Orlicz-Besov 延拓域和 Ahlfors n -正则域梁填¹, 周渊^{2*}

1. 北京航空航天大学数学科学学院, 北京 100191;

2. 北京师范大学数学科学学院, 北京 100875

E-mail: liangtian@buaa.edu.cn, yuanzhou@buaa.edu.cn

收稿日期: 2020-03-26; 接受日期: 2020-05-11; 网络出版日期: 2020-07-15; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11522102 和 11871088) 资助项目**摘要** 设 $n \geq 2$, 以及 $\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 为 Young 函数且满足条件

$$\sup_{t>0} \int_0^t \frac{t^n}{\phi(t)} \frac{\phi(s)}{s^n} \frac{ds}{s} < \infty.$$

对任意区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 该条件保证了 Besov-Orlicz 空间 $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ 是非平凡的. 本文证明 Ahlfors n -正则域是 Besov-Orlicz $\dot{\mathbf{B}}^\phi$ -延拓域. 相反地, 进一步假设 ϕ 在 ∞ 处满足次指数增长条件, 本文证明 Besov-Orlicz $\dot{\mathbf{B}}^\phi$ -延拓域是 Ahlfors n -正则域.

关键词 Besov-Orlicz 空间 Ahlfors n -正则域 延拓**MSC (2020) 主题分类** 42B35

1 引言

称 $\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 为 Young 函数是指 ϕ 为 $[0, \infty)$ 上的连续凸函数, $\phi(0) = 0$, 对任意的 $t > 0$ 有 $\phi(t) > 0$ 且有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \infty.$$

对任意一个区域 (连通开集) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 定义 Orlicz-Besov 空间 $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ 为 Ω 上满足下列条件的可测函数 u 全体:

$$\|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)} := \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_{\Omega} \int_{\Omega} \phi \left(\frac{|u(x) - u(y)|}{\alpha} \right) \frac{dxdy}{|x - y|^{2n}} \leq 1 \right\} < \infty.$$

模去常数, $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ 是一个 Banach 空间. 关于 Orlicz-Besov 空间在几何群论中的应用可参见文献 [1]. 当 $p \geq 1$ 和 $\phi(t) = t^p$ 时, $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ -范数可以写成

$$\|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{2n}} dxdy \right)^{1/p}. \quad (1.1)$$

英文引用格式: Liang T, Zhou Y. Orlicz-Besov extension and Ahlfors n -regular domains (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1993–2012, doi: 10.1360/SSM-2020-0094

当 $p > n$ 和 $\phi(t) = t^p$ 时, $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ 就是 Besov 空间 $\dot{\mathbf{B}}_{p,p}^{n/p}(\Omega)$ (或分数阶 Sobolev 空间 $\dot{W}^{n/p,p}(\Omega)$). 而当 $p \leq n$ 和 $\phi(t) = t^p$ 时, 由 (1.1) 和文献 [2] 知, $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ 是平凡的, 即仅包含常值函数.

为保证空间 $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ 的非平凡性, 假设

$$C_\phi := \sup_{t>0} \int_0^t \frac{t^n}{\phi(t)} \frac{\phi(s)}{s^n} \frac{ds}{s} < \infty. \quad (1.2)$$

事实上, 在条件 (1.2) 下, 我们证明了 $C_c^\infty(\Omega) \subset \dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ (见下文引理 2.2). 当 $\phi(t) = t^p$ 时, ϕ 满足 (1.2) 当且仅当 $p > n$, 从而, $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ 是非平凡的当且仅当 $p > n$. 在这个意义下, (1.2) 是保证 $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ 非平凡性的最优选择. 满足条件 (1.2) 的 Young 函数有很多, 例如, 当 $p > n$ 且 $\gamma \geq 1$ 时的函数 $t^p[\ln(1+t)]^\gamma$, 当 $p > n$ 、 $c > 0$ 和 $\gamma > 0$ 时的函数 $t^p e^{ct^\gamma}$, 以及当 $c > 0$ 和 $\gamma > 0$ 时的函数

$$e^{ct^\gamma} - \sum_{j=0}^{[n/\gamma]} \frac{(ct^\gamma)^j}{j!},$$

其中 $[n/\gamma]$ 是不大于 n/γ 的整数. 有关 Orlicz-Besov 空间的一些基本性质参见下文第 2 节.

本文通过 Ahlfors n - 正则域研究 Orlicz-Besov 延拓域. 称区域 Ω 是 Ahlfors n - 正则的是指, 存在常数 $C_A(\Omega) > 0$ 使得

$$|B(x, r) \cap \Omega| \geq C_A(\Omega) r^n, \quad \forall x \in \Omega, \quad 0 < r < 2 \operatorname{diam} \Omega.$$

称区域 Ω 为 $\dot{\mathbf{B}}^\phi$ - 延拓域, 是指任意 $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ - 函数可连续线性延拓为 $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\mathbb{R}^n)$ - 函数, 换句话说, 存在有界线性延拓算子 $E: \dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega) \rightarrow \dot{\mathbf{B}}^\phi(\mathbb{R}^n)$ 使得对任意的 $u \in \dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ 有

$$Eu|_\Omega = u.$$

定理 1.1 假设 ϕ 为 Young 函数且满足条件 (1.2).

- (i) 若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是 Ahlfors n - 正则域, 则 Ω 是 $\dot{\mathbf{B}}^\phi$ - 延拓域.
- (ii) 进一步假设 ϕ 在 ∞ 处满足次指数增长条件, 即

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \phi(t) e^{-ct} = 0, \quad \forall c > 0. \quad (1.3)$$

若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是 $\dot{\mathbf{B}}^\phi$ - 延拓域, 则 Ω 是 Ahlfors n - 正则域.

定理 1.1 扩展了分数次 Sobolev 或 Besov $\dot{\mathbf{B}}_{p,p}^{n/p}$ - 延拓域刻画. 众所周知, 函数空间 (包括 Sobolev、分数次 Sobolev、Hajlasz-Sobolev、Besov 和 Triebel-Lizorkin 空间) 的延拓问题受到广泛的关注, 参见文献 [3–10] 和 [11–15] 及它们的参考文献. 对于定义在任意区域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数空间 $X(U)$, 类似于 $\dot{\mathbf{B}}^\phi$ - 延拓域, 人们可以定义 X - 延拓域. 一般地, $X(\Omega)$ - 函数的延拓不仅仅依赖于区域 Ω 的几何特征, 也依赖于 X 的解析性质. 记 $\dot{\mathbf{B}}_{p,p}^s(\Omega)$ 为 Besov 或分数次 Sobolev 空间, 即所有满足

$$\|u\|_{\dot{\mathbf{B}}_{p,p}^s(\Omega)} := \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{1/p} < \infty \quad (1.4)$$

的可测函数 u 的全体. 由文献 [3, 4] 知, 当 $s \in (0, 1)$ 和 $p > 1$ 时, Ahlfors n - 正则域是分数次 Sobolev $\dot{\mathbf{B}}_{p,p}^s$ - 延拓域. 由文献 [5, 16, 17] 知, 当 $p \geq 1$ 时, Ahlfors n - 正则域也是 Hajlasz-Sobolev $\dot{\mathbf{M}}^{1,p}$ - 延拓域. 称 Ω 上函数 g 是函数 u 的 Hajlasz 导数 (记为 $g \in \mathbb{D}(u, \Omega)$) 是指

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|[g(x) + g(y)], \quad \text{几乎所有的 } (x, y) \in \Omega \times \Omega;$$

Hajlasz-Sobolev 空间 $\dot{\mathbf{M}}^{1,p}(\Omega)$ 为

$$\|u\|_{\dot{\mathbf{M}}^{1,p}(\Omega)} := \inf_{g \in \mathbb{D}(u, \Omega)} \|g\|_{L^p(\Omega)} < \infty$$

的函数 u 的全体. 另一方面, Hajlasz 等 [5, 17] 证明了 Hajlasz-Sobolev $\dot{\mathbf{M}}^{1,p}$ -延拓域一定是 Ahlfors n -正则域. 相应地, 当 $s \in (0, 1)$ 和 $p > 1$ 时, 分数次 Sobolev $\dot{\mathbf{B}}_{p,p}^s$ -延拓域也被证明是 Ahlfors n -正则域 (参见文献 [18]). 当 $p > n$ 和 $\phi(t) = t^p$ 时, 由于 $\dot{\mathbf{B}}_{p,p}^{n/p}(\Omega) = \dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$, 定理 1.1 是已知的.

第 4 节证明定理 1.1(i), 其关键在于找到合适的线性延拓算子并且其是 $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ 到 $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子. 若使用 Jones [9] 的算子, 则必须在 $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ 找到合适的反射 Whitney 方体. 在已知 Ω 是 Ahlfors n -正则域的情形下, 用文献 [5, 10, 18, 19] 中定义的反射方体可以定义延拓算子, 但不能证明其有界性, 因为这样的反射方体不具有有限覆盖性质, Young 函数可能在 ∞ 处指数增长, 详见注 4.1. 但是, 注意到文献 [4, 16] 中的反射拟方体有限覆盖, 更多反射拟方体的性质见第 3 节. 用这样的反射拟方体来定义延拓算子, 通过 ϕ 的凸性和精确的计算, 我们证明了算子的有界性.

第 5 节借助文献 [5, 17, 18] 的方法, 证明定理 1.1(ii). 关键在于证明 Ω 满足下面的嵌入不等式: 存在正的常数 $C_I(\Omega)$ 和 $C(n)$ 满足

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{B \cap \Omega} \exp\left(\frac{|u-c|}{\alpha}\right) dx \leq C(n)|B|, \quad \forall B \subset \mathbb{R}^n, \quad \alpha > C_I(\Omega)\|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)}. \quad (1.5)$$

进一步通过截断函数 u 的 $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ -范数、 ϕ 的次指数增长性和文献 [5, 17, 18] 的方法, 证明了 Ω 是 Ahlfors n -正则域.

此外, 有下面的推论.

推论 1.1 假设 ϕ 是 Young 函数且满足条件 (1.2) 和 (1.3). 对任意的区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 下面的表述等价:

- (i) Ω 是 Ahlfors n -正则域;
- (ii) Ω 是 $\dot{\mathbf{B}}^\phi$ -延拓域;
- (iii) Ω 满足嵌入 (1.5).

下面说明定理 1.1(ii) 的条件 (1.3).

注 1.1 在证明定理 1.1(ii) 时需要用到条件 (1.3). 但没有条件 (1.3) 时, 我们不知定理 1.1(ii) 结论是否成立.

最后对常用表达作统一的约定. 记 C 为与参数无关的常数, 具有下标的常数是确定的, 不会改变, 如 C_ϕ . $C(a, b, \dots)$ 表示仅依赖于参数 $a, b, \dots$ 的常数, 这些常数可以在行与行之间变化. 记 u_X 为 u 在 X 的平均, 即 $u_X = f_X u \equiv \frac{1}{|X|} \int_X u dx$. 令 Ω 是区域且 $x \in \mathbb{R}^n$, 记 $d(x, \Omega)$ 为从 x 到 Ω 的距离. ω_n 是指 $\mathbb{R}^n$ 中单位球 S^{n-1} 的面积.

2 Orlicz-Besov 空间的一些性质

本节给出 Orlicz-Besov 空间的一些基本性质.

引理 2.1 假设 ϕ 是 Young 函数. 对任意区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 和任意球 $B \subset \mathbb{R}^n$, 有 $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega) \subset L^1(B \cap \Omega)$. 特别地, 若 Ω 有界, 则 $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

证明 任取 $\alpha > \|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)}$, 由定义有

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dydx}{|x - y|^{2n}} \leq 1.$$

由 Fubini 定理知, 对几乎所有的 $x \in \Omega$, 有

$$\int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dy}{|x - y|^{2n}} < \infty.$$

固定一点 x , 任取 $B = B(z, r) \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $B \cap \Omega \neq \emptyset$, 对任意 $y \in B \cap \Omega$, 有 $|x - y| \leq |x| + |z| + r$, 于是,

$$\int_{B \cap \Omega} \phi\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{\alpha}\right) dy < \infty.$$

由 Jensen 不等式进一步知,

$$\phi\left(\int_{B \cap \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{\alpha} dy\right) < \infty,$$

于是,

$$\int_{B \cap \Omega} |u(y)| dy \leq |u(x)| + \int_{B \cap \Omega} |u(x) - u(y)| dy < \infty,$$

即 $u \in L^1(B \cap \Omega)$. 证毕. $\square$

引理 2.2 假设 ϕ 是 Young 函数且满足条件 (1.2). 对任意区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 有 $C_c^1(\Omega) \subset \dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$.

证明 假设 $L = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|Du\|_{L^\infty(\Omega)} > 0$. 令 $V = \text{supp } u \Subset W \Subset \Omega$, 则

$$\begin{aligned} H &:= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(z) - u(w)|}{\alpha}\right) \frac{dzdw}{|z - w|^{2n}} \\ &\leq \int_W \int_W \phi\left(\frac{|z - w|}{\alpha/L}\right) \frac{dzdw}{|z - w|^{2n}} + 2 \int_{\Omega \setminus W} \int_V \phi\left(\frac{L}{\alpha}\right) \frac{dzdw}{|z - w|^{2n}}. \end{aligned}$$

由 (1.2), 有

$$\begin{aligned} \int_W \int_W \phi\left(\frac{|z - w|}{\alpha/L}\right) \frac{dzdw}{|z - w|^{2n}} &\leq \int_V \int_{B(w, 2|\text{diam } W|)} \phi\left(\frac{|z - w|}{\alpha/L}\right) \frac{dz}{|z - w|^{2n}} dw \\ &= n\omega_n \int_W \int_0^{2|\text{diam } W|} \phi\left(\frac{t}{\alpha/L}\right) \frac{dt}{t^{n+1}} dw \\ &= n\omega_n |W| \left(\frac{L}{\alpha}\right)^n \int_0^{2L|\text{diam } W|/\alpha} \phi(s) \frac{ds}{s^{n+1}} \\ &= n\omega_n |W| 2^{-n} |\text{diam } W|^{-n} \phi\left(\frac{2L|\text{diam } W|}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega \setminus W} \int_V \phi\left(\frac{1}{\alpha/L}\right) \frac{dzdw}{|z - w|^{2n}} &\leq 2\phi\left(\frac{L}{\alpha}\right) \int_V \int_{\Omega \setminus B(z, \text{dist}(V, W^c))} \frac{dw dz}{|z - w|^{2n}} \\ &\leq 2\omega_n \phi\left(\frac{L}{\alpha}\right) |V| \text{dist}(V, W^c)^{-n}. \end{aligned}$$

令 α 足够大, 由 ϕ 的凸性知 $H \leq 1$, 即 $u \in \dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$. 证毕. $\square$

第 4 节的证明需要下列 Poincaré 型不等式.

引理 2.3 假设 ϕ 是 Young 函数. 对任意球 $B \subset \mathbb{R}^n$ 和函数 $u \in \dot{\mathbf{B}}^\phi(B)$, 有

$$\int_B \phi\left(\frac{|u(x) - u_B|}{\alpha}\right) dx \leq \omega_n^2, \quad \forall \alpha > \|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(B)}$$

和

$$\int_B |u(x) - u_B| dx \leq \phi^{-1}(\omega_n^2) \|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(B)}.$$

证明 令 $u \in \dot{\mathbf{B}}^\phi(B)$. 对任意 $\alpha > \|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(B)}$, 由 Jensen 不等式知,

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{\int_B |u(x) - u_B| dx}{\alpha}\right) &\leq \int_B \phi\left(\frac{|u(x) - u_B|}{\alpha}\right) dx \\ &\leq \int_B \int_B \phi\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{\alpha}\right) dy dx \\ &\leq \omega_n^2 \int_B \int_B \phi\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dy dx}{|x - y|^{2n}} \\ &\leq \omega_n^2. \end{aligned}$$

因此,

$$\int_B |u(x) - u_B| dx \leq \alpha \phi^{-1}(\omega_n^2).$$

令 $\alpha \rightarrow \|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(B)}$, 可得

$$\int_B |u(x) - u_B| dx \leq \phi^{-1}(\omega_n^2) \|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(B)}.$$

证毕. □

通过引理 2.3 可得下面的嵌入. 记 $\text{BMO}(\Omega)$ 为全体有界平均震荡的函数, 即所有满足下列条件的函数 $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$:

$$\|u\|_{\text{BMO}(\Omega)} = \sup_{B \subset \Omega} \int_B |u(x) - u_B| dx < \infty.$$

推论 2.1 假设 ϕ 是 Young 函数. 对任意区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 有 $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega) \subset \text{BMO}(\Omega)$, 且对任意 $u \in \dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$, 有 $\|u\|_{\text{BMO}(\Omega)} \leq \phi^{-1}(\omega_n^2) \|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)}$.

3 Whitney 分解和反射拟方体

本节始终假设 Ω 是 Ahlfors n -正则域. 由文献 [4, 引理 2.1] 和 [5, 18] 知, $|\partial\Omega| = 0$, 及 $\text{diam } \Omega = \infty$ 当且仅当 $|\Omega| = \infty$. 记开集 $U := \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. 不失一般性, 假设 $U \neq \emptyset$. 显然, U 有如下 Whitney 分解.

引理 3.1 存在由 (闭) 方体组成的集合 $\mathscr{W} = \{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 满足

(i) $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$, 且对所有的 $i, k \in \mathbb{N}$, 当 $i \neq k$ 时, $Q_k^\circ \cap Q_i^\circ = \emptyset$;

(ii) $l(Q_k) \leq \text{dist}(Q_k, \partial\Omega) \leq 4\sqrt{n}l(Q_k)$;

(iii) 当 $Q_k \cap Q_i \neq \emptyset$ 时, $\frac{1}{4}l(Q_k) \leq l(Q_i) \leq 4l(Q_k)$.

相应于 $\mathscr{W}$, 有 U 的如下单位分解.

引理 3.2 存在一族 $\{\varphi_Q : Q \in \mathcal{W}\}$ 函数使得

- (i) 对每个 $Q \in \mathcal{W}$, $0 \leq \varphi_Q \in C_0^\infty(\frac{17}{16}Q)$;
- (ii) 对每个 $Q \in \mathcal{W}$, $|\nabla \varphi_Q| \leq L/l_Q$;
- (iii) $\sum_{Q \in \mathcal{W}} \varphi = \chi_U$.

关于 Whitney 分解和单位分解有如下经常使用的性质. 对任意 $Q \in \mathcal{W}$, 记 $N(Q)$ 为 Q 在 $\mathcal{W}$ 相邻的方体全体, 即

$$N(Q) := \{P \in \mathcal{W}, P \cap Q \neq \emptyset\}.$$

由引理 3.1(iii) 知, 存在仅依赖于 n 的整数 γ_0 使得对任意 $Q \in \mathcal{W}$ 有

$$\sharp N(Q) \leq \gamma_0. \quad (3.1)$$

再次使用引理 3.1(iii), 对任意 $P, Q \in \mathcal{W}$ 知,

$$P \in N(Q) \Leftrightarrow Q \in N(P) \Leftrightarrow \frac{9}{8}P \cap \frac{9}{8}Q \neq \emptyset \Leftrightarrow \varphi_Q \varphi_P \neq 0. \quad (3.2)$$

因此, 对任意 $Q \in \mathcal{W}$, 有

$$\frac{1}{|Q|} \int_U \varphi_Q(x) dx \leq \frac{1}{|Q|} \int_U \chi_{\frac{9}{8}Q}(x) dx \leq 4^n \gamma_0. \quad (3.3)$$

事实上, 由 (3.2) 知,

$$\frac{1}{|Q|} \int_U \chi_{\frac{9}{8}Q}(x) dx = \sum_{P \in N(Q)} \frac{1}{|Q|} \int_P \chi_{\frac{9}{8}Q}(x) dx.$$

再由引理 3.1(iii) 的 $l_Q \leq 4l_P$ 和 (3.1) 得

$$\frac{1}{|Q|} \int_U \chi_{\frac{9}{8}Q}(x) dx \leq \sum_{P \in N(Q)} \frac{|P|}{|Q|} \leq 4^n \gamma_0.$$

以下是文献 [4, 定理 2.4] 定义的 Whitney 方体的反射拟方体. 给定 $\epsilon > 0$, 令

$$\mathcal{W}_\epsilon := \left\{ Q \in \mathcal{W} : l_Q < \frac{1}{\epsilon} \text{diam } \Omega \right\}.$$

显然, 当 $\text{diam } \Omega = \infty$ 时, 对任意 $\epsilon > 0$, $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\epsilon$; 当 $\text{diam } \Omega < \infty$ 时, $\mathcal{W}_\epsilon \subsetneq \mathcal{W}$.

任给 $Q = Q(x_Q, l_Q) \in \mathcal{W}_\epsilon$, 取定 $x_Q^* \in \Omega$ 使得 $\text{dist}(Q, \Omega) = \text{dist}(x_Q^*, Q)$. 由引理 3.1(ii) 知,

$$\tilde{Q}^* := Q(x_Q^*, l_Q) \subset 10\sqrt{n}Q.$$

令

$$\tilde{Q}^{*\epsilon} := (\epsilon Q^* \cap \Omega) \setminus (\cup \{\epsilon P^* : P \in \mathcal{A}_Q^\epsilon\}),$$

其中

$$\mathcal{A}_Q^\epsilon := \{P \in \mathcal{W}_\epsilon : \epsilon \tilde{P}^* \cap \epsilon \tilde{Q}^* \neq \emptyset, l_P \leq \epsilon l_Q\}.$$

类似于文献 [4, 定理 2.4], 当 ϵ 足够小时, 定义 $\tilde{Q}^{*\epsilon}$ 为 $Q \in \mathcal{W}_\epsilon$ 的反射拟方体, 这些反射拟方体具有良好的性质. 事实上, 有如下结论 (具体证明可参见文献 [4, 定理 2.4] 的证明).

引理 3.3 令 $\epsilon_0 = [C_A(\Omega)/(2\gamma_0)]^{1/n}/(30\sqrt{n})$. 记 $Q^* = \tilde{Q}^{*\epsilon_0}$ 为 $Q \in \mathcal{W}_{\epsilon_0}$ 的反射拟方体, 则下面性质成立:

(i) 对每个 $Q \in \mathcal{W}_{\epsilon_0}$, 有 $Q^* \subset (10\sqrt{n}Q) \cap \Omega$;

(ii) 对每个 $Q \in \mathcal{W}_{\epsilon_0}$, 有 $|Q| \leq \gamma_1 |Q^*|$;

(iii) $\sum_{Q \in \mathcal{W}_{\epsilon_0}} \chi_{Q^*} \leq \gamma_2$.

上面的 γ_1 和 γ_2 是仅依赖于 n 和 $C_A(\Omega)$ 的正常数.

当 Ω 有界时, 令 $Q^* = \Omega$ 为任意方体 $Q \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_{\epsilon_0} \neq \emptyset$ 的反射拟方体. 记

$$\mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(k)} := \{Q \in N(P) : P \in \mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(k-1)}\}, \quad \forall k \geq 1,$$

其中 $\mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(0)} = \mathcal{W}_{\epsilon_0}$, 即 $\mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(k)}$ 是 $\mathcal{W}_{\epsilon_0}$ 的 k^{th} -邻域. 同时记

$$V^{(k)} := \bigcup \{x \in Q; Q \in \mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(k)}\}, \quad \forall k \geq 0. \quad (3.4)$$

已知 $Q \notin \mathcal{W}_{\epsilon_0}$ 时有 $Q^* = \Omega$. 由引理 3.1(iii) 得

$$\sum_{Q \in \mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(k)}} \chi_{Q^*} \leq \sum_{Q \in \mathcal{W}_{\epsilon_0}} \chi_{Q^*} + \#(\mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(k)} \setminus \mathcal{W}_{\epsilon_0}) \chi_{\Omega} \leq [\gamma_2 + \#(\mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(k)} \setminus \mathcal{W}_{\epsilon_0})] \chi_{\Omega}, \quad \forall k \geq 1.$$

对任意 $Q \in \mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(k)} \setminus \mathcal{W}_{\epsilon_0}$ 有 $l_Q \geq \frac{1}{\epsilon_0} \text{diam } \Omega$, 且存在某个 $\mathcal{W}_{\epsilon_0}$ 使得

$$l_Q \leq 4^k l_P \leq \frac{4^k}{\epsilon_0} \text{diam } \Omega.$$

再由引理 3.1(ii) 知, 对任意 $\bar{x} \in \Omega$, 有

$$Q \subset Q\left(\bar{x}, \text{diam } \Omega + 8\sqrt{n} \frac{4^k}{\epsilon_0} \text{diam } \Omega\right).$$

因此,

$$\#(\mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(k)} \setminus \mathcal{W}_{\epsilon_0}) \leq \left(1 + 8\sqrt{n} \frac{4^k}{\epsilon_0}\right)^n \epsilon_0^n \leq (\epsilon_0 + 4^{k+2}\sqrt{n})^n.$$

这说明

$$\sum_{Q \in \mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(k)}} \chi_{Q^*} \leq \gamma_2 + (\epsilon_0 + 4^{k+2}\sqrt{n})^n, \quad \forall k \geq 1. \quad (3.5)$$

4 定理 1.1(i) 的证明

只需证明存在有界线性算子 $E : \dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega) \rightarrow \dot{\mathbf{B}}^\phi(\mathbb{R}^n)$ 使得对任意 $u \in \dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ 有 $Eu|_\Omega = u$. 对任意 $u \in \dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$, 定义

$$Eu(x) \equiv \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \partial\Omega, \\ \sum_{Q \in \mathcal{W}} \varphi_Q(x) u_{Q^*}, & x \in U, \end{cases}$$

其中 $\mathcal{W}$ 是引理 3.1 中的 U 的 Whitney 方体且 $\{\varphi_Q\}_{Q \in \mathcal{W}}$ 是引理 3.2 的单位分解的函数, Q^* 是引理 3.3 中的 $Q \in \mathcal{W}_{\epsilon_0}$ 反射拟方体. 若 $Q \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_{\epsilon_0}$ (当 Ω 有界), 则 $Q^* = \Omega$. 由引理 2.1 可知, $u_{Q^*} = \frac{1}{|Q^*|} \int_{Q^*} u \, dx$ 有限.

显然, E 是线性的且 $Eu|_{\Omega} = u$. 若 $\|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^{\phi}(\Omega)} = 0$, 则 u 和 Eu 是常值函数. 为了证明算子 $E: \dot{\mathbf{B}}^{\phi}(\Omega) \rightarrow \dot{\mathbf{B}}^{\phi}(\mathbb{R}^n)$ 的有界性, 由范数 $\|\cdot\|_{\dot{\mathbf{B}}^{\phi}(\mathbb{R}^n)}$ 定义, 只需找到仅依赖于 n 、 $C_A(\Omega)$ 和 ϕ 的常数 $M > 0$ 使得当 $\|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^{\phi}(\Omega)} = 1$ 和 $\alpha > M$ 时, 有

$$H(\alpha) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{|Eu(x) - Eu(y)|}{\alpha}\right) \frac{dydx}{|x - y|^{2n}} \leq 1. \quad (4.1)$$

下面证明 (4.1). 设 $\|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^{\phi}(\Omega)} = 1$. 注意到 $|\partial\Omega| = 0$, 有

$$\begin{aligned} H(\alpha) &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dydx}{|x - y|^{2n}} + 2 \int_U \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|Eu(x) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dydx}{|x - y|^{2n}} \\ &\quad + \int_U \int_U \phi\left(\frac{|Eu(x) - Eu(y)|}{\alpha}\right) \frac{dydx}{|x - y|^{2n}} \\ &=: H_1(\alpha) + 2H_2(\alpha) + H_3(\alpha). \end{aligned}$$

为了得到 (4.1), 只需对 $i = 1, 2, 3$ 时找到仅依赖于 n 、 $C_A(\Omega)$ 和 ϕ 的常数 $M_i \geq 1$ 使得当 $\alpha \geq M_i$ 时, $H_i(\alpha) \leq 1/4$. 事实上, 令 $M = M_1 + M_2 + M_3$, 当 $\alpha \geq M$ 时, 这给出了 $H(\alpha) \leq 1$.

首先, 令 $M_1 = 4$, 则当 $\alpha > 4$ 时, $\alpha/4 > 1$. 由 ϕ 的凸性和 $\|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^{\phi}(\Omega)} = 1$ 知,

$$H_1(\alpha) \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{\alpha/4}\right) \frac{dydx}{|x - y|^{2n}} \leq \frac{1}{4}.$$

下面, 为了找 M_2 和 M_3 , 考虑两种情形: $\text{diam } \Omega = \infty$ 和 $\text{diam } \Omega < \infty$.

情形 $\text{diam } \Omega = \infty$. 先找 M_2 . 任取 $x \in U$ 和 $y \in \Omega$, 由引理 3.2(iii) 知,

$$Eu(x) - u(y) = \sum_{Q \in \mathcal{W}} \varphi_Q(x) [u_{Q^*} - u(y)].$$

再由 ϕ 的凸性和 Jensen 不等式, 有

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{|Eu(x) - u(y)|}{\alpha}\right) &\leq \phi\left(\sum_{Q \in \mathcal{W}} \varphi_Q(x) \frac{|u_{Q^*} - u(y)|}{\alpha}\right) \\ &\leq \sum_{Q \in \mathcal{W}} \varphi_Q(x) \phi\left(\int_{Q^*} \frac{|u(z) - u(y)|}{\alpha} dz\right) \\ &\leq \sum_{Q \in \mathcal{W}} \varphi_Q(x) \int_{Q^*} \phi\left(\frac{|u(z) - u(y)|}{\alpha}\right) dz. \end{aligned}$$

若 $\varphi_Q(x) \neq 0$, 则 $x \in \frac{17}{16}Q$. 对任意 $z \in Q^*$, 由 $Q^* \subset 10\sqrt{n}Q$ 知, $|x - z| \leq 20nl(Q)$. 因为

$$|x - y| \geq d(x, \Omega) \geq l(Q),$$

所以,

$$|x - z| \leq 20n|x - y|,$$

从而,

$$|y - z| \leq |x - y| + |x - z| \leq 21n|x - y|.$$

进而,

$$\int_{\Omega} \phi\left(\frac{|Eu(x) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dy}{|x - y|^{2n}} \leq (21n)^{2n} \sum_{Q \in \mathcal{W}} \varphi_Q(x) \int_{Q^*} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(z) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dz dy}{|z - y|^{2n}}.$$

由引理 3.3(ii) 和不等式 (3.3) 知,

$$\begin{aligned} H_2(\alpha) &\leq 2(21n)^{2n} \int_U \sum_{Q \in \mathcal{W}} \varphi_Q(x) \int_{Q^*} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(z) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dz dy}{|y - z|^{2n}} dx \\ &\leq 2\gamma_1(21n)^{2n} \sum_{Q \in \mathcal{W}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_U \varphi_Q(x) dx\right) \int_{Q^*} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(z) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dz dy}{|y - z|^{2n}} \\ &\leq 2\gamma_1 4^n \gamma_0 (21n)^{2n} \sum_{Q \in \mathcal{W}} \int_{Q^*} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(z) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dz dy}{|y - z|^{2n}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

再由引理 3.3(iii) 可得

$$H_2(\alpha) \leq 2\gamma_1 4^n \gamma_0 \gamma_2 (21n)^{2n} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(z) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dz dy}{|y - z|^{2n}}.$$

令 $M_2 = 8\gamma_1 4^n \gamma_0 \gamma_2 (21n)^{2n}$. 利用 ϕ 的凸性可知, 当 $\alpha > M_2$ 时, 有 $H_2(\alpha) \leq 1/4$.

下面找 M_3 . 对任意 $x \in U$, 令

$$\begin{aligned} X_1(x) &:= \left\{y \in U : |x - y| \geq \frac{1}{132n} \max\{d(x, \Omega), d(y, \Omega)\}\right\}, \\ X_2(x) &:= U \setminus X_1(x) = \left\{y \in U : |x - y| < \frac{1}{132n} \max\{d(x, \Omega), d(y, \Omega)\}\right\}, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} H_3(\alpha) &= \int_U \int_{X_1(x)} \phi\left(\frac{|Eu(x) - Eu(y)|}{\alpha}\right) \frac{dy dx}{|x - y|^{2n}} + \int_U \int_{X_2(x)} \phi\left(\frac{|Eu(x) - Eu(y)|}{\alpha}\right) \frac{dy dx}{|x - y|^{2n}} \\ &=: H_{31}(\alpha) + H_{32}(\alpha). \end{aligned}$$

下面只需证明, 当 $i = 1, 2$ 时, 存在 $M_{3i} \geq 1$ 使得当 $\alpha > M_{3i}$ 时有 $H_{3i} \leq 1/8$. 若已找到 M_{31} 和 M_{32} 成立, 则令 $M_3 := \max\{M_{31}, M_{32}\}$; 可知当 $\alpha > M_3$ 时, 有 $H_3 \leq 1/4$.

先找 M_{31} . 对 $x \in U$ 和 $y \in X_1(x)$, 由引理 3.2(iii) 知,

$$\begin{aligned} Eu(x) - Eu(y) &= \sum_{P \in \mathcal{W}} \sum_{Q \in \mathcal{W}} \varphi_Q(x) \varphi_P(y) [u_{Q^*} - u_{P^*}] \\ &= \sum_{P \in \mathcal{W}} \sum_{Q \in \mathcal{W}} \varphi_Q(x) \varphi_P(y) \int_{Q^*} \int_{P^*} [u(z) - u(w)] dz dw. \end{aligned}$$

由 ϕ 的凸性和 Jensen 不等式, 可得

$$\phi\left(\frac{|Eu(x) - Eu(y)|}{\alpha}\right) \leq \sum_{Q \in \mathcal{W}} \sum_{P \in \mathcal{W}} \varphi_Q(x) \varphi_P(y) \phi\left(\int_{Q^*} \int_{P^*} \frac{|u(z) - u(w)|}{\alpha} dz dw\right)$$

$$\leq \sum_{Q \in \mathcal{W}} \sum_{P \in \mathcal{W}} \varphi_Q(x) \varphi_P(y) \int_{Q^*} \int_{P^*} \phi\left(\frac{|u(z) - u(w)|}{\alpha}\right) dw dz.$$

当 $x \in Q$ 和 $z \in Q^*$ 时, 由 $Q^* \subset 10\sqrt{n}Q$ 知,

$$|x - z| \leq 10nl_Q \leq 10nd(x, \Omega).$$

类似地, 对 $y \in P$ 和 $w \in P^*$, 有 $|y - w| \leq 10nd(y, \Omega)$. 若 $y \in X_1(x)$, 即

$$132n|x - y| \geq \max\{d(x, \Omega), d(y, \Omega)\},$$

则有

$$|z - w| \leq |x - z| + |x - y| + |y - w| \leq 2641n|x - y|.$$

所以,

$$H_{31}(\alpha) \leq (2641n)^{2n} \int_U \int_{X_1(x)} \sum_{Q \in \mathcal{W}} \sum_{P \in \mathcal{W}} \varphi_Q(x) \varphi_P(y) \int_{Q^*} \int_{P^*} \phi\left(\frac{|u(z) - u(w)|}{\alpha}\right) \frac{dw dz}{|z - w|^{2n}} dy dx.$$

由引理 3.3(ii) 和 (3.3) 知,

$$\begin{aligned} H_{31}(\alpha) &\leq (2641n)^{2n} \gamma_1^2 \sum_{Q \in \mathcal{W}} \sum_{P \in \mathcal{W}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_U \varphi_Q(x) dx \frac{1}{|P|} \int_U \varphi_P(y) dy \right) \\ &\quad \times \int_{Q^*} \int_{P^*} \phi\left(\frac{|u(z) - u(w)|}{\alpha}\right) \frac{dw dz}{|z - w|^{2n}} \\ &\leq (2641n)^{2n} \gamma_1^2 (4^n \gamma_0)^2 \sum_{Q \in \mathcal{W}} \sum_{P \in \mathcal{W}} \int_{Q^*} \int_{P^*} \phi\left(\frac{|u(z) - u(w)|}{\alpha}\right) \frac{dw dz}{|z - w|^{2n}}. \end{aligned}$$

再由定理 3.3(iii) 得

$$H_{31}(\alpha) \leq (2641n)^{2n} \gamma_1^2 \gamma_2^2 (4^n \gamma_0)^2 \int_{\Omega} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(z) - u(w)|}{\alpha}\right) \frac{dw dz}{|z - w|^{2n}}.$$

令 $M_{31} = 8(2641n)^{2n} \gamma_1^2 \gamma_2^2 (4^n \gamma_0)^2$, 则当 $\alpha > M_{31}$ 时, 再次由 ϕ 的凸性得 $H_{31}(\alpha) \leq 1/8$.

再找 M_{32} . 对 $x \in U$ 且 $y \in X_2(x) \cap P$, 由引理 3.2(iii) 知,

$$\sum_{Q \in \mathcal{W}} [\varphi_Q(x) - \varphi_Q(y)] = 0,$$

所以,

$$Eu(x) - Eu(y) = \sum_{Q \in \mathcal{W}} [\varphi_Q(x) - \varphi_Q(y)] u_{Q^*} = \sum_{Q \in \mathcal{W}} [\varphi_Q(x) - \varphi_Q(y)] [u_{Q^*} - u_{P^*}].$$

使用引理 3.2(i) 和 3.2(ii) 得

$$|\varphi_Q(x) - \varphi_Q(y)| \leq L \frac{|x - y|}{l_Q} [\chi_{\frac{17}{16}Q}(x) + \chi_{\frac{17}{16}Q}(y)].$$

所以,

$$|Eu(x) - Eu(y)| \leq L \sum_{Q \in \mathcal{W}} \frac{|x - y|}{l_Q} [\chi_{\frac{17}{16}Q}(x) + \chi_{\frac{17}{16}Q}(y)] |u_{Q^*} - u_{P^*}|.$$

我们断言

$$|Eu(x) - Eu(y)| \leq 2L \sum_{Q \in N(P)} \frac{|x-y|}{l_Q} \chi_{\frac{9}{8}Q}(x) |u_{Q^*} - u_{P^*}|. \quad (4.3)$$

事实上, 因为 $y \in X_2(x)$, 所以,

$$|x-y| \leq \frac{1}{132n} \max\{d(x, \Omega), d(y, \Omega)\}.$$

令 $\bar{y} \in \bar{\Omega}$ 使得 $|y - \bar{y}| = d(y, \Omega)$, 则

$$d(x, \Omega) \leq |x - \bar{y}| \leq |x - y| + |y - \bar{y}| \leq \frac{1}{132n} d(x, \Omega) + \frac{1+132n}{132n} d(y, \Omega),$$

这说明

$$d(x, \Omega) \leq \frac{132n+1}{132n-1} d(y, \Omega).$$

类似可得

$$d(y, \Omega) \leq \frac{132n+1}{132n-1} d(x, \Omega).$$

所以,

$$|x-y| \leq \frac{1}{132n} \frac{132n+1}{132n-1} d(x, \Omega).$$

若 $y \in \frac{17}{16}Q$, 由 $y \in P$ 知, $Q \in N(P)$,

$$d(y, \Omega) \leq d(y, Q) + \max_{z \in Q} d(z, \Omega) \leq \frac{1}{16} \sqrt{n} l_Q + 4 \sqrt{n} l_Q \leq \frac{65}{16} \sqrt{n} l_Q,$$

因此,

$$|x-y| \leq \frac{1}{132n} \frac{132n+1}{132n-1} \times \frac{65}{16} \sqrt{n} l_Q \leq \frac{1}{32\sqrt{n}} l_Q,$$

说明 $x \in \frac{9}{8}Q$. 另一方面, 若 $x \in \frac{17}{16}Q$, 类似可得 $y \in \frac{9}{8}Q$, 即 $Q \in N(P)$. 所以, 当 $Q \notin N(P)$ 时,

$$\chi_{\frac{17}{16}Q}(x) + \chi_{\frac{17}{16}Q}(y) = 0.$$

当 $Q \in N(P)$ 时,

$$\chi_{\frac{17}{16}Q}(x) + \chi_{\frac{17}{16}Q}(y) \leq 2\chi_{\frac{9}{8}Q}(x).$$

所以 (4.3) 成立.

由引理 3.3(iii)、 ϕ 的凸性和 (4.3) 知,

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{|Eu(x) - Eu(y)|}{\alpha}\right) &\leq \phi\left(\sum_{Q \in N(P)} \frac{|x-y|}{l_Q} \chi_{\frac{9}{8}Q}(x) \frac{|u_{Q^*} - u_{P^*}|}{\alpha/2L}\right) \\ &\leq \frac{1}{\gamma_0} \sum_{Q \in N(P)} \chi_{\frac{9}{8}Q}(x) \phi\left(\frac{|x-y|}{l_Q} \frac{|u_{Q^*} - u_{P^*}|}{\alpha/2L\gamma_0}\right). \end{aligned}$$

因此,

$$H_{32}(\alpha) \leq \frac{1}{\gamma_0} \int_U \sum_{P \in \mathcal{W}} \int_{P \cap X_2(x)} \sum_{Q \in N(P)} \chi_{\frac{9}{8}Q}(x) \phi\left(\frac{|x-y|}{l_Q} \frac{|u_{Q^*} - u_{P^*}|}{\alpha/2L\gamma_0}\right) \frac{dydx}{|x-y|^{2n}}$$

$$= \frac{1}{\gamma_0} \int_U \sum_{P \in \mathscr{W}} \sum_{Q \in N(P)} \chi_{\frac{9}{8}Q}(x) \int_{P \cap X_2(x)} \phi\left(\frac{|x-y|}{l_Q} \frac{|u_{Q^*} - u_{P^*}|}{\alpha/2L\gamma_0}\right) \frac{dy}{|x-y|^{2n}} dx.$$

当 $x \in \frac{9}{8}Q$ 和 $y \in P \cap X_2(x)$ 时, 因为 $d(x, \Omega) \leq 4\sqrt{n}l_Q$, 所以,

$$|x-y| \leq \frac{1}{132n} \frac{132n+1}{132n-1} d(x, \Omega) \leq l_Q.$$

由条件 (1.2) 知,

$$\begin{aligned} & \int_{P \cap X_2(x)} \phi\left(\frac{|x-y|}{l_Q} \frac{|u_{Q^*} - u_{P^*}|}{\alpha/2L\gamma_0}\right) \frac{dy}{|x-y|^{2n}} \\ & \leq n\omega_n \int_0^{l_Q} \phi\left(\frac{t}{l_Q} \frac{|u_{Q^*} - u_{P^*}|}{\alpha/2L\gamma_0}\right) \frac{dt}{t^{n+1}} \\ & \leq n\omega_n (l_Q)^{-n} \left(\frac{|u_{Q^*} - u_{P^*}|}{\alpha/2L\gamma_0}\right)^n \int_0^{\frac{|u_{Q^*} - u_{P^*}|}{\alpha/2L\gamma_0}} \phi(s) \frac{ds}{s^{n+1}} \\ & \leq nC_\phi \omega_n (l_Q)^{-n} \phi\left(\frac{|u_{Q^*} - u_{P^*}|}{\alpha/2L\gamma_0}\right). \end{aligned}$$

结合 (3.3) 得

$$\begin{aligned} H_{32}(\alpha) & \leq nC_\phi \frac{1}{\gamma_0} \omega_n \int_U \sum_{P \in \mathscr{W}} \sum_{Q \in N(P)} (l_Q)^{-n} \chi_{\frac{9}{8}Q}(x) \phi\left(\frac{|u_{Q^*} - u_{P^*}|}{\alpha/2L\gamma_0}\right) dx \\ & \leq nC_\phi \frac{1}{\gamma_0} \omega_n \sum_{P \in \mathscr{W}} \sum_{Q \in N(P)} \left(\frac{1}{|Q|} \int_U \chi_{\frac{9}{8}Q}(x) dx\right) \phi\left(\frac{|u_{Q^*} - u_{P^*}|}{\alpha/2L\gamma_0}\right) \\ & \leq C_\phi n \omega_n 4^n \sum_{P \in \mathscr{W}} \sum_{Q \in N(P)} \phi\left(\frac{|u_{Q^*} - u_{P^*}|}{\alpha/2L\gamma_0}\right). \end{aligned}$$

对于每个 $P \in \mathscr{W}$ 和 $Q \in N(P)$, 由 Jensen 不等式得

$$\phi\left(\frac{|u_{Q^*} - u_{P^*}|}{\alpha/2L\gamma_0}\right) \leq \int_{Q^*} \int_{P^*} \phi\left(\frac{|u(z) - u(w)|}{\alpha/2L\gamma_0}\right) dz dw.$$

由引理 3.2(i) 知, $P^* \subset 10\sqrt{n}P$ 和 $Q^* \subset 10\sqrt{n}Q$. 因此, 对任意 $z \in P^*$, $w \in Q^*$, $Q \in N(P)$, 可得

$$|z-w| \leq 10\sqrt{n}(l_Q + l_P) \leq 50n \min\{l_Q, l_P\}.$$

利用引理 3.2(ii) 给出的 $|Q| \leq \gamma_1|Q^*|$ 和 $|P| \leq \gamma_1|P^*|$, 得到

$$|z-w|^{2n} \leq (50n)^{2n} (\gamma_1)^2 |Q^*| |P^*|.$$

因此,

$$\phi\left(\frac{|u_{Q^*} - u_{P^*}|}{\alpha/2L\gamma_0}\right) \leq (50n)^{2n} (\gamma_1)^2 \int_{Q^*} \int_{P^*} \phi\left(\frac{|u(z) - u(w)|}{\alpha/2L\gamma_0}\right) \frac{dz dw}{|z-w|^{2n}}.$$

进而,

$$H_{32}(\alpha) \leq C_\phi n \omega_n 4^{2n} (50n)^{2n} (\gamma_1)^2 \sum_{P \in \mathscr{W}} \sum_{Q \in N(P)} \int_{Q^*} \int_{P^*} \phi\left(\frac{|u(z) - u(w)|}{\alpha/2L\gamma_0}\right) \frac{dz dw}{|z-w|^{2n}}.$$

使用引理 3.3(iii) 可得

$$H_{32}(\alpha) \leq C_\phi n \omega_n 4^{2n} (50n)^{2n} (\gamma_1)^2 (\gamma_2)^2 \int_{\Omega} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(z) - u(w)|}{\alpha/2L\gamma_0}\right) \frac{dz dw}{|z - w|^{2n}}.$$

令 $M_{32} = 8L\gamma_0 C_\phi n \omega_n 4^{2n} (50n)^{2n} (\gamma_1)^2 (\gamma_2)^2$. 当 $\alpha > M_{32}$ 时, 有 $H_{32}(\alpha) \leq 1/8$.

情形 $\text{diam } \Omega < \infty$. 为了找 M_2 , 记

$$\begin{aligned} H_2(\alpha) &= \int_{V^{(2)}} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|Eu(x) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dy dx}{|x - y|^{2n}} + \int_{U \setminus V^{(2)}} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dy dx}{|x - y|^{2n}} \\ &=: H_{21}(\alpha) + H_{22}(\alpha), \end{aligned}$$

其中 $V^{(2)}$ 为 (3.4) 所定义. 只需对 $i = 1, 2$ 找到 M_{2i} 使得 $\alpha > M_{2i}$ 时, $H_{2i}(\alpha) \leq 1/8$.

关于 $H_{22}(\alpha)$, 任取 $Q \in \mathscr{W} \setminus \mathscr{W}_{\epsilon_0}^{(2)}$ 有 $N(Q) \cap \mathscr{W}_{\epsilon_0} = \emptyset$, 所以, 对 $P \in N(Q)$ 有 $P^* = \Omega$. 因此, 对任意 $x \in U \setminus V^{(2)}$, 使用引理 3.2 可得

$$Eu(x) = \sum_{P \in \mathscr{W}} \varphi_P(x) u_{P^*} = \sum_{P \in N(Q)} \varphi_P(x) u_{P^*} = u_{\Omega}.$$

所以,

$$H_{22}(\alpha) = \int_{U \setminus V^{(2)}} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u_{\Omega} - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dy dx}{|x - y|^{2n}}.$$

再由 Jensen 不等式, 可得

$$\begin{aligned} H_{22}(\alpha) &\leq \int_{U \setminus V^{(2)}} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(z) - u(y)|}{\alpha}\right) dz \frac{dy dx}{|x - y|^{2n}} \\ &= \int_{\Omega} \int_{U \setminus V^{(2)}} \frac{dx}{|x - y|^{2n}} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(z) - u(y)|}{\alpha}\right) dz dy \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{|\text{diam } \Omega|^{2n}}{|\Omega|} \int_{U \setminus V^{(2)}} \frac{dx}{|x - y|^{2n}} \right] \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(z) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dz}{|z - y|^{2n}}. \end{aligned}$$

对任意 $x \in U \setminus V^{(2)}$ 和 $y \in \Omega$, 因为存在 $Q \in \mathscr{W} \setminus \mathscr{W}_{\epsilon_0}$ 使得 $x \in Q$, 所以,

$$|x - y| \geq d(x, \Omega) \geq l_Q \geq \frac{1}{\epsilon_0} \text{diam } \Omega.$$

注意到由于 Ω 是 Ahlfors n -正则域, 因此始终有 $|\Omega| \geq C_A(\Omega) |\text{diam } \Omega|^n$. 因此,

$$\begin{aligned} \frac{|\text{diam } \Omega|^{2n}}{|\Omega|} \int_{U \setminus V^{(2)}} \frac{dx}{|x - y|^{2n}} &\leq \frac{1}{C_A(\Omega)} |\text{diam } \Omega|^n \int_{|x-y| > \frac{1}{\epsilon_0} \text{diam } \Omega} \frac{dx}{|x - y|^{2n}} \\ &\leq |\text{diam } \Omega|^n n \omega_n \int_{\frac{1}{\epsilon_0} \text{diam } \Omega}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} dr \\ &\leq \omega_n \frac{1}{C_A(\Omega)} \epsilon_0^n, \end{aligned}$$

从而可得

$$H_{22}(\alpha) \leq \omega_n \frac{1}{C_A(\Omega)} \epsilon_0^n \int_{\Omega} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(z) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dz dy}{|y - z|^{2n}}.$$

令 $M_{22} = 8\omega_n \frac{1}{C_A}(\Omega)\epsilon_0^n$. 再次使用 ϕ 的凸性可知, 当 $\alpha > M_{22}$ 时, 有 $H_{22}(\alpha) \leq 1/8$.

关于 $H_{21}(\alpha)$, 当 $x \in V^{(2)}$ 时, 有

$$\sum_{Q \in \mathcal{W}} \varphi_Q(x) = \sum_{Q \in \mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(3)}} \varphi_Q(x) = 1.$$

类似于情形 $\text{diam } \Omega = \infty$ 中估计 $H_2(\alpha)$ 时得到 (4.2) 的论证, 可得

$$H_{21}(\alpha) \leq 2\gamma_1 4^n \gamma_0 (21n)^{2n} \sum_{Q \in \mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(2)}} \int_{Q^*} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(z) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dz dy}{|y - z|^{2n}}.$$

又因为

$$\sum_{Q \in \mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(2)}} \chi_{Q^*} \leq \gamma_2 + (\epsilon_0 + 128\sqrt{n})^n,$$

所以,

$$H_{21}(\alpha) \leq 2\gamma_1 4^n \gamma_0 [\gamma_2 + (\epsilon_0 + 64\sqrt{n})^n] (21n)^{2n} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|u(z) - u(y)|}{\alpha}\right) \frac{dz dy}{|y - z|^{2n}}.$$

令 $M_{21} = 16\gamma_1 4^n \gamma_0 [\gamma_2 + (\epsilon_0 + 64\sqrt{n})^n] (21n)^{2n}$. 使用 ϕ 的凸性可知, 当 $\alpha > M_{21}$ 时有 $H_{21}(\alpha) \leq 1/8$.

下面找 M_3 . 已知

$$U \times U \subset [V^{(3)} \times V^{(3)}] \cup [V^{(2)} \times (U \setminus V^{(3)})] \cup [(U \setminus V^{(3)}) \times V^{(2)}] \cup [(U \setminus V^{(2)}) \times (U \setminus V^{(2)})].$$

记

$$\begin{aligned} H_3 &= \int_{V^{(3)}} \int_{V^{(3)}} \phi\left(\frac{|Eu(x) - Eu(y)|}{\alpha}\right) \frac{dy dx}{|x - y|^{2n}} \\ &\quad + 2 \int_{V^{(2)}} \int_{U \setminus V^{(3)}} \phi\left(\frac{|Eu(x) - Eu(y)|}{\alpha}\right) \frac{dy dx}{|x - y|^{2n}} \\ &\quad + \int_{U \setminus V^{(2)}} \int_{U \setminus V^{(2)}} \phi\left(\frac{|Eu(x) - Eu(y)|}{\alpha}\right) \frac{dy dx}{|x - y|^{2n}} \\ &=: H_{31}(\alpha) + 2H_{32}(\alpha) + H_{33}(\alpha). \end{aligned}$$

注意到, 对任意 $x, y \in U \setminus V^{(2)}$ 有 $Eu(x) = Eu(y) = u_{\Omega}$. 因此, $H_{33}(\alpha) = 0$. 为找 M_3 , 只需对 $i = 1, 2$ 找 M_{3i} 使得当 $\alpha > M_{3i}$ 时, 有 $H_{3i}(\alpha) \leq 1/8$.

对于 $H_{31}(\alpha)$, 类似于情形 $\text{diam } \Omega = \infty$ 中处理 $H_3(\alpha)$, 将那时的 γ_2 替换成 $\gamma_2 + (\epsilon_0 + 4^5 \sqrt{n})^n$, 那时的 M_3 看成 M_{31} , 以及可以证明当 $\alpha \geq M_{31}$ 时 $H_{31}(\alpha) \leq 1/8$.

对于 $H_{32}(\alpha)$, 注意到当 $y \in U \setminus V^{(2)}$ 时有 $Eu(y) = u_{\Omega}$, 因此,

$$H_{32}(\alpha) = 2 \int_{V^{(2)}} \int_{U \setminus V^{(3)}} \phi\left(\frac{|Eu(x) - u_{\Omega}|}{\alpha}\right) \frac{dy dx}{|x - y|^{2n}}.$$

由 $|\Omega| \geq C_A(\Omega) |\text{diam } \Omega|^n$ 和 Jensen 不等式知,

$$H_{32}(\alpha) \leq \int_{V^{(2)}} \int_{U \setminus V^{(3)}} \frac{dy}{|x - y|^{2n}} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|Eu(x) - u(z)|}{\alpha}\right) dx dz.$$

对于任意 $x \in V^{(2)}$ 和 $y \in U \setminus V^{(3)}$, 当 $Q \in \mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(3)} \setminus \mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(2)}$ 和 $y \in Q$ 时,

$$|x - y| \geq l(Q) \geq \frac{1}{\epsilon_0} \text{diam } \Omega.$$

因此,

$$\int_{U \setminus V^{(3)}} \frac{dy}{|x - y|^{2n}} \leq \epsilon_0^n (\text{diam } \Omega)^{-n}.$$

因为 $|\Omega| \geq C_A(\Omega) \text{diam } \Omega$, 所以,

$$H_{32}(\alpha) \leq \frac{1}{C_A(\Omega)} \epsilon_0^n (\text{diam } \Omega)^{-2n} \int_{V^{(2)}} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|Eu(x) - u(z)|}{\alpha}\right) dx dz.$$

任取 $x \in V^{(2)}$, 对 $i = 1, 2$, 都存在 $P_i \in \mathcal{W}_{\epsilon_0}^{(i)}$ 使得 $x \in P_2$ 且 $P_i \in N(P_{i-1})$. 已知 $l(P_0) \leq \frac{1}{\epsilon_0} \text{diam } \Omega$, 再使用引理 3.1, 可以得到

$$l(P_2) \leq 4^2 \frac{1}{\epsilon_0} \text{diam } \Omega.$$

因此, 对 $y \in \Omega$, 有

$$|x - y| \leq \text{dist}(x, \Omega) + \text{diam } \Omega \leq \text{diam } P_2 + \text{dist}(P_2, \Omega) + \text{diam } \Omega \leq 4^4 \frac{1}{\epsilon_0} \sqrt{n} \text{diam } \Omega.$$

进而,

$$\begin{aligned} H_{32}(\alpha) &\leq \frac{1}{C_A(\Omega)} \epsilon_0^n \left(4^4 \frac{1}{\epsilon_0} \sqrt{n}\right)^{2n} \int_{V^{(2)}} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{|Eu(x) - u(z)|}{\alpha}\right) \frac{dx dz}{|x - z|^{2n}} \\ &\leq \frac{1}{C_A(\Omega)} 4^{8n} \epsilon_0^{-n} n^n H_{21}(\alpha). \end{aligned}$$

当 $\alpha > M_{32} := \frac{8}{C_A(\Omega)} 4^{8n} \epsilon_0^{-n} n^n M_{21}$ 时, $H_{32}(\alpha) \leq 1/8$. 这完成了定理 1.1(i) 的证明.

注 4.1 引理 3.3(iii) 给出的反射拟方体 $\{Q^*\}$ 的有限覆盖性质在证明算子 E 的有界性中起到了重要作用. 注意到, 文献 [5, 10, 18] 中定义延拓算子时没有用到 $\{Q^*\}$, 而是用 $\{Q(x_Q^*, l_Q) \cap \Omega\}$, 其中 x_Q^* 是 $Q \in \mathcal{W}$ 中距离边界 Ω 最近的点. 需要指出的是 $\{Q(x_Q^*, l_Q) \cap \Omega, Q \in \mathcal{W}\}$ 没有有限覆盖性质, 但引理 3.3(iii) 说明 $\{Q^*\}$ 具有有限覆盖性质. 如果把 Eu 定义中的 u_{Q^*} 替换为 $u_{Q(x_Q^*, l_Q) \cap \Omega}$, 则就是文献 [5, 10, 18] 所定义的延拓, 记为 $\tilde{E}u$.

当 $p > n$ 和 $\phi(t) = t^p$ 时, 文献 [18] 证明了 $\tilde{E}: \dot{\mathbf{B}}_{pp}^{n/p}(\Omega) \rightarrow \dot{\mathbf{B}}_{pp}^{n/p}(\mathbb{R}^n)$ 的有界性, 关键是证明了

$$\frac{|\tilde{E}u(x) - \tilde{E}u(y)|^p}{|x - y|^{2n}} \leq \mathcal{M}\left(\frac{|u(z) - u(w)|^p}{|z - w|^{2n}} \chi_{\Omega \times \Omega}\right)(x, y),$$

其中 $\mathcal{M}$ 是经典的 Hardy-Littlewood 极大算子, 具体证明参见文献 [18, 定理 1.1, 第 968 页].

对于一般的 ϕ , 无法用文献 [18] 的论证通过标准极大函数给出 $\phi\left(\frac{\tilde{E}u(x) - \tilde{E}u(y)}{\alpha}\right) \frac{1}{|x - y|^{2n}}$ 的适当估计, 同时由于 $\{Q(x_Q^*, l_Q) \cap \Omega, Q \in \mathcal{W}\}$ 没有有限覆盖性质, 本文的论证也不成立. 因此, 并不知道是否可以得到算子 $\tilde{E}: \mathbf{B}^\phi(\Omega) \rightarrow \mathbf{B}^\phi(\mathbb{R}^n)$ 的有界性.

5 定理 1.1(ii) 的证明

此证明分为 3 步.

第 1 步 因为 Ω 是 $\dot{\mathbf{B}}^\phi$ - 延拓域, 所以存在有界线性算子 $E: \dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega) \rightarrow \dot{\mathbf{B}}^\phi(\mathbb{R}^n)$. 任取 $u \in \dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$, 可以找到 $Eu \in \dot{\mathbf{B}}^\phi(\mathbb{R}^n)$ 使得 $Eu = u$ 和 $\|Eu\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(\mathbb{R}^n)} \leq \|E\| \|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)}$. 由引理 2.3 知, $Eu \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 并且 $\|Eu\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leq \phi^{-1}(|S^1|^2) \|Eu\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(\mathbb{R}^n)}$. 由 John-Nirenberg 不等式可得

$$\int_B \exp \left(\frac{|Eu - (Eu)_B|}{C_{JN}(n) \|Eu\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^n)}} \right) dx \leq C(n) |B|, \quad \forall \text{ 球 } B \subset \mathbb{R}^n.$$

所以,

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{B \cap \Omega} \exp \left(\frac{|u - c|}{C(\phi, n, \Omega) \|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)}} \right) dx \leq C(n) |B|, \quad \forall \text{ 球 } B \subset \mathbb{R}^n. \quad (5.1)$$

第 2 步 对任意 $x \in \Omega$ 和 $0 < r < t < \text{diam } \Omega$, 定义辅助函数

$$u_{x,r,t}(z) = \begin{cases} 1, & z \in B_\Omega(x, r), \\ \frac{t - |x - z|}{t - r}, & z \in B_\Omega(x, t) \setminus B_\Omega(x, r), \\ 0, & z \in \Omega \setminus B_\Omega(x, t). \end{cases}$$

有如下引理.

引理 5.1 假设 ϕ 是 Young 函数且满足条件 (1.2). 对任意给定的 $x \in \Omega$ 和 $0 < r < t < \text{diam } \Omega$, 有 $u_{x,r,t} \in \dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ 且

$$\|u_{x,r,t}\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)} \leq 8\omega_n [C_\phi 4^n + 1] \left[\phi^{-1} \left(\frac{(t-r)^n}{|B(x, t) \cap \Omega|} \right) \right]^{-1}.$$

证明 记

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \int_\Omega \phi \left(\frac{|u_{x,r,t}(z) - u_{x,r,t}(w)|}{\alpha} \right) \frac{dz dw}{|z - w|^{2n}} \\ &= \int_{B(x,t) \cap \Omega} \int_{B(x,t) \cap \Omega} \phi \left(\frac{|u_{x,r,t}(z) - u_{x,r,t}(w)|}{\alpha} \right) \frac{dz dw}{|z - w|^{2n}} \\ & \quad + \int_{\Omega \setminus B(x,t)} \int_{B(x,t) \cap \Omega} \phi \left(\frac{|u_{x,r,t}(z)|}{\alpha} \right) \frac{dz dw}{|z - w|^{2n}} \\ &=: H_1(\alpha) + H_2(\alpha). \end{aligned}$$

只需证明当 $\alpha \geq C(n, \phi) [\phi^{-1}(\frac{(t-r)^n}{|B(x,t) \cap \Omega|})]^{-1}$ 时, 有 $H_1(\alpha) \leq 1/2$ 和 $H_2(\alpha) \leq 1/2$, 其中 $C(n, \phi) \geq 1$ 是仅依赖于 n 和 ϕ 的常数.

注意到

$$\begin{aligned} H_1(\alpha) &\leq \int_{B(x,t) \cap \Omega} \int_{B(w,t-r) \cap \Omega} \phi \left(\frac{|z - w|}{\alpha(t-r)} \right) \frac{dz}{|z - w|^{2n}} dw \\ & \quad + \int_{B(x,t) \cap \Omega} \int_{[B(z,2t) \cap \Omega] \setminus B(w,t-r)} \phi \left(\frac{1}{\alpha} \right) \frac{dz}{|z - w|^{2n}} dw. \end{aligned}$$

一方面, 由变量替换得

$$\int_{B(w,t-r) \cap \Omega} \phi \left(\frac{|z - w|}{\alpha(t-r)} \right) \frac{dz}{|z - w|^{2n}} \leq n\omega_n \int_0^{t-r} \phi \left(\frac{s}{\alpha(t-r)} \right) \frac{ds}{s^{n+1}}$$

$$\leq n\omega_n(t-r)^{-n}\alpha^{-n}\int_0^{1/\alpha}\phi(s)\frac{ds}{s^{n+1}}.$$

由 (1.2) 知,

$$\int_{B(z,t-r)\cap\Omega}\phi\left(\frac{|z-w|}{\alpha(t-r)}\right)\frac{dz}{|z-w|^{2n}}\leq nC_\phi\omega_n(t-r)^{-n}\phi\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

另一方面,

$$\int_{[B(w,2t)\cap\Omega]\setminus B(w,t-r)}\frac{dz}{|z-w|^{2n}}\leq\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(w,t-r)}\frac{dz}{|z-w|^{2n}}=\omega_n(t-r)^{-n}.$$

于是,

$$H_1(\alpha)\leq\omega_n(nC_\phi+1)\frac{|B(x,t)\cap\Omega|}{(t-r)^n}\phi\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

当 $\alpha\geq 2(nC_\phi+1)\omega_n[\phi^{-1}(\frac{(t-r)^n}{|B(x,t)\cap\Omega|})]^{-1}$ 时, 由 ϕ 的凸性可知, $H_1(\alpha)\leq 1/2$.

此外, 注意到

$$\begin{aligned} H_2(\alpha) &\leq \int_{[B(x,t)\cap\Omega]\setminus B(x,r)}\phi\left(\frac{t-|z-x|}{\alpha(t-r)}\right)\int_{\Omega\setminus B(x,t)}\frac{dw}{|z-w|^{2n}}dz \\ &\quad + \int_{B(x,r)\cap\Omega}\int_{\Omega\setminus B(x,t)}\phi\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{dw}{|z-w|^{2n}}dz. \end{aligned}$$

因为 $\Omega\setminus B(x,t)\subset\Omega\setminus B(z,t-|z-x|)$, 所以,

$$\int_{\Omega\setminus B(x,t)}\frac{dw}{|z-w|^{2n}}\leq\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(z,t-|z-x|)}\frac{dw}{|z-w|^{2n}}\leq\omega_n(t-|z-x|)^{-n},$$

从而,

$$\begin{aligned} H_2(\alpha) &\leq \int_{[B(x,t)\cap\Omega]\setminus B(x,r)}\phi\left(\frac{t-|z-x|}{\alpha(t-r)}\right)\omega_n(t-|z-x|)^{-n}dz \\ &\quad + \int_{B(x,r)\cap\Omega}\phi\left(\frac{1}{\alpha}\right)\omega_n(t-|z-x|)^{-n}dz \\ &\leq 2\omega_n\frac{|B(x,t)\cap\Omega|}{(t-r)^n}\left[\sup_{s\in(0,1]}\phi\left(\frac{s}{\alpha}\right)\frac{1}{s^n}+\phi\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]. \end{aligned}$$

又由

$$\sup_{s\in(2^{-j-1},2^{-j}]}\phi\left(\frac{s}{\alpha}\right)\frac{1}{s^n}\leq 2^n\int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}}\phi\left(\frac{s}{\alpha}\right)\frac{ds}{s^{n+1}},$$

可知

$$\sup_{s\in(0,1]}\phi\left(\frac{s}{\alpha}\right)\frac{1}{s^n}\leq 2^n\int_0^2\phi\left(\frac{s}{\alpha}\right)\frac{ds}{s^{n+1}}\leq 2^n\alpha^{-n}\int_0^{2/\alpha}\phi(s)\frac{ds}{s^{n+1}}\leq C_\phi 4^n\phi\left(\frac{1}{\alpha/2}\right).$$

因此,

$$H_2(\alpha)\leq 2(C_\phi 4^n+1)\omega_n\frac{|B_\Omega(x,t)|}{(t-r)^n}\phi\left(\frac{2}{\alpha}\right).$$

当 $\alpha=8(C_\phi 4^n+1)\omega_n[\phi^{-1}(\frac{(t-r)^n}{|B(x,t)\cap\Omega|})]^{-1}$ 时, 由 ϕ 的凸性知 $H_2(\alpha)\leq 1/2$. 证毕. $\square$

第 3 步 任意给定 $x \in \Omega$ 和 $0 < r < 2 \operatorname{diam} \Omega$. 对 $j \in \mathbb{N}$, 记 $b_0 = 1$ 和 $b_j \in (0, 1)$ 使得

$$|B(x, b_j r) \cap \Omega| = 2^{-1} |B(x, b_{j-1} r) \cap \Omega| = 2^{-j} |B(x, r) \cap \Omega|. \quad (5.2)$$

当 $j \geq 1$ 时, 记 $u_j = u_{x, b_{j+1}r, b_j r}$ 为引理 5.1 定义的函数. 由 (5.1) 知,

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{B(x, b_{j-1}r) \cap \Omega} \exp \left(\frac{|u_j - c|}{C(\phi, n, \Omega) \|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)}} \right) dy \leq C(n) r^n.$$

任取 $c \in \mathbb{R}$, 要么在 $B(x, b_{j+1}r) \cap \Omega$ 上, 要么在 $[B(x, b_{j-1}r) \setminus B(x, b_j r)] \cap \Omega$ 上, 总有 $|u_j - c| \geq 1/2$. 利用 (5.2) 可得

$$|B(x, b_{j+1}r) \cap \Omega| = |[B(x, b_{j-1}r) \setminus B(x, b_j r)] \cap \Omega| = 2^{-j-1} |B(x, r) \cap \Omega|.$$

进而, 对任意 $j \geq 1$, 有

$$2^{-j-1} |B(x, r) \cap \Omega| \exp \left(\frac{|u_j - c|}{C(\phi, n, \Omega) \|u_j\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)}} \right) \leq C(n) r^n.$$

作适当变形后取对数得

$$\frac{|u_j - c|}{C(\phi, n, \Omega) \|u_j\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)}} \leq \ln \left(2^j \frac{C(n) r^n}{|B(x, r) \cap \Omega|} \right).$$

因为

$$\|u_j\|_{\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)} \leq C(\phi, n) \left[\phi^{-1} \left(\frac{(b_j r - b_{j+1} r)^n}{|B(x, b_j r) \cap \Omega|} \right) \right]^{-1} = C(\phi, n) \left[\phi^{-1} \left(2^j \frac{(b_j r - b_{j+1} r)^n}{|B(x, r) \cap \Omega|} \right) \right]^{-1},$$

所以,

$$\frac{1}{C(\phi, n, \Omega)} \phi^{-1} \left(2^j \frac{(b_j r - b_{j+1} r)^n}{|B(x, r) \cap \Omega|} \right) \leq \ln \left(2^j \frac{C(n) r^n}{|B(x, r) \cap \Omega|} \right),$$

进而,

$$(b_j - b_{j+1})^n \leq 2^{-j} \frac{|B(x, r) \cap \Omega|}{r^n} \phi \left[C(\phi, n, \Omega) \ln \left(2^j \frac{2C(n) r^n}{|B(x, r) \cap \Omega|} \right) \right].$$

由 (1.3) 知, 对任意 $\delta > 0$, 有 $\phi(t) \leq C(\delta) e^{\delta t}$, $\forall t \geq 0$. 令 $\delta_0 = 1/2C(\phi, n, \Omega)$, 即 $C(\phi, n, \Omega) \delta_0 = 1/2$. 可得

$$\begin{aligned} (b_j - b_{j+1})^n &\leq C(\delta_0) [2C(n)]^{\delta_0 C(\phi, n, \Omega)} \left(2^{-j} \frac{|B(x, r) \cap \Omega|}{r^n} \right)^{1 - \delta_0 C(\phi, n, \Omega)} \\ &\leq C(\phi, n, \Omega) \left(\frac{|B(x, r) \cap \Omega|}{r^n} \right)^{1/2} 2^{-j/2}. \end{aligned}$$

于是,

$$b_1 = \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - b_{j+1}) \leq C(\phi, n, \Omega) \left(\frac{|B(x, r) \cap \Omega|}{r^n} \right)^{1/2n}.$$

若 $b_1 \geq 1/10$, 则得所求 $|B(x, r) \cap \Omega| \geq C(\phi, n, \Omega) r^n$. 若 $b_1 < 1/10$, 则存在点 $x' \in B(x, r) \cap \Omega$ 满足

$$|x - x'| = b_1 r + \frac{r}{5}.$$

令 $R = 2r/5$, 则

$$B(x, b_1 r) \subset B(x', R) \subset B(x, r) \quad \text{和} \quad B(x, b_1 r) \cap B\left(x', \frac{R}{2}\right) = \emptyset.$$

于是,

$$\begin{aligned} \left| B\left(x', \frac{R}{2}\right) \cap \Omega \right| &\leq \frac{1}{2} \left(|(B(x, r) \setminus B(x, b_1 r)) \cap \Omega| + \left| B\left(x', \frac{R}{2}\right) \cap \Omega \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(|B(x, b_1 r) \cap \Omega| + \left| B\left(x', \frac{R}{2}\right) \cap \Omega \right| \right) \\ &\leq \frac{1}{2} |B(x', R) \cap \Omega|. \end{aligned}$$

至此, 如果

$$|B(x', b'_1 R) \cap \Omega| = \frac{1}{2} |B(x', R) \cap \Omega|,$$

那么 $b'_1 \geq 1/2$. 得到 $B(x', R/2)$ 和 $b'_1 \geq 1/2$, 使用 $b_1 \geq 1/10$ 的方法可得

$$|B(x, r) \cap \Omega| \geq |B(x', R) \cap \Omega| \geq C(\phi, n, \Omega) R^n \geq C(\phi, n, \Omega) r^n.$$

定理 1.1(ii) 证毕.

参考文献

- 1 Piaggio M C. Orlicz spaces and the large scale geometry of Heintze groups. *Math Ann*, 2017, 368: 433–481
- 2 Gogatishvili A, Koskela P, Zhou Y. Characterizations of Besov and Triebel-Lizorkin spaces on metric measure spaces. *Forum Math*, 2011, 25: 787–819
- 3 Jonsson A, Wallin H. A Whitney extension theorem in L^p and Besov spaces. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 1978, 28: 139–192
- 4 Shvartsman P. Local approximations and intrinsic characterization of spaces of smooth functions on regular subsets of $\mathbb{R}^n$. *Math Nachr*, 2006, 279: 1212–1241
- 5 Hajlasz P, Koskela P, Tuominen H. Sobolev embeddings, extensions and measure density condition. *J Funct Anal*, 2008, 254: 1217–1234
- 6 Jonsson A, Wallin H. *Function Spaces on Subsets of $\mathbb{R}^n$* . Mathematical Reports, vol. 2. Providence: Amer Math Soc, 1984
- 7 DeVore R A, Sharpley R C. Besov spaces on domains in $\mathbf{R}^d$. *Trans Amer Math Soc*, 1993, 335: 843–864
- 8 Jones P W. Extension theorems for BMO. *Indiana Univ Math J*, 1980, 29: 41–66
- 9 Jones P W. Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces. *Acta Math*, 1981, 147: 71–88
- 10 Koskela P. Extensions and imbeddings. *J Funct Anal*, 1998, 159: 369–383
- 11 Rychkov V S. On restrictions and extensions of the Besov and Triebel-Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains. *J Lond Math Soc (2)*, 1999, 60: 237–257
- 12 Shvartsman P. On Sobolev extension domains in $\mathbf{R}^n$. *J Funct Anal*, 2010, 258: 2205–2245
- 13 Stein E M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton: Princeton University Press, 1970
- 14 Triebel H. Function spaces in Lipschitz domains and on Lipschitz manifolds. Characteristic functions as pointwise multipliers. *Rev Mat Complut*, 2002, 15: 475–524
- 15 Triebel H. *Function Spaces and Wavelets on Domains*. EMS Tracts in Mathematics. Zurich: European Mathematical Society, 2008
- 16 Shvartsman P. On extensions of Sobolev functions defined on regular subsets of metric measure spaces. *J Approx Theory*, 2007, 144: 139–161
- 17 Hajlasz P, Koskela P, Tuominen H. Measure density and extendability of Sobolev functions. *Rev Mat Iberoam*, 2008, 24: 645–669

- 18 Zhou Y. Fractional Sobolev extension and imbedding. Trans Amer Math Soc, 2015, 367: 959–979
19 Wang Z, Xiao J, Zhou Y. A solution to the Q -restriction-extension problem in uniform domains. Asian J Math, 2017, in press

Orlicz-Besov extension and Ahlfors n -regular domains

Tian Liang & Yuan Zhou

Abstract Let $n \geq 2$ and $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ be a Young function satisfying

$$\sup_{t>0} \int_0^t \frac{t^n}{\phi(t)} \frac{\phi(s)}{s^n} \frac{ds}{s} < \infty,$$

which guarantees the non-triviality of Besov-Orlicz spaces $\dot{\mathbf{B}}^\phi(\Omega)$ in any domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. In this paper, we prove that Ahlfors n -regular domains must be Besov-Orlicz $\dot{\mathbf{B}}^\phi$ -extension domains. Conversely, assuming additionally that ϕ grows sub-exponentially at ∞ , we prove that Besov-Orlicz $\dot{\mathbf{B}}^\phi$ -extension domains must be Ahlfors n -regular domains.

Keywords Besov-Orlicz spaces, Ahlfors n -regular domains, extension

MSC(2020) 42B35

doi: 10.1360/SSM-2020-0094