$R^n = (R_1^n, R_2^n, \dots, R_{M-1}^n)^T.$$

将式 (10) 与 (11) 相减得到如下误差方程组:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[e_m^n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-k-1}^{(\beta)} - a_{n-k}^{(\beta)}) e_m^k - a_{n-1}^{(\beta)} e_m^0 \right] = \\ & \Delta \alpha \sum_{\ell=0}^{2J} d_\ell \cdot p(\alpha_\ell) \left[\frac{\alpha_\ell}{24h^{\alpha_\ell}} \sum_{k=-M+m+1}^{m-1} g_k^{(\alpha_\ell)} e_{m-k-1}^n + \right. \\ & \left. \frac{\alpha_\ell}{24h^{\alpha_\ell}} \sum_{k=-M+m+1}^{m-1} g_k^{(\alpha_\ell)} e_{m-k+1}^n - \right. \\ & \left. \left(1 + \frac{\alpha_\ell}{12} \right) \frac{1}{h^{\alpha_\ell}} \sum_{k=-M+m+1}^{m-1} g_k^{(\alpha_\ell)} e_{m-k}^n + \mathfrak{R}_m^n \right], \\ & 1 \leq m \leq M-1, 1 \leq n \leq N, \\ & e_m^0 = \varphi_m, 1 \leq m \leq M-1, \\ & e_0^n = 0, e_m^n = 0, 0 \leq n \leq N. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

式(17)可写成矩阵形式

$$(\mathbf{I} + \mathbf{G})\mathbf{E}^n = (a_0^{(\beta)} - a_1^{(\beta)})\mathbf{E}^{n-1} + (a_1^{(\beta)} - a_2^{(\beta)})\mathbf{E}^{n-2} + \cdots + (a_{n-2}^{(\beta)} - a_{n-1}^{(\beta)})\mathbf{E}^1 + a_{n-1}^{(\beta)}\mathbf{E}^0 + r\mathbf{R}^n, \quad (18)$$

其中 $\mathbf{G} = r\mathbf{G}_1 - r\mathbf{G}_2 - r\mathbf{G}_3$, 下面用数学归纳法证明收敛性.

当 $n=1$ 时, $\mathbf{E}^1 = (\mathbf{I} + \mathbf{G})^{-1}(\mathbf{E}^0 + r \cdot \mathbf{R}^1)$, 又 $\|(\mathbf{I} + \mathbf{G})^{-1}\|_\infty \leq 1$, 则有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}^1\|_\infty &= \|(\mathbf{I} + \mathbf{G})^{-1}(\mathbf{E}^0 + r \cdot \mathbf{R}^1)\|_\infty \leq \\ & \|(\mathbf{I} + \mathbf{G})^{-1}\|_\infty \|\mathbf{E}^0 + r \cdot \mathbf{R}^1\|_\infty \leq \\ & \|r \cdot \mathbf{R}^1\|_\infty \leq rC_1(\tau^{2-\beta} + h^4 + (\Delta\alpha)^4). \end{aligned}$$

其中 C_1 是与 $\tau, h, \Delta\alpha$ 无关的正常数.

假设当 $n \leq k-1$ 时, $\|\mathbf{E}^{k-1}\|_\infty \leq r \cdot C_1(\tau^{2-\beta} + (\Delta\alpha)^4 + h^4)$ 成立, 当 $n=k$ 时, 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}^k\|_\infty &= \|(\mathbf{I} + \mathbf{G})^{-1}[(a_0^{(\beta)} - a_1^{(\beta)})\mathbf{E}^{k-1} + \\ & (a_1^{(\beta)} - a_2^{(\beta)})\mathbf{E}^{k-2} + \cdots + (a_{n-2}^{(\beta)} - a_{n-1}^{(\beta)})\mathbf{E}^1 + \\ & a_{n-1}^{(\beta)}\mathbf{E}^0] + r \cdot \mathbf{R}^k\|_\infty \leq \|(\mathbf{I} + \mathbf{G})^{-1}\|_\infty \cdot \\ & \|[(a_0^{(\beta)} - a_1^{(\beta)})\mathbf{E}^{k-1} + (a_1^{(\beta)} - a_2^{(\beta)})\mathbf{E}^{k-2} + \cdots + \\ & (a_{n-2}^{(\beta)} - a_{n-1}^{(\beta)})\mathbf{E}^1 + a_{n-1}^{(\beta)}\mathbf{E}^0] + r \cdot \mathbf{R}^k\|_\infty \leq \|(\mathbf{I} + \\ & \mathbf{G})^{-1}\|_\infty [(a_0^{(\beta)} - a_1^{(\beta)})\|\mathbf{E}^{k-1}\|_\infty + (a_1^{(\beta)} - \\ & a_2^{(\beta)})\|\mathbf{E}^{k-2}\|_\infty + \cdots + (a_{n-2}^{(\beta)} - a_{n-1}^{(\beta)})\|\mathbf{E}^1\|_\infty + \\ & a_{n-1}^{(\beta)}\|\mathbf{E}^0\|_\infty + \|r \cdot \mathbf{R}^k\|_\infty] \leq \|(\mathbf{I} + \\ & \mathbf{G})^{-1}\|_\infty \cdot rC_1(\tau^{2-\beta} + h^4 + (\Delta\alpha)^4) \leq rC_1(\tau^{2-\beta} + \\ & h^4 + \Delta\alpha^4) = C(\tau^{2-\beta} + h^4 + \Delta\alpha^4), \end{aligned}$$

其中 $C = rC_1$, 由此可以得到

$$\|\mathbf{E}^n\|_\infty \leq C(\tau^{2-\beta} + h^4 + (\Delta\alpha)^4).$$

证毕.

4 数值例子

本节提供数值例子说明所给理论分析的有效性.

考虑以下 Riesz 空间分布阶扩散方程:

$$\begin{aligned} {}_0^c D_t^\beta u(x, t) &= \int_1^2 p(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial |x|^\alpha} d\alpha + f(x, t), \\ x &\in (0, 1), t \in (0, 1], \end{aligned} \quad (19)$$

边界条件:

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, t \in (0, 1], \quad (20)$$

初始条件:

$$u(x, 0) = x^4(1-x)^4, x \in [0, 1]. \quad (21)$$

这里 $p(\alpha) = -2\Gamma(9-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{6}{\Gamma(4-\beta)} t^{3-\beta} x^4(1-x)^4 - (t^3 + \\ & 1)[Q(x) + Q(1-x)], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} Q(x) &= \Gamma(9) \int_1^2 x^{8-\alpha} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) d\alpha - 4\Gamma(8) \int_1^2 x^{7-\alpha} (8- \\ & \alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) d\alpha + 6\Gamma(7) \int_1^2 x^{6-\alpha} (8-\alpha)(7- \\ & \alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) d\alpha - 4\Gamma(6) \int_1^2 x^{5-\alpha} (8-\alpha)(7-\alpha)(6- \\ & \alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) d\alpha + \Gamma(5) \int_1^2 x^{4-\alpha} (8-\alpha)(7-\alpha)(6- \\ & \alpha)(5-\alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) d\alpha. \end{aligned}$$

该方程的精确解为

$$u(x, t) = (t^3 + 1)x^4(1-x)^4, x \in (0, 1).$$

定义误差范数为

$$E(\tau, h, \Delta\alpha) = \max_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 0 \leq i \leq M}} |u(x_i, t_n) - u_i^n|,$$

其中: $u(x_i, t_n)$ 和 u_i^n 分别表示该问题在点 (x_i, t_n) 处的精确解和数值解, τ 表示时间步长, h 表示空间步长, $\Delta\alpha$ 表示分布阶步长.

定义时间方向的收敛阶 rate_τ , 空间方向的收敛阶 rate_h , 分布阶的收敛阶 $\text{rate}_{\Delta\alpha}$ 如下:

$$\text{rate}_\tau = \log_2 \frac{E(\tau, h, \Delta\alpha)}{E\left(\frac{\tau}{2}, h, \Delta\alpha\right)},$$

$$\text{rate}_h = \log_2 \frac{E(\tau, h, \Delta\alpha)}{E\left(\tau, \frac{h}{2}, \Delta\alpha\right)},$$

$$\text{rate}_{\Delta\alpha} = \log_2 \frac{E(\tau, h, \Delta\alpha)}{E\left(\tau, h, \frac{\Delta\alpha}{2}\right)}.$$

图 1 显示了 $t=1.0$ 时刻的数值解和精确解的对比, 取 $\Delta\alpha = h = \tau = 1/200, t=1.0, \beta=0.75$, 可以看出二者非常吻合. 图 2 显示了 $u(x, t)$ 在不同时刻的值, 随时间的变化. 表 1 显示在 $h = \tau = 1/1000, \beta=0.7, t=1.0$ 时精确解和数值解的最大误差及 $\Delta\alpha$ 的收敛阶, $\Delta\alpha$ 的收敛阶达到四阶. 表 2 显示 $\Delta\alpha = \tau =$

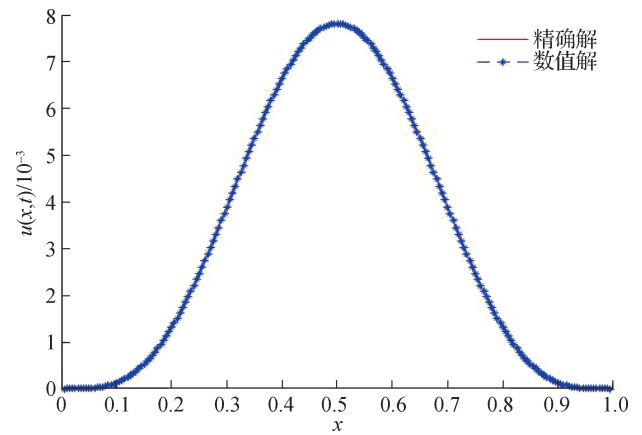


图 1 $t=1.0$ 时刻,取 $\Delta\alpha=h=\tau=1/200,\beta=0.75$,数值解与精确解的比较

Fig. 1 Comparison of numerical solutions and the exact solution at time $t=1.0,\Delta\alpha=h=\tau=1/200,\beta=0.75$

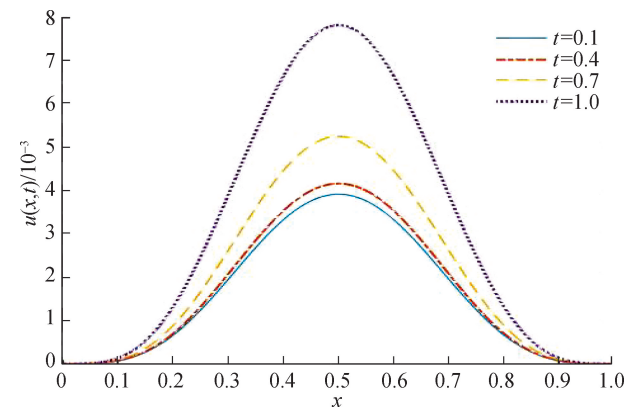


图 2 取 $\Delta\alpha=h=\tau=1/1\,000,\beta=0.75$,不同时刻 $t=0.1,t=0.4,t=0.7,1.0$ 时数值解

Fig. 2 Comparison of numerical solutions using our method at different times $t,\Delta\alpha=h=\tau=1/1\,000,\beta=0.75$

$1/500,\beta=0.7,t=1.0$ 时精确解和数值解的最大误差及 h 的收敛阶,其收敛阶达到四阶.表 3 显示在 $\Delta\alpha=h=1/1\,000,\beta=0.7,t=1.0$ 时精确解和数值解的最大误差及 τ 的收敛阶,其收敛阶接近 $2-\beta=1.3$ 阶.这与本文中的理论分析结果是相一致的.

表 1 最大误差和 $\Delta\alpha$ 的收敛阶 ($h=\tau=1/1\,000,\beta=0.7,t=1.0$)

Tab. 1 The maximum errors and convergence orders for $\Delta\alpha(h=\tau=1/1\,000,\beta=0.7,t=1.0)$

$\Delta\alpha$	$E(\tau,h,\Delta\alpha)$	收敛阶
1/2	$1.409\,8\times10^{-5}$	—
1/4	$8.590\,8\times10^{-7}$	4.036
1/8	$5.321\,9\times10^{-8}$	4.012
1/16	$3.199\,6\times10^{-9}$	4.055

表 2 最大误差和 h 的收敛阶 ($\Delta\alpha=\tau=1/500,\beta=0.7,t=1.0$)

Tab. 2 The maximum errors and convergence orders for $h(\Delta\alpha=\tau=1/500,\beta=0.7,t=1.0)$

h	$E(\tau,h,\Delta\alpha)$	收敛阶
1/10	$2.118\,7\times10^{-5}$	—
1/20	$1.389\,4\times10^{-6}$	3.930
1/40	$8.688\,7\times10^{-8}$	3.991
1/80	$5.134\,9\times10^{-9}$	4.080

表 3 最大误差和 τ 的收敛阶 ($\Delta\alpha=h=1/1\,000,\beta=0.7,t=1.0$)

Tab. 3 The maximum errors and convergence orders for $\tau(\Delta\alpha=h=1/1\,000,\beta=0.7,t=1.0)$

τ	$E(\tau,h,\Delta\alpha)$	收敛阶
1/10	$4.782\,2\times10^{-8}$	—
1/20	$2.003\,1\times10^{-8}$	1.255
1/40	$8.280\,5\times10^{-9}$	1.274
1/80	$3.397\,8\times10^{-9}$	1.285

5 结 论

本文发展了一个 Riesz 空间分布阶 Caputo 时间分数阶扩散方程的高阶数值方法.通过将分布阶方程离散为含有多项分数阶导数的微分方程,利用有限差分法对得到的微分方程进行数值求解,证明差分格式是稳定的和无条件收敛的.此外,本文中提供的数值方法的收敛阶为 $O(\tau^{2-\beta}+(\Delta\alpha)^4+h^4)$.最后,给出了数值例子来证明该数值方法与理论结果是相一致的.这种方法和分析技术可用于求解和分析其他类型的分数阶偏微分方程.

参考文献:

[1] 郭柏灵,蒲学科,黄凤辉. 分数阶偏微分方程及其数值解 [M]. 北京:科学出版社,2011.

[2] KILBS A A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of fractinal differential equations [M]. Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies, 2006:204.

[3] YU B, JIANG X, XU H. A novel compact numerical method for solving the two-dimensional non-linear fractional reaction-subdiffusion equation [J]. Numerical

- Algorithms, 2015, 68(4): 923-950.
- [4] YU B, JIANG X, WANG C. Numerical algorithms to estimate relaxation parameters and Caputo fractional derivative for a fractional thermal wave model in spherical composite medium[J]. Applied Mathematics and Computation, 2016, 274: 106-118.
- [5] PODLUBNY I. Fractional differential equation [M]. San Diego: Academic Press, 1999: 20-21.
- [6] LI J, LIU F, FENG L, et al. A novel finite volume method for the Riesz space distributed-order diffusion equation [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2017, 74: 772-783.
- [7] 靳珊, 梁宗旗. 分数阶非线性 Schrodinger 方程的守恒算法[J]. 集美大学学报(自然科学版), 2021, 26(5): 465-471.
- [8] 闫羽媛, 梁宗旗. α 阶右侧 Caputo 分数阶导数的高阶插值逼近[J]. 集美大学学报(自然科学版), 2021, 26(4): 365-373.
- [9] 陈景华, 陈雪娟. Riesz 空间分布阶的分数阶扩散方程的数值模拟[J]. 集美大学学报(自然科学版), 2021, 26(2): 97-103.
- [10] 杜瑞连, 梁宗旗. 右侧 Caputo 分数阶导数的 L_2-1 插值逼近[J]. 集美大学学报(自然科学版), 2017, 22(4): 68-74.
- [11] GAO G H, SUN H W, SUN Z Z. Some high-order difference schemes for the distributed-order differential equations [J]. Journal of Computational Physics, 2015, 298: 337-359.
- [12] HU C, S L, CHEN W. Finite difference/spectral approximations for the distributed order time fractional reaction-diffusion equation on an unbounded domain[J]. Journal of Computational Physics, 2016, 315: 84-97.
- [13] ZHENG R M, LIU F W, JIANG X Y, et al. Finite difference spectral methods for the two-dimensional distributed-order time-fractional cable equation[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2020, 80(6): 1523-1537.
- [14] JIAN H Y, HUANG T Z, GU X M, et al. Fast second-order implicit difference schemes for time distributed-order and Riesz space fractional diffusion-wave equations [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2021, 94: 136-154.
- [15] SENE N, ABDELMALEK K. Analysis of the fractional diffusion equations described by Atangana-Baleanu-Caputo fractional derivative[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2019, 127: 158-164.
- [16] FAN W, LIU F. A numerical method for solving the two-dimensional distributed order space-fractional diffusion equation on an irregular convex domain [J]. Appl Math Lett, 2018, 77: 114-121.
- [17] 杨莹莹. 空间分布阶时间分数阶扩散方程的有限体积法[D]. 长沙: 长沙理工大学, 2020.
- [18] YANG S, LIU F, FENG L, et al. A novel finite volume method for the nonlinear two-sided space distributed-order diffusion equation with variable coefficients [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2021, 388(11): 113337.
- [19] ABDELKAWY M A, AL-SHOMRANI M. Spectral solutions for diffusion equations of Riesz distributed-order space-fractional [J]. AEJ-Alexandria Engineering Journal, 2022, 61: 1045-1054.
- [20] 孙志忠, 高广花. 分数阶微分方程的有限差分方法[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [21] DING H, LI C, CHEN Y Q. High-order algorithms for Riesz derivative and their applications (I) [J]. Abstract and Applied Analysis, 2014, 293: 218-237.

(责任编辑: 汪 军)