

关于 Hopf 曲面的模空间*

李庆忠

张锦豪

(中国科学院数学研究所, 北京 100080)

(复旦大学数学系, 上海 200433)

摘要 研究了 $S^1 \times (S^3/H)$ 上复结构的模空间, 这里 $H \subset U(2)$ 是有限阶 Abel 群, H 在 S^3 上的作用自由且真不连续.

关键词 复结构的形变 层上同调 Kodaira-Spencer 映射

一个 Hopf 曲面 V 是指一个紧的二维复流形, 它的万有复盖空间是 $\mathbb{C}_*^2 = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. 由 Kodaira 的结论^[1], V 可以表示为一个商空间 $\mathbb{C}_*^2/G$, 其中 G 由 $\mathbb{C}_*^2$ 的一些自同构生成, G 在 $\mathbb{C}_*^2$ 上的作用是自由的且真不连续.

令 B 是 $\mathbb{C}^2$ 中的单位球, 即 $B = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 < 1\}$. 若 g 是 $\mathbb{C}^2$ 的一个自同构, 且当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $g^n(B)$ 收敛于 0, 那么 g 被叫做一个收缩.

由文献[1], G 有下面的性质:

(1) G 包含一个收缩 g , 而 g 生成的无限循环子群在 G 中有一个有限指标;

(2) 若 G 是非 Abel 群, 那么通过对 $\mathbb{C}^2$ 的整体坐标的适当选择, G 是 $GL(2, \mathbb{C})$ 的一个子群.

当 V 的基本群 $\pi_1(V)$ 是无限循环群时, 称 V 为主 Hopf 曲面. Kodaira 证明了^[1] 主 Hopf 曲面与 $S^1 \times S^3$ 上的复结构等同, 且 $V = \mathbb{C}_*^2 / \langle g \rangle$, 这里 $g: (z, w) \mapsto (\alpha z + \lambda w^k, \beta w)$, $0 < |\alpha| \leq |\beta| < 1$, $(\alpha - \beta^k)\lambda = 0$. Dabrowski 证明了^[2, 3] 所有主 Hopf 曲面都可以互相形变, 但它们的整体模空间不存在. 由文献[4], 我们知道对有限子群 $H \subset U(2)$, 若 H 在 S^3 上的作用自由且真不连续, $K = \{x \in H \mid \det x = 1\} \neq \{I\}, \{\pm I\}$, 则 $S^1 \times (S^3/H)$ 上的复结构仍为 Hopf 曲面. 以下所涉及到的 H 均满足这些条件. 在文献[1], IV 中, Kodaira 构造了一个具体的非交换群 $H = \langle \sigma, \tau \rangle$, $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix}$, $\rho = \exp(i\pi/n)$, $n \geq 2$, 所对应的 $S^1 \times (S^3/H)$ 上所有复结构的模空间, 并证明了这个模空间是空心单位圆盘 $D^* = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$. 对一般的非交换群 H , 我们构造了 $S^1 \times (S^3/H)$ 上所有复结构的模空间仍是空心单位圆盘 D^* ^[5]. 本文考虑 H 为 Abel 群时, $S^1 \times (S^3/H)$ 上所有复结构的模空间问题. 有趣的是, 这时所有复结构的模空间的存在性取决于 H 的结构, 我们的主要结论是

定理 1 若 Abel 群 H 不是有限阶循环群, 那么 $S^1 \times (S^3/H)$ 上所有复结构的精细模空间存

在;若 H 是有限阶循环群,那么连 $S^1 \times (S^3/H)$ 上所有复结构的粗糙模空间也不存在.

文中使用的方法同文献[5]中的方法类似,直接计算 $\dim H^1(V, \Theta)$, 这与文献[1], IV 中使用的方法不同.

1 $H^1(V, \Theta)$ 维数的计算

因为 $H \subset U(2)$ 为有限阶 Abel 群,由文献[6],我们可设

$$K = A_m = \left\langle \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle,$$

这样 K 为 m -阶循环群, a 为 1 的 m -次本原单位根, $m \geq 3$.

利用 K , 我们可以确定 H . 设

$$x = \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} \in H,$$

由 H 为 Abel 群, 且 $K \subset H$, 从等式

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

便可立得 $c=d=0$, 即 $x = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$, $|be|=1$.

首先, 由文献[4], 若商空间 $\mathbb{C}_*^2/G$ 为 Hopf 曲面且 $G \subset GL(2, \mathbb{C})$, 那么 $\mathbb{C}_*^2/G$ 为 $S^1 \times (S^3/H)$ 上的复结构的充要条件是 $G = \langle u \rangle \times H$, 这里 $u = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in D^*$. 下面我们证明, 若存在一正整数 q ,

使得对每个 $x = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \in H$, 有 $b = e^q$, 那么 $S^1 \times (S^3/H)$ 上有除上述 $\mathbb{C}_*^2/G$ 以外的复结构, 这里 $G = \langle u \rangle \times H$, $u = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in D^*$.

引理 1.1 $S^1 \times (S^3/H)$ 上仅以 $\mathbb{C}_*^2/G_u$ 为复结构的充要条件是 $H \neq A_m$, 这里 $G_u = \langle u \rangle \times H$, $u = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in D^*$.

证 我们先证: 若存在一正整数 q , 使对每个 $x = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \in H$, 有 $b = e^q$, 即 $H = A_m$ 包含于这种情况, 那么任取定 $\alpha \in D^*$, 记

$$u_\lambda: (z, w) \mapsto (\alpha^q z + \lambda w^q, \alpha w), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

$G_{u_\lambda} = \langle u_\lambda \rangle \times H$, 有 $\mathbb{C}_*^2/G_{u_\lambda}$ 为 $S^1 \times (S^3/H)$ 上的复结构. 事实上, 由文献[4], 当 $\lambda=0$ 时, $\mathbb{C}_*^2/G_{u_0}$ 为 $S^1 \times (S^3/H)$ 上的复结构. 下面我们利用复结构形变的基本知识^[7] 来证明 $\mathbb{C}_*^2/G_{u_\lambda}$ ($\lambda \neq 0$) 也为 $S^1 \times (S^3/H)$ 上的复结构. 因 H 在 S^3 上的作用自由, 从而在 $\mathbb{C}_*^2$ 上的作用自由, 故 $\mathbb{C}_*^2/H$ 为一个复流形. 令

$$\begin{aligned} g: \mathbb{C} \times (\mathbb{C}_*^2/H) &\rightarrow \mathbb{C} \times (\mathbb{C}_*^2/H), \\ (\lambda, [x]) &\mapsto (\lambda, [u_\lambda x]). \end{aligned}$$

由于 u_λ 为一个收缩, 且 $\langle u_\lambda \rangle$ 与 H 中的元素可交换, 故 g 是完全确定的, 且 $(\mathbb{C} \times (\mathbb{C}_*^2/H))/\langle g \rangle$ 为复流形. 令

$$\eta: (\mathbb{C} \times (\mathbb{C}_*^2/H))/\langle g \rangle \rightarrow \mathbb{C}$$

为自然投影, 那么易证

$$((\mathbb{C} \times (\mathbb{C}_*^2/H))/\langle g \rangle, \eta, \mathbb{C})$$

为一个复解析族, 且 $\eta^{-1}(\lambda) \cong \mathbb{C}_*^2/G_{u_\lambda}$. 由此, 从 $\mathbb{C}_*^2/G_{u_0}$ 的底流形为 $S^1 \times (S^3/H)$, 便知 $\mathbb{C}_*^2/G_{u_\lambda} (\lambda \neq 0)$ 也是 $S^1 \times (S^3/H)$ 上的复结构. 显然 $G_{u_\lambda} \subset GL(2, \mathbb{C})$.

另一方面, 若 V 为 $S^1 \times (S^3/H)$ 上的复结构, 由文献[1, 4], V 为 Hopf 曲面, 记 $V = \mathbb{C}_*^2/G$, 当 $G \subset GL(2, \mathbb{C})$ 时, G 为 Abel 群, 且 $G \cong \mathbb{Z} \oplus \text{Torsion}(G)$, 并且 $\text{Torsion}(G)$ 为有限阶的, $\mathbb{Z}$ 的生成元对应于 G 的元素为

$$u_\lambda: (z, w) \mapsto (\alpha^q z + \lambda w^q, \alpha w),$$

其中 $\lambda \in \mathbb{C}_*^*$, $\alpha \in D^*$. 我们先确定 $\text{Torsion}(G)$ 的元素. 令 $h \in \text{Torsion}(G)$. 由 Hartogs 定理, h 可以全纯延拓到 $\mathbb{C}^2$ 上, 即存在 $\mathbb{C}^2$ 上的全纯函数 φ, ψ , 使得

$$h: (z, w) \mapsto h(z, w) = (\varphi(z, w), \psi(z, w)),$$

$$\varphi(0, 0) = 0, \quad \psi(0, 0) = 0.$$

由 $u_\lambda \cdot h = h \cdot u_\lambda$, 我们有

$$\varphi(\alpha^q z + \lambda w^q, \alpha w) = \alpha^q \varphi(z, w) + \lambda \psi(z, w)^q, \quad (1.1)$$

$$\psi(\alpha^q z + \lambda w^q, \alpha w) = \alpha \psi(z, w). \quad (1.2)$$

通过解这个函数方程, 可得

$$h: (z, w) \mapsto (C(h)^q z, C(h)w),$$

这里 $C(h)$ 为依赖于 h 的常数. $C(h)^n = 1$, n 也仅由 h 决定. 这样便得到了一个到 $U(1)$ 的子群的同构:

$$\Phi: \text{Torsion}(G) \rightarrow U(1),$$

$$h \mapsto C(h).$$

再利用 h 无不动点便得

$$\text{Torsion}(G) \cong \mathbb{Z}_n, \quad (n, q) = 1.$$

由此可知, 当 $G \subset GL(2, \mathbb{C})$ 时, $G \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$, 且由下面两个元素生成:

$$u_\lambda: (z, w) \mapsto (\alpha^q z + \lambda w^q, \alpha w), \quad \alpha \in D^*, \quad \lambda \in \mathbb{C}_*^*,$$

$$h: (z, w) \mapsto (b_z^q, bw),$$

b 是 1 的 n -次本原单位根, $(n, q) = 1$. 因 $K = A_m$, 而

$$A_m = \left\langle \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle \subset H = \langle h \rangle,$$

a 为 1 的 m -次本原单位根, 这样便立得 $H = A_m$. 证毕.

为了计算 $\dim H^1(\mathbb{C}_*^2/H, \Theta)$, 我们首先对 $G \subset GL(2, \mathbb{C})$ 的情况, 求复流形 $\text{Aut}(\mathbb{C}_*^2/G)$ 的维数, 因为对紧复流形 M , $\text{Aut}(M)$ 有一个自然的复 Lie 群结构.

当 $G \subset GL(2, \mathbb{C})$ 时, $G = G_u = \langle u \rangle \times H$, $u = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in D^*$. 因 G_u 为 Abel 群, 故 $\mathbb{C}_*^2/\langle u \rangle$ 为 $\mathbb{C}_*^2/G_u$ 的一个有限分支复盖. 若 $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}_*^2/G_u)$, 则 f 可提升到复盖空间 $\mathbb{C}_*^2, \mathbb{C}_*^2/\langle u \rangle$, 即存在

$\tilde{f} \in \text{Aut}(\mathbb{C}_*^2)$, $\tilde{f} \in \text{Aut}(\mathbb{C}_*^2/\langle u \rangle)$, 使图 1 交换, 其中 π 为自然投影.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_*^2 & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C}_*^2 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{C}_*^2/\langle u \rangle & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C}_*^2/\langle u \rangle \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{C}_*^2/G_u & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}_*^2/G_u \end{array}$$

图 1

下面我们求出 f 的具体表达式.

(1) $u = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in D^*$. 由于 $\tilde{f}$ 为 $\tilde{f}$ 的提升, 利用比较幂级数系数的方法可得

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} c_{10} & c_{01} \\ d_{10} & d_{01} \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}).$$

又 $\tilde{f}$ 为 f 的提升, 必有 $\tilde{f}H\tilde{f}^{-1} = H$, 从而得 $\tilde{f}K\tilde{f}^{-1} = K$, 由此得 $c_{01} = d_{10} = 0$, 或 $c_{10} = d_{01} = 0$. 这里 $\text{Aut}(\mathbb{C}_*^2/G_u)$ 由对角阵决定,

故 $\dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}(\mathbb{C}_*^2/G_u) = 2$.

(2) $\alpha = \beta^q$, 即 $u = \begin{pmatrix} \beta^q & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. 同样由 $\tilde{f}$ 为 $\tilde{f}$ 的提升, 利用比较幂级数系数的方法得

$$\tilde{f}: (z, w) \mapsto (cz + bw^q, dw), \quad cd \neq 0.$$

若令

$$K = \left\langle \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle = \langle v \rangle,$$

由 $\tilde{f} \cdot v = v \cdot \tilde{f}$, 使得 $ba = a^{-q}b$, 从而仅当 $q \equiv m-1 \pmod{m}$ 时, $b \neq 0$. 这里的 m 由 K 唯一决定, $v = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, a 为 m -次本原单位根. 同样, 若 $h = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in H$, $h \notin K$, 从 $\tilde{f} \cdot h = h \cdot \tilde{f}$, 有仅当 $s = t^q$, $q \equiv m-1 \pmod{m}$ 时, 有 b 自由. 总之, 仅当 $q \equiv m-1 \pmod{m}$, 且 H 的每个元素 $h = \begin{pmatrix} t^q & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ 时, b 才能自由, 否则 $b = 0$. 这说明: 仅当 H 的所有元素 $h = \begin{pmatrix} t^q & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$, 且 $q \equiv m-1 \pmod{m}$ 时, $\dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}(\mathbb{C}_*^2/G_u) = 3$, 否则 $\dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}(\mathbb{C}_*^2/G_u) = 2$.

(3) $\beta = \alpha^q$, 即 $u = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^q \end{pmatrix}$. 同 (2) 一样可得, 当 $q \equiv m-1 \pmod{m}$ 且 H 的所有元素 $h = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^q \end{pmatrix}$ 时, 有 $\dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}(\mathbb{C}_*^2/G_u) = 3$, 否则 $\dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}(\mathbb{C}_*^2/G_u) = 2$.

(4) $\alpha \neq \beta^q$, $\beta \neq \alpha^q$, $\forall q \in \mathbb{N}^+$. 由 $\tilde{f}$ 为 $\tilde{f}$ 的提升, 利用幂级系数的比较可得 $\tilde{f} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$. 这便有 $\dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}(\mathbb{C}_*^2/G_u) = 2$.

由 $S^1 \times (S^3/H)$ 的第一、第二 Betti 数 $b_1 = b_2 = 0$, 便易得陈类 $c_1 = c_2 = 0$. 令 Θ 为 $\mathbb{C}_*^2/G_u$ 上全纯切向量场的芽层, 由 Serre 对偶关系,

$$H^2(\mathbb{C}_*^2/G_u, \Theta) \cong H^0(\mathbb{C}_*^2/G_u, \Omega^2(T^*\mathbb{C}_*^2/G_u)).$$

但用后面引理 1.3 的类似证法可证

$$H^0(\mathbb{C}_*^2/G_u, \Omega^2(T^*\mathbb{C}_*^2/G_u)) = 0.$$

故

$$H^2(\mathbb{C}_*^2/G_u, \Theta) = 0.$$

由 Riemann-Roch-Hirzebruch 定理,

$$h^2 - h^1 + h^0 = \frac{1}{12} (c_1^2 + c_2) = 0.$$

这便得

$$h^1 = h^0, \quad h^1 = \dim H^1(\mathbb{C}_*^2/G_u, \Theta).$$

由于 $\mathbb{C}_*^2/G_u$ 为线性变换群 G_u 在 $\mathbb{C}_*^2$ 上作用的轨道空间, 便易得

$$h^0 = \dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}(\mathbb{C}_*^2/G_u).$$

从上面的论证和引理 1.1 的证明有

引理 1.2 设 $G_u = \langle u \rangle \times H$, $u = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in D^*$, 那么我们有表 1.

引理 1.3 若 $H = A_m$, $u: (z, w) \mapsto (\alpha^q z + \lambda w^q, \alpha w)$, $q \equiv m-1 \pmod{m}$, 那么

$$h^1 = \dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathbb{C}_*^2/G_u, \Theta) = 2,$$

其中 $G_u = \langle u \rangle \times H$, $\lambda \in \mathbb{C}_*^*$, $\alpha \in D^*$.

证 由上面的论证, $h^1 = h^0 = \dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{C}_*^2/G_u, \Theta)$.

由引理的假设, $\mathbb{C}_*^2/G_u$ 由自同构 u 和 $v = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$

决定. 而这两个解析自同构可以看作流形 $\mathbb{C}_*^2/G_u$ 的转换函数, 这样 $\mathbb{C}_*^2/G_u$ 的切丛有转换矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha^q & q\lambda w^{q-1} \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

因此, 为了在 $\mathbb{C}_*^2/G_u$ 上得到一个整体向量场, 仅需找两个 $\mathbb{C}^2$ 上的全纯函数 f, g 满足下列条件:

$$\begin{cases} f(\alpha^q z + \lambda w^q, \alpha w) = \alpha^q f(z, w) + q\lambda w^{q-1} g(z, w), \\ g(\alpha^q z + \lambda w^q, \alpha w) = \alpha g(z, w) \end{cases}$$

且

$$\begin{cases} f(az, a^{-1}w) = af(z, w), \\ g(az, a^{-1}w) = a^{-1}g(z, w). \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases} f(z, w) = bz + cw^q, \\ g(z, w) = \frac{b}{q} w. \end{cases}$$

这样仅 b, c 两个自由量, 故 $\mathbb{C}_*^2/G_u$ 上全纯切向量场的维数为 2, 即 $h^1(\mathbb{C}_*^2/G_u) = 2$. 证毕.

2 模空间

我们先回忆一下基本定义^[6]. 设有一个复空间的类 $\mathcal{Z}$, 在 $\mathcal{Z}$ 上有一个全纯等价关系 “ $\sim$ ”. 我们要考察等价类的集 $\mathcal{Z}/\sim$.

定义 2.1 对 $\mathcal{Z}$ 来说有一个精细的模空间, 是指有一个复空间 M 和 $\mathcal{Z}$ 的对象的复解析族 $\mathcal{V} = (V, p, M)$, 使得对 $\mathcal{Z}$ 的对象的每一个复解析族 $\mathcal{W} = (W, q, S)$, 存在唯一的全纯映射 $f: S \rightarrow M$, 满足: $\mathcal{W}$ 是局部同构于 f^*v .

因为只有很少的类 $\mathcal{Z}$ 存在精细的模空间, 人们也考虑弱一点的概念.

设有一个复空间 M , 它的底集是 $\mathcal{U}/\sim$. 对 $\mathcal{U}$ 的对象的一个复解析族 $(W, q, S) = \{X_s\}_{s \in S}$, 有一个映射

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_w: S &\mapsto \mathcal{U}/\sim, \\ s &\mapsto [X_s],\end{aligned}$$

其中 $[\]$ 代表在 “ $\sim$ ” 下的等价类.

定义 2.2 对 $\mathcal{U}$ 来说, 有一个粗糙的模空间是指: 有一个复空间 M 和一个映射 $a: \mathcal{U}/\sim \rightarrow M$, 使得

(i) 对 $\mathcal{U}$ 的对象的每个解析族 (W, q, S) , 映射

$$a \circ \mathcal{V}_w: S \rightarrow M$$

是全纯的;

(ii) 若有一个复空间 N , 使得对 $\mathcal{U}$ 的对象的每个解析族 (W, q, S) 都存在唯一的全纯映射

$$\chi_w: S \rightarrow N,$$

那么我们总有一个映射 $\mu: M \rightarrow N$ 如下给出:

令 $m \in M$, $X = a^{-1}(m) \in \mathcal{U}/\sim$. 将 (X, a, m) 看作为一个复解析族, 定义 $\mu(m) = \chi_X(m)$, 那么 μ 是全纯的.

以下我们总认为 $(\alpha, \beta) \in D^* \times D^*$ 与矩阵 $u = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 等同.

引理 2.1 令 $M = D^* \times D^*$, 则 $\forall u = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in M$, $u' = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} \in M$, $\mathbb{C}_*^2/G_u$ 与 $\mathbb{C}_*^2/G_{u'}$ 双全纯等价的充要条件是存在 $h \in H$, 使 $u = hu'$ 或 $u = h \begin{pmatrix} \beta' & 0 \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix}$ 且 $v = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \in H$, 必有 $\tilde{v} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in H$.

证 由 $\mathbb{C}_*^2$ 为 $\mathbb{C}_*^2/G_u$ 与 $\mathbb{C}_*^2/G_{u'}$ 的万有复盖空间, 故 $\mathbb{C}_*^2/G_u$ 与 $\mathbb{C}_*^2/G_{u'}$ 双全纯等价的充要条件是存在 $\mathbb{C}_*^2$ 的双全纯自同构 F 满足

$$Fu = hu'F, FHF^{-1} = H, h = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

其中 $h \in H$. 从 $Fu = hu'F$, 得 $u = hu'$ 或 $\alpha = t\beta'$, $\beta = s\alpha'$. 若 $\alpha = t\beta'$, $\beta = s\alpha'$, 则 $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 这样从 $FHF^{-1} = H$ 便得, 当 $v = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in H$ 时, 有 $\tilde{v} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \in H$. 证毕.

我们首先对 $H \neq A_m$ 的情形构造一个整体的 Kuranishi 族.

取 $M = D^* \times D^*$, 因 $H \subset U(2)$ 为有限子群, 且 H 在 S^3 上的作用自由, 故在 $\mathbb{C}_*^2$ 上的作用自由, 从而 $\mathbb{C}_*^2/H$ 有自然的商流形结构, 即为复流形. 令

$$\begin{aligned}g: M \times (\mathbb{C}_*^2/H) &\rightarrow M \times (\mathbb{C}_*^2/H), \\ (u, [x]) &\mapsto (u, [ux]).\end{aligned}$$

由 u 与 H 的元素可交换, 从而 g 是完全确定的. 又 $\langle g \rangle$ 无不动点且真不连续, 这样

$$(M \times (\mathbb{C}_*^2/H))/\langle g \rangle$$

为复流形. 令

$$\eta: M \times (\mathbb{C}_*^2/H) \rightarrow (M \times (\mathbb{C}_*^2/H))/\langle g \rangle$$

为自然投影, $\pi: M \times (\mathbb{C}_*^2/H) \rightarrow M$ 为因子投影, 则这些映射显然全纯, 从而存在全纯映射

$$p: (M \times (\mathbb{C}_*^2/H))/\langle g \rangle \rightarrow M$$

使图 2 交换.

$$\begin{array}{ccc} M \times (\mathbb{C}_*^2/H) & \xrightarrow{\eta} & (M \times (\mathbb{C}_*^2/H))/\langle g \rangle \\ & \searrow \pi & \downarrow p \\ & & M \end{array}$$

图 2

由 η 为复盖映射知, p 为淹没. 又 p 的每个纤维 $p^{-1}(u) \cong \mathbb{C}_*^2/\langle u \rangle \times H$, 从而 p 的每个纤维紧. 这样便有复解析族

$$(\mathcal{M}, p, M),$$

其中 $\mathcal{M} = (M \times (\mathbb{C}_*^2/H))/\langle g \rangle$. 由上面的讨论, 当 $H \neq A_m$ 时, 它是 $S^1 \times (S^3/H)$ 上所有复结构的复解析族. 我们先证明它是一个 Kuranishi 族. 为此, 我们考虑图 3 所示的交换图:

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{C}_*^2/G_u, \Theta) & \xrightarrow{\gamma} & H^1(\mathbb{C}_*^2/\langle u \rangle, \Theta) \\ \uparrow \rho_u & & \uparrow \tilde{\rho}_u \\ T_u M & \xrightarrow{\text{id}} & T_u M \end{array}$$

图 3

其中 $\rho_u, \tilde{\rho}_u$ 为 Kodaira-Spencer 映射, $T_u M$ 为 M 在点 u 的切空间, id 为恒等映射. γ 的定义为: 若 $\theta \in H^1(\mathbb{C}_*^2/G_u, \Theta)$, 取 $\mathbb{C}_*^2/G_u$ 的一个适当的坐标复盖 $\{\mathcal{Z}_j\}$, 由 $\mathbb{C}_*^2/\langle u \rangle$ 为 $\mathbb{C}_*^2/G_u$ 的有限分支复盖, 我们要求 $\mathcal{Z}_j$ 为 $\mathbb{C}_*^2/G_u$ 的复盖邻域. θ 关于 $\{\mathcal{Z}_j\}$ 有一个链表示 $\{a_{jk}(z_k)\}$, 由 $\{\mathcal{Z}_j\}$ 自然对应 $\mathbb{C}_*^2/\langle u \rangle$ 上的一个复盖 $\{\mathcal{Z}'_j, \dots, \mathcal{Z}''_j\}$, 当 $\mathcal{Z}'_j \cap \mathcal{Z}''_k \neq \emptyset$ 时, 显然有 $\mathcal{Z}_j \cap \mathcal{Z}_k \neq \emptyset$, 这样 $\{a_{jk}(z_k)\}$ 可自然扩张为 $\{\mathcal{Z}'_j, \dots, \mathcal{Z}''_j\}$ 上的闭链 $\{a_{jk}^s(z_k)\}$, 它代表的上同调类 $\tilde{\theta} \in H^1(\mathbb{C}_*^2/\langle u \rangle, \Theta)$ 定义为 $\gamma(\theta)$. 由 $\rho_u, \tilde{\rho}_u$ 的定义可验证图 3 的交换性. 下面先考虑

$$\tilde{\rho}_u: T_u M \longrightarrow H^1(\mathbb{C}_*^2/\langle u \rangle, \Theta)$$

的核 $\text{Ker } \tilde{\rho}_u$. 由文献[2], Th 6.1, $v \in \text{Ker } \tilde{\rho}_u$ 的充要条件是存在 $\mathbb{C}_*^2$ 上的全纯向量场 $\mathcal{W} = (w^1, w^2)$, 使

$$v = u \circ w - w \circ u, \quad v \equiv \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}.$$

即

$$v \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (\alpha w^1(z_1, z_2), \beta w^2(z_1, z_2)) - (w^1(\alpha z_1, \beta z_2), w^2(\alpha z_1, \beta z_2)),$$

这里 $w^1(z_1, z_2), w^2(z_1, z_2)$ 为 $\mathbb{C}_*^2$ 上的全纯函数. 利用比较幂级系数的方法可证 $v=0$. 注意 v 是一个常值向量. 即 $\tilde{\rho}_u$ 为单射. 再由图的交换性得 ρ_u 也为单射. 但 $\dim_{\mathbb{C}} T_u M = \dim H^1(\mathbb{C}_*^2/G_u, \Theta) = 2$, 故 ρ_u 为同构, 即得 $(\mathcal{M}, p, M)$ 为一个 Kuranishi 族.

以下我们令 $M^* = M/H$. 由引理 2.1, 当存在 $v = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \in H$, 而 $\tilde{v} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \notin H$ 时, 任取 $u \neq u' \in M^*$, 有 $\mathbb{C}_*^2/G_u$ 与 $\mathbb{C}_*^2/G_{u'}$ 不双全纯等价. 从而 M^* 为 $S^1 \times (S^3/H)$ 上的所有复结构的模空间. 依复结构形变的基本定理^[7], M^* 也是精细的模空间.

若 $\forall u = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \in H$, 有 $\tilde{v} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in H$, 则 $S^1 \times (S^3/H)$ 上所有复结构的精细模空间是存在的. 事实上, 取 $\mathbb{Z}_2$ 的生成元为 $\varepsilon: (z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1)$. 则 $M^*/\mathbb{Z}_2$ 为 $S^1 \times (S^3/H)$ 上所有复结构的精细模空间. 这便完成了定理 1 前一部分的证明.

当 $H = A_m$ 时, 由引理 1.1 的证明可知, 取定 $\alpha \in D^*$, 则

$$((\mathbb{C} \times (\mathbb{C}_*^2/H))/\langle g \rangle, \eta, \mathbb{C})$$

为一复解析族, 其中

$$g: \mathbb{C} \times (\mathbb{C}_*^2/H) \rightarrow \mathbb{C} \times (\mathbb{C}_*^2/H), \\ (\lambda, [x]) \mapsto (\lambda, [u_\lambda x]),$$

这里

$$u_\lambda: (z_1, z_2) \mapsto (\alpha^q z_1 + \lambda z_2^q, \alpha z_2),$$

$q \equiv m-1 \pmod{m}$. 即 $\{\mathbb{C}_*^2/G_{u_\lambda} | \lambda \in \mathbb{C}\}$ 为一个复解析族. 但 $\lambda \neq 0$ 时, $\mathbb{C}_*^2/G_{u_\lambda}$ 均为双全纯等价的.

事实上, 取 $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{1/q} \end{pmatrix}$, 则

$$F \circ \begin{pmatrix} \alpha^q & \lambda(\cdot)^q \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^q & (\cdot)^q \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \circ F \quad \text{且} \quad F \circ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \circ F,$$

这里 $\begin{pmatrix} \alpha^q & \lambda(\cdot)^q \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ 表示映射 u_λ . 显然这样 F 诱导了 $\mathbb{C}_*^2/G_{u_\lambda}$ 与 $\mathbb{C}_*^2/G_{u_1}$ 的双全纯等价. 从而 $\lambda \neq 0$ 时, $\mathbb{C}_*^2/G_{u_\lambda}$ 均为双全纯等价的. 但 $\lambda = 0$ 时, 由引理 1.2, 1.3,

$$\dim H^1(\mathbb{C}_*^2/G_{u_1}, \Theta) \neq \dim H^1(\mathbb{C}_*^2/G_{u_0}, \Theta).$$

从而 $\mathbb{C}_*^2/G_{u_1}$ 与 $\mathbb{C}_*^2/G_{u_0}$ 不双全纯等价. 即解析族 $\{\mathbb{C}_*^2/G_{u_\lambda} | \lambda \in \mathbb{C}\}$ 在 $\lambda = 0$ 处有一个跳跃. 因此, 定义 2.2 的第一条已不能满足, 故 $S^1 \times (S^3/H)$ 上所有复结构的粗糙模空间也不存在. 这便完成了定理 1 后半部分的证明.

注 1 虽然 $H = A_m$ 时, $S^1 \times (S^3/H)$ 上整体模空间不存在, 但有了第 1 节的准备, 我们可以讨论 $S^1 \times (S^3/H)$ 上部分复结构的模空间, 如所有 $h^1 = 2$ 的复结构的精细模空间仍存在.

注 2 由上面模空间的构造, 当 $H \neq A_m$ 时, $S^1 \times (S^3/H)$ 上所有复结构的模数均可定义且为 h^1 . 当 $H = A_m$ 时, $S^1 \times (S^3/H)$ 上复结构的模数仅 $h^1 = 2$ 时才有定义, 这时模数也等于 h^1 . 它的证明主要是依赖于 Kuranishi 族的构造.

参 考 文 献

- 1 Kodaira K. On the structure of compact complex surfaces, I~IV. Amer J Math, 1964, 86: 751~798; 1966, 88: 682~721; 1968, 90: 55~83, 1048~1066
- 2 Dabrowski K. Kuranishi families for Hopf surfaces. Ann Polo Math, 1985, XLV: 61~84
- 3 Dabrowski K. Moduli spaces for Hopf surfaces. Math Ann, 1982, 259: 201~225
- 4 Kato M. Topology of Hopf surfaces. J Math Soc Japan, 1975, 27(2): 222~238
- 5 张锦豪, 李庆忠. 一类 Hopf 曲面的模空间. 科学通报, 1993, 38(24): 2219~2222
- 6 Blichfeldt F. Finite Collineation Groups. Chicago: Univ Chicago Press, 1917
- 7 Kodaira K. Complex Manifolds and Deformations of Complex Structure. New York: Springer-Verlag, 1985
- 8 Newstead P E. Introduction to Moduli Problems and Orbit spaces. New York: Springer-Verlag, 1978