具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面

李效伟^{1,2)}, 赵庆辉¹⁾, 杨义军^{3)*}, 曾薇⁴⁾, 孙黎¹⁾, 李缨¹⁾, 徐岗²⁾

¹⁾ (山东女子学院数据科学与计算机学院 济南 250300)

²⁾ (杭州电子科技大学计算机学院 杭州 310018)

³⁾ (西安交通大学计算机科学与技术学院 西安 710049)

⁴⁾ (西安交通大学数学与统计学院 西安 710049)

(yangyijun@gmail.com)

摘 要: 为了构建具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面, 提出 2 种双二次 Bézier 曲面的构造算法. 首先根据曲面第一微分基本形式, 推导双线性 and 双二次 Bézier 曲面满足保面积参数化的约束条件, 得出具有保面积参数化的双线性有理 Bézier 曲面只能是平行四边形的结论; 然后根据双二次曲面的约束条件, 通过求解方程组的形式设计符合约束条件的双二次 Bézier 曲面构造算法, 并且给出并证明了严格满足保面积参数化约束条件的双二次 Bézier 曲面只能为平面曲面的结论; 再将保面积参数化约束条件松弛, 基于曲面拟合思想设计具有较强造型能力的双二次 Bézier 曲面构造算法, 构造满足用户指定容差范围的双二次 Bézier 曲面; 最后给出若干具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面, 验证了算法有效性和曲面造型能力. 使用 C++ 语言实现的多个等参线分布和纹理映射的实例结果表明, 该算法生成的双二次 Bézier 曲面参数化能够保持面积拉伸.

关键词: 保面积参数化; 双二次 Bézier 曲面; 曲面造型

中图法分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2021.18501

Biquadratic Bézier Surfaces with Area-Preservation Parameterization

Li Xiaowei^{1,2)}, Zhao Qinghui¹⁾, Yang Yijun^{3)*}, Zeng Wei⁴⁾, Sun Li¹⁾, Li Ying¹⁾, and Xu Gang²⁾

¹⁾ (School of Data and Computer Science, Shandong Women's University, Jinan 250300)

²⁾ (School of Computer Science and Technology, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018)

³⁾ (School of Computer Science & Technology, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

⁴⁾ (School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: Construction of Bézier surfaces with area-preservation parameterization constraints is one of the important topics in surface modeling. In order to construct biquadratic Bézier surfaces with area-preservation parameterization, two algorithms are proposed to automatically construct biquadratic Bézier surfaces in this paper. Firstly, the standard conditions of bilinear and biquadratic Bézier surfaces with area-preservation parameterization are obtained by using the first fundamental form, and the fact that the only bilinear rational Bézier surfaces satisfying area-preservation conditions are parallelograms is drawn. Next, according to the standard conditions, a method of surface construction is designed, and the conclusion that the only biquadratic Bézier surfaces with area-preservation parameterization are planar is drawn. Besides, a method of sur-

收稿日期: 2020-07-17; 修回日期: 2020-08-17. 基金项目: 国家自然科学基金(61872224, 61772163); 山东省自然科学基金(ZR2017MF003); 国家自然科学基金-浙江两化融合联合基金(U1909210); 山东女子学院高水平科研项目培育基金(2019GSPSJ08). 李效伟(1989—), 男, 博士研究生, 讲师, CCF 会员, 主要研究方向为 CAD&CG; 赵庆辉(1998—), 女, 在校学生; 杨义军(1979—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 论文通讯作者, 主要研究方向为 CAD&CG; 曾薇(1980—), 女, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为计算机图形学; 孙黎(1985—), 女, 硕士, 讲师, CCF 会员, 主要研究方向为人工智能; 李缨(1971—), 女, 硕士, 教授, 硕士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为人工智能; 徐岗(1981—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为 3D 建模与仿真.

face construction with great modeling ability is designed, thanks to the fact that the standard conditions have been relaxed. Finally, some biquadratic Bézier surfaces satisfying the area-preserving criteria are given, which shown in the created Windows-based applications using C++. Several examples of tessellation and texture mapping demonstrate that surfaces generated by proposed algorithms are area-preserving.

Key words: area-preservation parameterization; biquadratic Bézier surfaces; surface modeling

保面积参数化是参数曲面的一种重要几何特征,对曲面造型、纹理映射、等几何分析和四边形网格生成等算法或应用的质量起决定性作用.保面积参数化保持面积拉伸,对于曲面上的任意一个区域,其曲面面积和参数面积相等,在计算机辅助设计领域,它经常被用作衡量曲面参数化质量的重要指标.构造具有保面积参数化的曲面有着重要的理论意义与应用价值.

近十余年,网格曲面和自由曲面的保面积参数化得到了研究人员的广泛关注. Yang 等^[1]使用 Möbius 变换和有序双线性变换等方法优化非均匀有理 B 样条(non-uniform rational B-splines, NURBS)曲面的保面积能量,以增加少量保角能量为代价,生成较好的保面积参数化曲面,提升曲面四边形网格生成效果.在等几何分析应用中, Xu 等^[2]通过 Bézier 曲面扩展、细分和全局优化等步骤,构建适合等几何分析的平面 B 样条曲面参数化,该方法能够保证细分曲面边界具有一定的连续性.除了在曲面四边形网格化和等几何分析中的应用,保面积参数化还能够较为显著地提升曲面的纹理映射效果^[3-5]. Dominitz 等^[3]针对三角网格形式的闭合曲面,将保角参数化作为优化过程的初始解,通过最优传输技术不断迭代优化保面积能量,使曲面上的纹理映射效果接近最优.根据 Gu 等^[4]对离散曲面保面积的相关理论证明, Zhao 等^[5]依据 Monge-Brenier 定理,构建比 Monge-Kantorovich 方法计算效率更高的优化算法,将利用 Ricci flow^[6]获取的保角映射作为初始解,使用最优传输技术优化三角网格曲面的保面积能量,在零亏格三角网格曲面上实现了具有保面积纹理映射.

1 相关工作

目前,大部分的研究工作主要集中在通过使用优化方法升网格曲面的保面积参数化^[7-10],试图建立一个适用于所有三角网格曲面的统一方法,期望能够将其应用在医学工程、机械设计和艺术设

计等领域. Lévy 等^[7]引入了柯西-黎曼方程的一阶有限元逼近,算法在相似意义下的解唯一,且不会产生三角形交叠的情况,通过一个共形参数映射提升曲面纹理映射质量. Floater^[8]引入平均值坐标来计算广义调和映射,能够简化曲面参数化的计算复杂度. Yoshizawa 等^[9]将广义调和映射算法结果作为初始解,通过若干次迭代优化,生成了较为快速和鲁棒的保拉伸参数化方法. Zou 等^[10]通过使用最小二乘共形映射获取初始解,利用等积参数化算法计算出了大脑模型(三角网格模型)的保面积参数化.

除了构造适用于网格曲面的统一性算法,研究人员对自由曲线和自由曲面的几何特征也进行了较深入的研究^[11-14]. Farouki 等^[11]提出“完全满足弧长参数化特征的曲线只能是直线形式”的观点. Farin^[12]使用极坐标法在复平面上构建可弦长参数化的有理二次 Bézier 曲线. Xu 等^[13]给出拉伸、弯曲和 jerk 能量极小低次 Bézier 曲线的构建方法. 杨义军等^[14]给出具有正交参数特性的双二次 Bézier 曲面的约束条件,并提出相应的曲面构建算法.针对自由曲面共形参数化^[15-18]的研究较为成熟,其能够提升基于导数的算法(如曲面采样、曲面相交、曲率计算等)的鲁棒性和稳定性. He 等^[15]提出了一种有理双三次重参数化方法来改进近似 Gregory 曲面片的参数化,以使新参数化更加符合给定细分曲面的参数化. Yang 等^[16]基于 Möbius 变换提出提升 Bézier 曲面参数化的方法,在不改变曲面形状的前提下,能够提升曲面的等参线分布的均匀性.为了提升有理 Bézier 曲面等参线分布的正交性和均匀性, Yang 等^[17]提出使用有序双线性参数化的方法来优化衡量自由曲面均匀性和正交性的非线性能量函数.为了更深入地提高自由曲面的共形参数化质量, Yang 等^[18]利用最小二乘法计算出一个近似共形参数化,将其作为初始解,最终使用列文伯格-马夸尔特(Levenberg-Marquardt, LM)非线性优化方法得到最优参数化结果.然而,关于自由曲面参数化的研究工作大多将重心放在共形参数

化上, 并没有把保面积参数化作为主要的研究对象, 以上研究工作得到的最优参数化虽然能够逼近共形参数化, 但是对保面积参数化的优化还不能够达到共形的效果.

虽然 Yang 等^[1]给出了 NURBS 曲面的保面积参数化方法, 但是没有给出双二次 Bézier 曲面保面积参数化约束条件和相应的曲面构造算法. 研究具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面的约束条件和构造算法具有重要意义, 尤其在曲面造型、曲面细分、网格生成和纹理映射等实际应用中. 例如, 对于复杂形状的曲面, 可以使用具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面替代自由曲面造型细分后的小面片, 从而使整个曲面都能具有良好的保面积参数化. 另外, 满足保面积参数化的自由曲面智能造型和参数化算法^[19]能够为纹理映射、曲面细分和四边形网格生成等算法提供更加鲁棒和稳定的计算.

本文根据自由曲面微分几何第一基本形式和保面积参数化条件, 首先探讨双线性 Bézier 曲面的具有保面积参数化的约束条件, 得出“完全满足保面积参数化约束条件的双线性有理 Bézier 曲面只能是平行四边形”的结论; 紧接着推导具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面形式, 得出完全具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面所满足的约束条件, 并据此设计了满足约束条件的双二次 Bézier 曲面构造算法; 为了拓展具有保面积参数化 Bézier 曲面的造型能力, 本文还将保面积参数化约束条件松弛, 设计了具有较强造型能力的双二次 Bézier 曲面构造算法; 最后给出了若干个曲面等参线分布和纹理映射结果, 验证了本文结论、算法的有效性和曲面造型能力.

2 保面积双二次 Bézier 曲面

2.1 Bézier 曲面的第一基本形式

一张 Bézier 曲面的微分几何形式^[20]可以表示为

$$X(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) P_{ij} \quad (1)$$

其中, u 和 v 分别为曲面上 2 个方向的参数, 满足条件 $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$; P_{ij} 为曲面的控制顶点; $B_i^m(u)$ 和 $B_j^n(v)$ 为伯恩斯坦多项式.

曲面的第一微分基本形式^[21]可表示为

$$ds^2 = X_u \cdot X_u (du)^2 + 2X_u \cdot X_v du dv + X_v \cdot X_v (dv)^2 \quad (2)$$

其中, s 为曲线弧长; $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$, $X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$, 即 X_u 和 X_v 分别为曲面 X 在 u 和 v 方向的偏导数.

令 $g_{\alpha\beta} = X_\alpha \cdot X_\beta$, $\alpha = 1, 2$, $\beta = 1, 2$, 则式(2)的参数可表示为矩阵形式, 即

$$I = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

其中, g_{11} 和 g_{22} 给出了 u 向和 v 向偏导数点乘之后的平方值, g_{12} 表示曲面任意点处的正交性度量. 式(2)可重新表示为矩阵相乘的形式

$$ds^2 = (du \quad dv) I \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

因为在正则性的假设条件下, 矩阵 I 有一个恒为正的行列式^[22], 即 g 的值恒大于 0, 其计算式为 $g = \det I = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$. 将 g 开方, 得到

$$\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \|X_u \times X_v\|, \quad u, v \in [0, 1].$$

假设变量 A 表示曲面面积, 则其计算方式为

$$A = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv = \int_0^1 \int_0^1 \|X_u \times X_v\| du dv.$$

如果给定曲面是保面积参数化曲面, 则曲面上的任意点处都必须满足条件

$$\|X_u \times X_v\| \equiv A \quad (3)$$

2.2 具有保面积参数化的双线性 Bézier 曲面

双线性 Bézier 曲面是一种公式表达极为简单的双线性插值曲面, 任意等参线也都是直线段, 它是直纹面, 其特点为只含有 P_{00} , P_{01} , P_{10} 和 P_{11} 等 4 个控制顶点, 并且曲面上的点均由其线性插值表示. 一张双线性 Bézier 曲面可表示为

$$X(u, v) = (1-u)(1-v)P_{00} + (1-u)vP_{01} + u(1-v)P_{10} + uvP_{11} \quad (4)$$

将式(4)分别对参数 u 和 v 求偏导数得到

$$\frac{\partial X(u, v)}{\partial u} = (v-1)P_{00} - vP_{01} + (1-v)P_{10} + vP_{11},$$

$$\frac{\partial X(u, v)}{\partial v} = (u-1)P_{00} + (1-u)P_{01} - uP_{10} + uP_{11}.$$

根据曲面的第一基本形式, 要得到曲面满足保面积参数化的约束条件, 则必须要满足式(3). 为了便于计算, 本文将曲面面积设定为 A , 得到条件式

$$\left\| \frac{\partial X(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial X(u, v)}{\partial v} \right\| = A.$$

经过公式推导, 求出双线性 Bézier 曲面必须满足 2 组约束, 才能够满足式(3)所表示的保面积

参数化约束条件, 即

$$\|(\mathbf{P}_{10} - \mathbf{P}_{00}) \times (\mathbf{P}_{01} - \mathbf{P}_{00})\| = A \quad (5)$$

$$\begin{cases} (\mathbf{P}_{10} - \mathbf{P}_{00}) \times (\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{01}) = \mathbf{0} \\ (\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10}) \times (\mathbf{P}_{01} - \mathbf{P}_{00}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (6)$$

式(5)给出了在 $\mathbf{P}_{00}$ 点处法向量的模必须为 A 的约束; 式(6)给出控制顶点所构成 4 条边界中的对边平行的约束. 根据式(6)和 Bézier 曲面的端点性质, 即控制顶点 $\mathbf{P}_{00}, \mathbf{P}_{01}, \mathbf{P}_{10}$ 和 $\mathbf{P}_{11}$ 分别表示曲面的 4 个端点; 又根据边界线性性质, 曲面的 4 条边界线 $\mathbf{X}(0, v), \mathbf{X}(1, v), \mathbf{X}(u, 0)$ 和 $\mathbf{X}(u, 1)$ 分别以 $\mathbf{P}_{00}\mathbf{P}_{01}, \mathbf{P}_{10}\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{00}\mathbf{P}_{10}$ 和 $\mathbf{P}_{01}\mathbf{P}_{11}$ 为控制多边形. 由于 2 点所构成的控制多边形只能是直线, 并且 $\mathbf{P}_{00}\mathbf{P}_{01} \parallel \mathbf{P}_{10}\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{00}\mathbf{P}_{10} \parallel \mathbf{P}_{01}\mathbf{P}_{11}$, 因此曲面的 4 条边界曲线只能是直线; 又因为双线性 Bézier 曲面只有 4 个控制顶点, 并且表面上的点均由线性差插值产生, 所以严格满足保面积参数化约束条件的有理双线性 Bézier 曲面只能是平行四边形. 根据双线性 Bézier 曲面的定义以及式(5)(6)所示的保面积参数化约束条件, 给出如图 1 所示一般双线性曲面和具有保面积参数化的双线性曲面实例.

a. 一般双线性曲面

b. 具有保面积参数化双线性曲面

图 1 Bézier 形式双线性曲面

由图 1a 可以看出, 每个网格面积拉伸差异较大, 曲面参数化不保持面元; 由图 1b 可以看出, 平行四边形和矩形图形的每个网格面积与参数面积拉伸一致, 其曲面参数化保持面元.

2.3 双二次 Bézier 曲面保面积参数化条件推导

双二次 Bézier 曲面的边界曲线和等参线均为抛物线, 9 个控制顶点中的 8 个决定了曲面的 4 条边界曲线, 内部控制顶点 $\mathbf{P}_{11}$ 只影响曲面内部形状,

对边界不产生影响. 根据式(1)和 Bézier 曲面的微分几何形式, 双二次 Bézier 曲面可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(u, v) = & B_0^2(u)B_0^2(v)\mathbf{P}_{00} + B_0^2(u)B_1^2(v)\mathbf{P}_{01} + \\ & B_0^2(u)B_2^2(v)\mathbf{P}_{02} + B_1^2(u)B_0^2(v)\mathbf{P}_{10} + \\ & B_1^2(u)B_1^2(v)\mathbf{P}_{11} + B_1^2(u)B_2^2(v)\mathbf{P}_{12} + \\ & B_2^2(u)B_0^2(v)\mathbf{P}_{20} + B_2^2(u)B_1^2(v)\mathbf{P}_{21} + \\ & B_2^2(u)B_2^2(v)\mathbf{P}_{22} \end{aligned} \quad (7)$$

依据曲面的第一微分基本形式, 为了得到式(3)中曲面上任意一点的 u 和 v 向切向量的显式表示, 将式(7)分别对参数 u 和 v 求偏导, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}(u, v)}{\partial u} = & -2(1-u)(1-v)^2\mathbf{P}_{00} - \\ & 4(1-u)(1-v)v\mathbf{P}_{01} - 2(1-u)v^2\mathbf{P}_{02} + \\ & \left[2(1-u)(1-v)^2 - 2u(1-v)^2 \right]\mathbf{P}_{10} + \\ & \left[4(1-u)(1-v)v - 4u(1-v)v \right]\mathbf{P}_{11} + \\ & \left[2(1-u)v^2 - 2uv^2 \right]\mathbf{P}_{12} + 2u(1-v)^2\mathbf{P}_{20} + \\ & 4u(1-v)v\mathbf{P}_{21} + 2uv^2\mathbf{P}_{22}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}(u, v)}{\partial v} = & -2(1-u)^2(1-v)\mathbf{P}_{00} + \\ & \left[2(1-u)^2(1-v) - 2v(1-u)^2 \right]\mathbf{P}_{01} + \\ & 2v(1-u)^2\mathbf{P}_{02} - 4u(1-u)(1-v)\mathbf{P}_{10} + \\ & \left[4u(1-u)(1-v) - 4uv(1-u) \right]\mathbf{P}_{11} + \\ & 4uv(1-u)\mathbf{P}_{12} - 2u^2(1-v)\mathbf{P}_{20} + \\ & \left[2u^2(1-v) - 2u^2v \right]\mathbf{P}_{21} + 2u^2v\mathbf{P}_{22}. \end{aligned}$$

首先将 $\frac{\partial \mathbf{X}(u, v)}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial \mathbf{X}(u, v)}{\partial v}$ 作向量叉乘运算,

得到曲面上 (u, v) 点处的法向量; 然后将法向量取模, 依据式(3)和向量叉乘运算的加法分配率和反交换律等化简 49 个条件式, 包含 441 项多项式; 最后求出双二次 Bézier 曲面必须满足 4 组约束条件.

定义向前差分为

$$\begin{aligned} \Delta^{1,0}\mathbf{P}_{ij} &= \mathbf{P}_{i+1j} - \mathbf{P}_{ij}, \\ \Delta^{k,0}\mathbf{P}_{ij} &= \Delta^{k-1,0}\mathbf{P}_{i+1j} - \Delta^{k-1,0}\mathbf{P}_{ij}, \quad k=1, 2, 3, \dots, \\ \Delta^{0,1}\mathbf{P}_{ij} &= \mathbf{P}_{ij+1} - \mathbf{P}_{ij}, \\ \Delta^{0,l}\mathbf{P}_{ij} &= \Delta^{0,l-1}\mathbf{P}_{ij+1} - \Delta^{0,l-1}\mathbf{P}_{ij}, \quad l=1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

其中 Δ 为向前差分算子.

$$\|\Delta^{1,0}\mathbf{P}_{00} \times \Delta^{0,1}\mathbf{P}_{00}\| = \frac{A}{4} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \Delta^{2,0}P_{00} \times \Delta^{2,0}P_{01} = \mathbf{0} \\ \Delta^{2,0}P_{00} \times \Delta^{2,0}P_{02} = \mathbf{0} \\ \Delta^{2,0}P_{01} \times \Delta^{2,0}P_{02} = \mathbf{0} \\ \Delta^{0,2}P_{20} \times \Delta^{0,2}P_{00} = \mathbf{0} \\ \Delta^{0,2}P_{20} \times \Delta^{0,2}P_{10} = \mathbf{0} \\ \Delta^{0,2}P_{10} \times \Delta^{0,2}P_{00} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} (\Delta^{1,0}P_{10} - \Delta^{0,1}P_{00} + \Delta^{0,1}P_{10}) \times \Delta^{0,2}P_{00} = \Delta^{0,1}P_{00} \times \Delta^{0,2}P_{10} \\ \Delta^{1,0}P_{00} \times \Delta^{1,0}P_{00} = \Delta^{0,1}P_{00} \times (\Delta^{1,0}P_{10} - \Delta^{0,1}P_{00}) \\ (\Delta^{2,0}P_{01} - \Delta^{2,0}P_{00}) \times (\Delta^{0,2}P_{10} - \Delta^{0,2}P_{00}) = \mathbf{0} \\ (\Delta^{0,2}P_{00} - 2\Delta^{0,2}P_{10} + \Delta^{0,2}P_{20}) \times \Delta^{0,1}P_{00} + \\ (\Delta^{2,0}P_{01} - \Delta^{2,0}P_{00}) \times 4\Delta^{1,0}P_{00} = \\ 2(\Delta^{0,2}P_{10} - \Delta^{0,2}P_{00}) \times (\Delta^{1,0}P_{10} - \Delta^{0,1}P_{00}) \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \Delta^{2,0}P_{00} \times [\Delta^{1,0}P_{10} - \Delta^{0,1}P_{00} + \Delta^{1,0}P_{01}] = \Delta^{2,0}P_{01} \times \Delta^{1,0}P_{00} \\ \Delta^{2,0}P_{00} \times \Delta^{0,1}P_{00} = 2(\Delta^{1,0}P_{10} - \Delta^{0,1}P_{00}) \times \Delta^{1,0}P_{00} \\ \Delta^{1,0}P_{00} \times (\Delta^{2,0}P_{00} - 2\Delta^{2,0}P_{01} + \Delta^{2,0}P_{02}) + \\ 2\Delta^{2,0}P_{00} \times (\Delta^{0,2}P_{10} - \Delta^{0,2}P_{00}) = \\ 2(\Delta^{1,0}P_{10} - \Delta^{0,1}P_{00}) \times (\Delta^{2,0}P_{01} - \Delta^{2,0}P_{00}) \\ \Delta^{2,0}P_{00} \times \Delta^{0,2}P_{00} + 2(\Delta^{2,0}P_{01} - \Delta^{2,0}P_{00}) \times \Delta^{0,1}P_{00} = \\ 2(\Delta^{0,2}P_{10} - \Delta^{0,2}P_{00}) \times \Delta^{1,0}P_{00} \end{cases} \quad (11)$$

令 $H_1 = \Delta^{2,0}P_{00}/2$, $H_2 = \Delta^{2,0}P_{01}/2$, $H_3 = \Delta^{2,0}P_{02}/2$, $H_4 = \Delta^{0,2}P_{20}/2$, $H_5 = \Delta^{0,2}P_{10}/2$, $H_6 = \Delta^{0,2}P_{00}/2$, 曲面控制顶点和差分向量分布情况如图 2 所示。

图 2 式(8)~式(11)中控制顶点和向量的原理图

2.4 具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面的构造算法

对于任意双二次 Bézier 曲面, 只有同时满足

式(8)~式(11)这 4 组约束条件, 才能够满足式(3)所表达的保面积参数化条件. 式(8)给出了在 P_{00} 点处法向量的模必须为 $A/4$ 的约束; 式(9)给出了曲面同方向控制顶点所构成向量必须平行的约束条件, 即 $H_1//H_2//H_3$, $H_4//H_5//H_6$; 式(10)(11)分别给出了横向和纵向控制顶点构成向量之间的关系, 且具有一定的对称性, 式(10)给出了 H_4, H_5, H_6 与 H_1, H_2, H_3 之间的约束关系; 式(11)给出了 H_1, H_2, H_3 与 H_5, H_6, H 之间的约束关系。

算法 1. 具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面构造算法。

输入. 控制顶点 P_{00} , P_{00} 点处 u 和 v 方向的偏导矢的方向(不共线)、模的比值和曲面面积 A 。

输出. 具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面。

Step1. 将 P_{00} 点处 u 和 v 方向的偏导矢的方向、模的比值和曲面面积 A 代入式(8), 计算控制顶点 P_{10} 和 P_{01} 。

Step2. 根据式(9), 给出剩余 6 个控制顶点 $P_{02}, P_{11}, P_{12}, P_{20}, P_{21}$ 和 P_{22} 坐标值的计算系数:

Step2.1. 由分类讨论得出约束 $H = \mathbf{0}$, 则可令 $P_{11} = P_{01} + P_{10} - P_{00}$;

Step2.2. 根据约束条件

$$\begin{cases} (P_{10} - P_{00}) \times H_6 = (P_{01} - P_{00}) \times 2H \\ H_1 \times (P_{01} - P_{00}) = 2H \times (P_{10} - P_{00}) \\ H_1 \times H_2 = \mathbf{0} \\ H_5 \times H_6 = \mathbf{0} \\ H_1 \times H_3 = \mathbf{0} \end{cases},$$

$P_{10} - P_{00} \neq \mathbf{0}$, $P_{01} - P_{00} \neq \mathbf{0}$, 当 $H_1 \neq \mathbf{0}$ 并且 $H_6 \neq \mathbf{0}$ 时, 可将控制顶点 $P_{02}, P_{20}, P_{21}, P_{12}$ 和 P_{22} 的坐标表示为

$$\begin{cases} P_{02} = k_1(P_{10} - P_{00}) + 2P_{01} - P_{00} \\ P_{20} = k_2(P_{01} - P_{00}) + 2P_{10} - P_{00} \\ P_{21} = k_3(P_{00} + P_{20} - 2P_{10}) + 2P_{11} - P_{01} \\ P_{12} = k_4(P_{00} + P_{02} - 2P_{01}) + 2P_{11} - P_{10} \\ P_{22} = k_5(P_{00} + P_{20} - 2P_{10}) + 2P_{12} - P_{02} \end{cases} \quad (12)$$

其中, $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 \in \mathbb{R}$. 类似地, 当 $H_1 = \mathbf{0}$ 或 $H_6 = \mathbf{0}$ 时, 这些控制顶点坐标也将得到形式如式(12)的表达式;

Step2.3. 将 $P_{02}, P_{20}, P_{21}, P_{12}$ 和 P_{22} 的坐标表示代入剩余约束条件

$$\begin{cases} [2H + (P_{11} - P_{10})] \times H_6 = (P_{01} - P_{00}) \times H_5 \\ H_1 \times [2H + (P_{11} - P_{01})] = H_2 \times (P_{10} - P_{00}) \\ (H_2 - H_1) \times (H_5 - H_6) = \mathbf{0} \\ (P_{10} - P_{00}) \times (H_1 - 2H_2 + H_3) + 4H_1 \times (H_5 - H_6) = \\ 4H \times (H_2 - H_1) \\ (H_6 - 2H_5 + H_4) \times (P_{01} - P_{00}) + 4(H_2 - H_1) \times H_6 = \\ 4(H_5 - H_6) \times H \\ H_1 \times H_6 + (H_2 - H_1) \times (P_{01} - P_{00}) = (H_5 - H_6) \times (P_{10} - P_{00}) \end{cases},$$

得到方程组

$$\begin{cases} k_1(1-k_4)(P_{01}-P_{00}) \times (P_{10}-P_{00}) = 0 \\ k_2(1-k_3)(P_{01}-P_{00}) \times (P_{10}-P_{00}) = 0 \\ k_1k_2(k_3-1)(k_4-1)(P_{01}-P_{00}) \times (P_{10}-P_{00}) = 0 \\ k_2(1-2k_3+k_5-2k_1k_4+2k_1)(P_{10}-P_{00}) \times (P_{01}-P_{00}) = 0 \\ k_1k_2(k_3-1)(P_{01}-P_{00}) \times (P_{10}-P_{00}) = 0 \\ k_1k_2(P_{01}-P_{00}) \times (P_{10}-P_{00}) = 0 \end{cases}$$

P_{00} , P_{10} 和 P_{01} 必须构成三角形的前提条件, 得到约束 $(P_{01}-P_{00}) \times (P_{10}-P_{00}) \neq 0$, 化简方程组得到一个便于求解的方程组

$$\begin{cases} k_1(1-k_4) = 0 \\ k_2(1-k_3) = 0 \\ k_1k_2(k_3-1)(k_4-1) = 0 \\ k_2(1-2k_3+k_5-2k_1k_4+2k_1) = 0 \\ k_1k_2(k_3-1) = 0 \\ k_1k_2 = 0 \end{cases};$$

Step2.4. 求解方程组, 得到约束

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 \neq 0 \\ k_3 = k_5 = 1 \end{cases}.$$

Step3. 给定自由变量 k_2 和 k_4 的值, 根据式(12)计算 P_{02} , P_{12} , P_{20} , P_{21} , P_{22} 的值, 输出 9 个控制顶点坐标所表示的双二次 Bézier 曲面.

2.5 具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面只能为平面曲面

对于具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面, 必满足式(8)~式(11), 其表达的几何含义为曲面任意点处的一个法向量的模恒为常量. 根据双二次 Bézier 曲面的微分几何含义, 由于向量 $P_{01}-P_{00}$ 和 $P_{10}-P_{00}$ 所构成的平面是曲面在 P_{00} 点处的切平面, 故能得到 P_{00} , P_{01} 和 P_{10} 3 点共面. 又因为, 从式(8)~式(11)中的 4 组约束条件出发, 根据分类讨论结果, 得出向量 H 只能为零向量, 否则, 必有其中的一个约束条件不成立, 因此得到式 $P_{11}=P_{01}+P_{10}-P_{00}$. 根据向量共面定理^[23]可知, P_{00} , P_{01} , P_{10} 和 P_{11} 4 点共面. 由于控制顶点 P_{20} , P_{02} , P_{21} , P_{12} 和 P_{22} 可表示为式(12)的形式, 并且式(12)中每个控制顶点的表达式均满足向量共面定理, 即 5 个控制顶点均与点 P_{00} , P_{01} 和 P_{10} 共面, 可得曲面的 9 个控制顶点共面. 又根据 Bézier 曲面的凸包性质, 由以上 9 个控制顶点生成的曲面为一平面片. 综上所述, 严格满足保面积参数化约束条件的双二次 Bézier 曲面只能是平面曲面.

3 松弛保面积参数化双二次 Bézier 曲面

3.1 问题描述

对于双二次 Bézier 曲面, 由于严格满足保面积参数化约束条件式(8)~式(11)的曲面只能是平面曲面, 在第 2.5 节给出了相关证明. 为了构造出具有丰富弯曲造型的真正意义上的曲面, 本文提出通过求解在不等式约束下的能量函数来生成逼近保面积参数化的 Bézier 曲面.

求解能量函数

$$\begin{cases} \min \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (X(u, v) - Q_{ij}) \\ \text{s.t. } A - e \leq \|\partial X_u(u, v) \times \partial X_v(u, v)\| \leq A + e \end{cases}.$$

其中, u 和 v 是采样点处的参数坐标, 不等式的个数由采样点密度决定, 优化参数是曲面的控制顶点坐标, 目标函数是希望生成的曲面尽量通过给定的逼近点 Q_{ij} , 同时要求约束采样点处的最大面积误差不得超过 e . 上述优化问题是一个在非线性约束下的最小二乘优化问题, 本文使用 fmincon 函数进行求解.

3.2 松弛保面积参数化约束条件的双二次 Bézier 曲面构造算法

本文提出通过松弛保面积参数化约束条件来构造具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面的算法思路. 首先通过增加曲面的面积容差, 然后指定在曲面的 $m \times n$ 个采样点处满足面积容差约束, 最后使用最小二乘法^[24]拟合所要构造的双二次 Bézier 曲面, 以达到曲面接近或经过给定曲面逼近点的形状设计要求.

算法 2. 松弛保面积参数化约束条件的双二次 Bézier 曲面构造算法.

输入. $M \times N$ 个逼近点 $Q_{00}, Q_{01}, \dots, Q_{0M}; Q_{10}, Q_{11}, \dots, Q_{1M}; \dots; Q_{N0}, Q_{N1}, \dots, Q_{NM}$ 坐标, 采样点的个数 m 和 n , 以及面积容差 e .

输出. 具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面.

Step1. 根据输入控制顶点计算曲面面积 A .

Step2. 根据曲面 u 和 v 向的采样点个数 m 和 n 确定采样点处的不等式约束.

Step3. 拟合双二次 Bézier 曲面, 更新曲面控制顶点 $P_{00}, P_{01}, P_{02}, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{20}, P_{21}$ 和 P_{22} 坐标, 重新计算曲面面积 A' .

Step4. 迭代. 将 Step1 中的输入控制顶点替代为 Step3 重更新后的控制顶点. 重复执行 Step1~Step3, 直到 $\|A' - A\| \leq A \cdot 10^{-2}$.

Step5. 重新拟合双二次 Bézier 曲面, 输出控制顶点 $P_{00}, P_{01}, P_{02}, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{20}, P_{21}$ 和 P_{22} 坐标.

4 实 例

本文使用的实验平台是主频为 3.6 GHz 的 Intel Core I7 处理器, 内存为 16 GB 的台式机, 运行系统为 64 位的 Windows 7 操作系统, 显卡为 8 GB 显存的英伟达 GeForce GTX1080. 实验过程中, 使用 Visual Studio 2018 集成开发环境实现本文提出的构造算法, 使用 C++ 语言和 OpenGL 图形库显示曲面的等参线分布和纹理映射效果. 实验内容包括:

实例 1. 具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面的构造实例, 所构造曲面严格满足式(8)~式(11)给出约束条件.

实例 2. 松弛保面积参数化约束条件的双二次 Bézier 曲面的构造实例, 设定面积容差, 使用曲面拟合方法构造, 所构造曲面在容差范围内满足保面积参数化.

4.1 实例 1

为了展示本文算法的有效性, 图 3 中给出了 3 个实验结果. 图 3a 给出了曲面的等参线分布实验结果, 展示了曲面细分和网格化效果, 图 3b 给出了曲面的纹理映射实验结果. 实验结果可以看出, 3 个曲面的参数化保持面积拉伸, 即完全满足保面积约束条件式(8)~式(11), 在曲面细分实验中, 虽然细分曲面的形状不同, 但是任何一个细分曲面的面积均保持面积拉伸; 在纹理映射实验中, 分别用黑白棋盘格和圆盘格展示了本文算法 1 生成曲面的保面积参数化特性, 虽然小方格和小圆圈形状发生了拉伸, 但是其面积仍然保持拉伸. 从曲面构造角度看, 通过本文算法 1 找到的曲面均需要保证有一个方向的控制顶点构成直线, 即控制多边形 $P_{00}P_{01}P_{02}, P_{10}P_{11}P_{12}$ 和 $P_{20}P_{21}P_{22}$ 均为直线, 也即 $H_1=H_2=H_3$ 或 $H_4=H_5=H_6$, 这种约束导致可生成的曲面形状的限制性; 曲面另外一个方向可以实现一定程度的弯曲, 为了检验是否满足条件, 最终生成的曲面需要代入式(10)(11)验证. 虽然保面积约束条件较为苛刻, 但是不局限于图 3 中展示的 3 个曲面, 通过本文算法 1 可以找到更多符合保面积参数化约束条件的双二次 Bézier 曲面, 一个可行的方法为: 以图 3 中的任意一个曲面为基础, 通过调整曲面弯曲方向的控制顶点坐标位置, 可以生成

一簇保面积参数化曲面, 如图 4 所示, 可以看出, 虽然同一簇曲面的形状相似, 但其弯曲程度不同. 表 1 给出了图 4 中 4 个双二次 Bézier 曲面图形的 3 个输入控制顶点坐标和其余控制顶点的计算系数. 图 3~图 5 所示的曲面图形中, P_{00}, P_{01} 和 P_{10} 为本文算法 1 的输入控制顶点; $P_{02}, P_{11}, P_{12}, P_{20}, P_{21}, P_{22}$ 为通过本文算法 1 计算得到的控制顶点.

需要特殊说明的是, 只是通过输入计算出的 3 个输入控制顶点 P_{00}, P_{01} 和 P_{10} , 并不能唯一确定满足条件的其余控制顶点, 因为在本文算法 1 的执行过程中其余控制顶点的计算系数 k_2 和 k_4 是自由变量, 通过设定不同的 k_2 和 k_4 值可以生成不同形状的双二次 Bézier 曲面. 另外, 经过实验案例测试, 在 3 个输入控制顶点 P_{00}, P_{01} 和 P_{10} 取值相同, 但 k_2 和 k_4 取值不同的情况下, 生成了 2 种不同形状的双二次 Bézier 曲面, 如图 5 所示, 2 种曲面都满足式(8)~式(11).

图 3 等参线分布和纹理映射实验

图 4 一簇具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面

表 1 图 4 中图形的部分控制顶点坐标和计算系数

图序	计算系数					顶点坐标		
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	P_{00}	P_{01}	P_{10}
4a	0.0	5.0	1.0	1.0	1.0	(2,0,0)	(2.5,0,0)	(0,0.5,0)
4b	0.0	4.0	1.0	2.0	1.0	(1.5,0,0)	(2,0,0)	(0,0.5,0)
4c	0.0	3.5	1.0	3.0	1.0	(1.25,0,0)	(1.75,0,0)	(0,0.5,0)
4d	0.0	3.0	1.0	4.0	1.0	(1,0,0)	(1.5,0,0)	(0,0.5,0)

图 5 输入数据相同的双二次 Bézier 曲面

通过给定不同的输入数据计算出的 3 个输入控制顶点 P_{00} , P_{01} 和 P_{10} 坐标, 能够生成形状较为丰富的具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面, 如图 6 所示. 表 2 给出了图 6 中 6 个曲面图形的 3 个由本文算法 1 的输入数据计算出的控制顶点坐标和其余控制顶点的计算系数.

图 6 不同的输入数据生成双二次 Bézier 曲面

表 2 图 6 中图形的部分控制顶点坐标和计算系数

图序	计算系数					顶点坐标		
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	P_{00}	P_{01}	P_{10}
6a	0.0	1.0	1.0	0.4	1.0	(0,0,0)	(0.5,0.5,0)	(0,0.5,0)
6b	0.0	2.0	1.0	0.0	1.0	(0,0,0)	(-0.25,0.2,0)	(1,0.2,0)
6c	0.0	2.0	1.0	0.3	1.0	(0,0,0)	(-0.25,0.4,0)	(0.375,0.4,0)
6d	0.0	1.0	1.0	0.6	1.0	(0,0,0)	(-0.25,0.333 3,0)	(0.5,0.333 3,0)
6e	0.0	1.0	1.0	0.9	1.0	(0,0,0)	(-0.25,0.5,0)	(0.25,0.5,0)
6f	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0	(0,0,0)	(-0.25,0.25,0)	(0.75,0.25,0)

表 3 给出的数据验证了本文算法 2 的有效性, 表中数据为采样数为 $10^4 \times 10^4$ 时图 7 中 8 个曲面的目标函数值 f 、最大保面积能量 $J_{\max}$ 、迭代次数和给定的容差 e . 其中, 目标函数值 f 表示拟合生成的曲面与目标曲面的偏离程度, f 值越大, 表明拟

4.2 实例 2

由于严格满足保面积参数化约束条件的双二次曲面的造型能力较为有限, 只能生成平面空间中的曲面, 难以生成造型丰富的曲面, 因此其在某些特殊的实际应用中具有一定的局限性. 为此, 本文提出了松弛保面积参数化约束的双二次 Bézier 曲面的构造算法. 为了验证松弛保面积参数化约束的双二次 Bézier 曲面的造型能力, 使用 C++ 语言编写程序实现了基于不等式方程组约束的曲面拟合算法, 所生成曲面的等参线分布和纹理映射效果如图 7 所示. 可以看出, 通过本文算法 2 构造的双二次 Bézier 曲面具有丰富的形状, 具有较强的造型能力.

合曲面越难以经过本文算法 2 中输入中的给定点, 从而更加偏离给定的曲面形状; 表 3 第 4 列表示在满足不等式约束的前提下优化过程的迭代次数. 相对于曲面 2~曲面 8, 曲面 1 的弯曲程度较小, 故将容差设置为其他曲面容差的 1/10, 设定的容差

图 7 松弛后的双二次 Bézier 曲面

表 3 图 7 曲面采样数为 $10^4 \times 10^4$ 的保面积能量与容差

曲面	f	$J_{\max}$	迭代次数	e	曲面	f	$J_{\max}$	迭代次数	e
1	0.1457	0.000914	50	0.001	5	1.0247	0.008621	267	0.010
2	0.8622	0.008502	87	0.010	6	0.9875	0.009382	68	0.010
3	1.2457	0.009657	168	0.010	7	1.5416	0.009331	74	0.010
4	1.3245	0.009355	171	0.010	8	1.3142	0.009944	59	0.010

越小, 则生成的曲面越接近保面积参数化. 对于曲面造型, 如果预想生成弯曲幅度较大的曲面, 则可适当地将容差设定的更大一些. 例如, 本实验的曲面 2~曲面 8 中, 将容差设置为 0.010; 否则优化过程更新后的曲面不能很好地经过算法输入的给定点, 最终生成的曲面虽然能够将保面积容差限定

在用户定义的范围, 但是其形状将会较大幅度地偏离初始曲面形状. 曲面上最大保面积能量 $J_{\max}$ 表示的是曲面最坏处的保面积参数化偏离程度, 其值越大, 表明曲面在此位置处越偏离保面积参数化; 其值越小, 表明曲面在此位置处的保面积参数化效果越好. 曲面上采样点处最大保面积能量的

计算方法为 $J_{\max} = \max(\|X_u \times X_v - A'\|)$.

5 结 语

具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面在计算机辅助建筑设计、物理仿真和网格生成等领域具有一定的实际应用. 本文的研究对象为具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面. 一方面, 推导了具有保面积参数化的双线性 Bézier 曲面的约束条件; 另一方面, 推导了双二次 Bézier 曲面保面积参数化约束条件, 通过求解方程组, 给出了具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面的构造算法, 找到了若干满足保面积参数化约束条件的双二次 Bézier 曲面. 另外, 为了拓展具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面的造型能力, 通过加入面积容差将约束条件松弛, 利用曲面拟合方法构造了形状丰富的双二次 Bézier 曲面. 通过本文的 2 个构造算法生成了 19 个曲面, 多个等参线分布和纹理映射实例结果验证了构造算法的有效性, 得出如下结论: (1) 具有保面积参数化的双线性有理 Bézier 曲面只能是平行四边形; (2) 严格满足约束条件的具有保面积参数化的双二次 Bézier 曲面只能是平面曲面; (3) 松弛保面积约束条件后, 构造的双二次 Bézier 曲面接近保面积参数化, 并且其造型能力较强.

最后, 将具有保面积参数化的双三次和有理双二次 Bézier 曲面的约束条件推导和构造算法设计作为未来工作, 以期生成形状更加丰富和应用更加广泛的具有保面积参数化的低次 Bézier 曲面.

参考文献(References):

- [1] Yang Y J, Zeng W, Chen J F. Equiareal parameterizations of NURBS surfaces[J]. Graphical Models, 2014, 76(1): 43-55
- [2] Xu G, Li M, Mourrain B, *et al.* Constructing IGA-suitable planar parameterization from complex CAD boundary by domain partition and global/local optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 328: 175-200
- [3] Dominitz A, Tannenbaum A. Texture mapping via optimal mass transport[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2010, 16(3): 419-433
- [4] Gu X F, Luo F, Sun J, *et al.* Variational principles for Minkowski type problems, discrete optimal transport, and discrete Monge - Ampère equations[J]. Asian Journal of Mathematics, 2015, 20(2): 383-398
- [5] Zhao X, Su Z Y, David Gu X F, *et al.* Area-preservation mapping using optimal mass transport[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2013, 19(12): 2838-2847
- [6] Zeng W, Lui L M, Luo F, *et al.* Computing quasiconformal maps using an auxiliary metric and discrete curvature flow[J]. Numerische Mathematik, 2012, 121(4): 671-703
- [7] Lévy B E, Petitjean S, Ray N, *et al.* Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation[J]. ACM Transactions on Graphics, 2002, 21(3): 362-371
- [8] Floater M S. Mean value coordinates[J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20(1): 19-27
- [9] Yoshizawa S, Belyaev A, Seidel H P. A fast and simple stretch-minimizing mesh parameterization[C] //Proceedings of the Shape Modeling International. Amsterdam: Elsevier Press, 2004: 200-208
- [10] Zou G Y, Hu J X, Gu X F, *et al.* Authalic parameterization of general surfaces using Lie advection[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2011, 17(12): 2005-2014
- [11] Farouki R T, Sakkalis T. Real rational curves are not 'unit speed'[J]. Computer Aided Geometric Design, 1991, 8(2): 151-157
- [12] Farin G. Rational quadratic circles are parametrized by chord length[J]. Computer Aided Geometric Design, 2006, 23(9): 722-724
- [13] Xu G, Wang G Z, Chen W Y. Geometric construction of energy-minimizing Bézier curves[J]. Science China: Information Sciences, 2011, 54(7): 1395-1406
- [14] Yang Yijun, Song Tianqi, Yang Chenglei, *et al.* Bézier surfaces with orthogonal iso-parameter curves[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2015, 27(1): 76-80(in Chinese)
(杨义军, 宋天琦, 杨承磊, 等. 具有正交等参线的 Bézier 曲面[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2015, 27(1): 76-80)
- [15] He L, Loop C, Schaefer S. Improving the parameterization of approximate subdivision surfaces[J]. Computer Graphics Forum, 2012, 31(7): 2127-2134
- [16] Yang Y J, Yong J H, Zhang H, *et al.* Optimal parameterizations of Bézier surfaces[C] //Proceedings of the International Symposium on Visual Computing. Heidelberg: Springer, 2006: 672-681
- [17] Yang Y J, Zeng W, Yang C L, *et al.* An algorithm to improve parameterizations of rational Bézier surfaces using rational bilinear reparameterization[J]. Computer-Aided Design, 2013, 45(3): 628-638
- [18] Yang Y J, Zeng W, Song T Q. Optimizing conformality of NURBS surfaces by general bilinear transformations[J]. Computer-Aided Design, 2015, 63(6): 12-25
- [19] Guo Fenghua, Zhang Caiming, Jiao Wenjiang. Research progress on mesh parameterization[J]. Journal of Software, 2016, 27(1): 112-135(in Chinese)
(郭风华, 张彩明, 焦文江. 网格参数化研究进展[J]. 软件学报, 2016, 27(1): 112-135)
- [20] Presskey A N. Elementary differential geometry[M]. Heidelberg: Springer 2010
- [21] Farin G. Curves and surfaces for CAGD: a practical guide[M]. San Diego: Academic Press, 2002
- [22] Floater M S, Hormann K. Surface parameterization: a tutorial and survey[C] //Proceedings of the Advances in Multiresolution for Geometric Modelling, Mathematics and Visualization. Heidelberg: Springer, 2005: 157-186
- [23] David A C, John L, Donal O. Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra[M]. Heidelberg: Springer, 2007
- [24] Li Xiaowei, Yang Yijun, Yang Chenglei, *et al.* A C^1 continuous algorithm to optimize the parameterization of NURBS curves[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2014, 26(12): 2136-2141(in Chinese)
(李效伟, 杨义军, 杨承磊, 等. NURBS 曲线 C^1 连续参数优化算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2014, 26(12): 2136-2141)